Unger, Ephraim Salomon,

Die Geometrie des Euklid und das Wesen derselben Erläutert durch e. damit verbundene systemat. geordnete Sammlung von mehr als tausend geometr. Aufgaben u. d. beigefügte Anleitung zu e. einfachen Auflösung derselben. Ein Handbuch d. Geometrie für alle, d. e. gründl. Kenntniß dieser Wiss. in

Leipzig 1851

Die

Geometrie des Euklid

und

das Wesen derselben.

Die

Geometrie des Euklid

und

das Wesen derselben,

erläutert

durch eine damit verbundene systematisch geordnete Sammlung von mehr als tausend geometrischen Aufgaben und die beigefügte Anleitung zu einer einfachen Auflösung derselben.

Ein Handbuch der Geometrie

für

Alle, die eine gründliche Kenntniß dieser Wissenschaft in kurzer Zeit erwerben wollen.

Von

Dr. E. F. Unger,

Professor.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit 550 eingedruckten Figuren.

Leipzig:

Avenarius & Mendelssohn.

1851.

Vorrede.

Man findet allgemein, daß die Anfangsgründe der arithmetischen Wissenschaften leichter erlernt werden, als die der Geometrie; und der Grund hiervon liegt darin, daß in der Arithmetik die theoretischen Untersuchungen sogleich zu praktischen Regeln führen, durch deren Anwendung die mannichfachsten Aufgaben gelöſ't werden können. Für den Anfänger erwächst hieraus der Vortheil: daß er bald Gelegenheit erhält, sich einige Fertigkeit zu erwerben und hiermit die Bedeutung und den Einfluß der theoretischen Sätze kennen und würdigen zu lernen. Es ist sicher, daß der Unterricht in der Geometrie zu einem gleichen Erfolge führen muß, wenn man bei demselben auf eine ähnliche Weise verfährt. Hierzu ist es aber keinesweges nothwendig, ein neues System der Geometrie aufzustellen, sondern es kömmt bloß darauf an, ein gutes Lehrbuch dieser Wissenschaft auf zweckmäßige Weise zu benutzen. Den geeignetesten Leitfaden zu einem solchen Unterricht in der Geometrie besitzen wir durch die „Elemente des Euklid". Dieses Werk enthält nicht bloß die wahren Elemente der Geometrie vollständig und in einer dem Geiste der Wissenschaft entsprechenden Folge, sondern man findet in demselben zugleich auch alle die Grundregeln, von welchen die Auflösungen der sämmtlichen geometrischen Aufgaben abhängen. Während wir durch die in den Elementen vorkommenden Lehrsätze nach und nach die ganze Theorie der Geometrie kennen lernen, geben die in denselben mit aufgenommenen Aufgaben zugleich eine einfache und vollständige Anleitung zur Ausführung aller der

Constructionen, die bei den verschiedenen Anwendungen der Geometrie gebraucht werden. Diese Aufgaben bilden einen wesentlichen Theil des Systems, und sind für die Geometrie das, was in der Arithmetik die Rechnungsregeln sind.

Der Zweck des gegenwärtigen Werkes ist „die Geometrie gründlich und vollständig durch den Euklid zu lehren". Daß die Elemente gründlich und vollständig sind, davon wird auch der Anfänger durch die den einzelnen Büchern beigefügten Uebersichten in den Beilagen I., IX., XIV., XIX., XXIII. und XXVII. überzeugt; durch die in den übrigen Beilagen enthaltenen 800 Aufgaben und 250 Lehrsätze aber erhält derselbe zugleich Gelegenheit: den mannichfachen Gebrauch der verschiedenen Sätze, so wie das Wesen und die Bedeutung derselben ausführlich kennen zu lernen. Diese Aufgaben und Lehrsätze sollen als Uebungen dazu dienen, um dem Anfänger nach und nach eine Sicherheit in der Behandlung geometrischer Gegenstände zu verschaffen; eine Sicherheit, die Jeder sich erwerben muß, dem daran gelegen ist, mit der Wissenschaft vertraut zu werden.

Bei dem Gebrauche dieser Uebungen ist nicht zu übersehen: daß dieselben bloß dazu dienen sollen, um durch sie eine hinlängliche Fertigkeit in der Benutzung der Theorie zu erwerben, daß dieselben aber keinesweges als zu dem Systeme gehörig angesehen werden dürfen. Das System ist durch die Elemente vollständig gegeben; und die wenigen Sätze, welche dasselbe enthält, geben das ganze Material der Geometrie, worauf Alles zurückgeführt werden muß.

Um die Benutzung dieses Handbuches möglichst zu erleichtern, sind die Figuren unmittelbar dem Texte beigefügt.

Erfurt, den 21. April 1833.

Vorrede zu der zweiten Auflage.

Bei Revision der verschiedenen, der ersten Auflage der „Elemente des Euklid" beigefügten Erläuterungen und Beilagen fand ich keine Veranlassung, wesentliche Veränderungen vorzunehmen, und auch die frühere Anordnung hat als zweckmäßig sich bewährt und ist unverändert beibehalten worden. Es erwächst hieraus für die Lehrinstitute, in welchen dieses Werk eingeführt ist, der Vortheil: daß die älteren Exemplare mit der neuen Auflage gleichzeitig benutzt werden können.

Die neue Auflage unterscheidet sich von der früheren nur wesentlich durch drei Beilagen, die ich neu hinzuzufügen für nothwendig erachtete; die beiden ersten derselben enthalten die wichtigsten Sätze von den „harmonischen Proportionalen und ihre Anwendungen auf das vollkommene Viereck, auf die harmonischen Eigenschaften des Kreises und die Lehre von den Transversalen". Diese Vermehrung glaube ich um so mehr als eine Verbesserung bezeichnen zu dürfen, als es einerseits wohl an der Zeit ist, die neueren Erweiterungen der Geometrie nicht mehr getrennt von den Elementen zu behandeln; und anderer Seits bei dieser Gelegenheit sich herausgestellt, wie diese neueren Lehren ganz naturgemäß den Elementen sich anschließen und die Geometrie des Euklid auch für diese die erforderlichen Grundlagen vollständig enthält. — In der dritten

dieser neuen Beilagen gebe ich eine kurze Anleitung zur Theilung der Figuren durch Berechnung. Es wird hier durch einige einfache Probleme die Grundlage gegeben, durch welche die Theilung in allen Fällen mit Sicherheit ausgeführt werden kann, und ich zweifle nicht, daß diese Anleitung als praktisch brauchbar sich bewähren wird.

Erfurt, im September 1851.

E. S. Unger.

Inhalt.

Seite

Einleitung.

§. 1. Von der Geometrie überhaupt.

Die Geometrie ist „die Lehre von den Größen im Raume"; sie beschäftigt sich also „mit den Eigenschaften der Linien, der von Denselben eingeschlossenen Flächen, und der von Diesen begrenzten Körper". Die Eigenthümlichkeit derselben besteht darin: daß sie alle in der Wissenschaft vorkommenden Begriffe „durch Construction für die Sinne anschaulich macht, und so dem Verstande ein Hülfsmittel darbietet, was sonst bei andern, außer den mathematischen Wissenschaften, nicht vorgefunden wird. Sollen z. B. die Eigenschaften eines Dreiecks untersucht werden, so wird wirklich eine solche Figur entworfen; und man kann nun durch Hülfslinien alle die Umstände anschaulich machen, von welchen die zu erörternden Eigenschaften abhängen. Eine solche Construction aber ist in allen Fällen in der Geometrie möglich, weil sie es ausschließlich mit Raumgrößen zu thun hat, und alles Räumliche den Sinnen anschaulich sich darstellen läßt; es wird auch durch diese Construction „die allgemeine Gültigkeit der geometrischen Sätze" nicht beschränkt, weil die Untersuchung in keinem Falle bloß auf die entworfene Zeichnung sich bezieht; indem diese hierbei immer nur als „Schema aller Begriffe einer Gattung" benutzt wird, und man bei dem Gebrauche einer solchen Zeichnung auch nur auf die allgemeinen Merkmale Rücksicht nimmt, die besondere Form der entworfenen

Figur aber ganz außer Acht läßt. So wird bei der Untersuchung der Eigenthümlichkeiten eines geradlinigen Dreiecks die Figur nur als ein von drei geraden Linien eingeschlossener Raum angesehen, und man läßt hierbei das Verhältniß der Seiten zu einander, und die Größe der einzelnen Winkel in der wirklich entworfenen Figur ganz unberücksichtigt, um ein für alle geradlinigen Dreiecke ohne Ausnahme brauchbares Resultat zu erhalten. Kömmt es nun aber in einem besondern Falle darauf an, „die Eigenschaften eines rechtwinkligen Dreiecks näher zu bestimmen": so wird auch in der Figur der eine Winkel als ein rechter vorausgesetzt, und es bleibt jetzt nur noch die Größe eines jeden der beiden übrigen Winkel unbestimmt. Daß jeder dieser beiden Winkel kleiner als ein rechter seyn muß, wird keinesweges deßwegen angenommen, „weil aus der entworfenen Figur Dieses augenscheinlich zu ersehen ist"; sondern weil bei Betrachtung des Dreiecks überhaupt sich der Lehrsatz bald beweisen läßt, „daß je zwei Winkel eines Dreiecks zusammen kleiner als zwei rechte sind", und hieraus unmittelbar folgt, „daß, wenn der eine Winkel ein rechter ist, jeder der beiden übrigen kleiner als ein solcher seyn muß."

Die Geometrie ist in mehrfacher Hinsicht äußerst wichtig; denn sie nimmt nicht nur als Wissenschaft, wegen ihrer Gründlichkeit und des systematischen Zusammenhanges aller ihrer Sätze, den ersten Rang ein, sondern sie hat auch wegen der ausgedehnten Anwendung, die von ihren Sätzen gemacht werden kann, für das praktische Leben einen hohen Werth. Ihre Gründlichkeit ist eine unmittelbare Folge der ihr zu Gebote stehenden Construction; und es giebt ihr eben dieses Hülfsmittel noch den besondern Vorzug, „daß die Beschäftigung mit derselben als die zweckmäßigste Verstandesübung angesehen wird"; und man zählt sie daher mit Recht zu denjenigen Wissenschaften, die Keinem fremd seyn sollten. Sie ist einer ausgedehnten Anwendung fähig, „weil sie die Größen im Raume zu ihrem Gegenstande hat", die nicht nur überall vorgefunden, sondern die auch überall gebraucht werden. Während man daher die Geometrie wegen ihrer Gründlichkeit zu den allgemeinen Bildungsmitteln zählt, gehört sie ihrer Brauchbarkeit wegen mit zu denjenigen Kenntnissen, die jedem Techniker nothwendig sind.

§. 2. Die Geometrie des Euklid.

Die Mannichfaltigkeit der Formen im Raume ist unerschöpflich, und jeder geometrische Satz besonders enthält die Grundlage für so unendlich viele Folgerungen und läßt eine so ausgedehnte Anwendung zu, daß wenn hiervon auch nur der kleinste Theil in einem geometrischen Lehrbuche aufgenommen werden soll, dieses hierdurch nothwendig zu einer unförmlichen Größe anwachsen und den Charakter eines Leitfadens verlieren muß. Folgerungen aus geometrischen Sätzen bieten sich in solcher Menge dar, daß es sehr leicht ist, das Gebiet der Wissenschaft auf diese Weise auszudehnen; ein Werk aber, durch welches Geometrie gelehrt werden soll, verliert um so mehr an Brauchbarkeit, je größer die Zahl der nicht nothwendig zu dem Systeme gehörigen Sätze ist, die in das Lehrgebäude aufgenommen werden.

Ein Lehrgebäude der Geometrie muß alle die Sätze enthalten, welche nothwendig zu dem Systeme gehören, und die für alle Fälle ausreichen, um jeden vorkommenden Lehrsatz streng beweisen, und jede Aufgabe mittelst derselben auf eine einfache Weise lösen zu können. Sind diese Sätze so geordnet, daß jeder an der Stelle steht, wo die Richtigkeit desselben mit Hülfe des Vorhergehenden vollständig bewiesen werden kann, und läßt sich nachweisen, „daß keiner der wesentlichen Sätze fehlt und kein Satz überflüssig aufgenommen ist": so entspricht das Lehrgebäude allen Anforderungen, die an ein streng wissenschaftlich gebildetes System gemacht werden können.

Ein solches Lehrgebäude der Geometrie nun besitzen wir in den **Elementen des Euklid**; dieses Werk entspricht allen Anforderungen und kann vollkommen genannt werden, insofern es dem Menschen überhaupt möglich ist, etwas Vollkommenes zu leisten. Alle Versuche, die seit 2000 Jahren gemacht worden sind, „einzelne Mängel, die man in diesem Werke entdeckt zu haben wähnte, zu verbessern", sind mißlungen, und haben nur dazu gedient, den Ausspruch von Kästner zu bestätigen: „die neuern Werke der Geometrie verlieren um so mehr an Klarheit und Gründlichkeit, je weiter sie von dem Euklid sich entfernen".

Durch die Elemente des Euklid lernt man die wahren Elemente der Geometrie kennen; sie enthalten das vollständige Material für

alle rein geometrischen Arbeiten. Bei der Beschäftigung mit Denselben kömmt es nur darauf an, „das Wesen der einzelnen Sätze und ihren Zusammenhang genau kennen zu lernen, und eine Anleitung zu einer zweckmäßigen Benutzung derselben zu erhalten."

§. 3. Zweck des gegenwärtigen Werkes.

Der Zweck des gegenwärtigen Werkes ist: „die Geometrie gründlich und vollständig durch den Euklid zu lehren." Dasselbe enthält zu dieser Absicht:

1) Die Bücher der Elemente des Euklid.

2) Die Nachweisung, „daß diese Elemente vollständig sind, und ein vollständiges Lehrgebäude in der Art bilden, wie der Begriff desselben §. 2. festgestellt ist."

3) Eine Anleitung zu dem Gebrauche der Sätze, welche die Elemente enthalten; um mittelst derselben alle vorkommenden, rein geometrischen Arbeiten auf eine, dem Geiste der Geometrie entsprechende Weise ausführen zu können; und

4) Abhandlungen über die vorzüglichsten Sätze der Elemente, um ihre Wichtigkeit, Allgemeinheit und ausgedehnte Brauchbarkeit anschaulich zu machen.

§. 4. Die Prämissen der Geometrie.

Unter den Prämissen der Geometrie werden hier die Sätze verstanden, welche dem eigentlichen Lehrgebäude vorhergehen und die Grundlage für dasselbe bilden. Sie sind „das Gegebene der Wissenschaft", und daher, insofern sie eine Behauptung enthalten, keines geometrischen Beweises fähig; während durch sie die Richtigkeit späterer Sätze bewiesen wird, von welchen überhaupt keiner ohne vollständigen Beweis als richtig angenommen werden darf. Es ist hiernach einleuchtend, „daß von der Gültigkeit der Prämissen die Gründlichkeit der ganzen Wissenschaft abhängt"; sind diese von der Art, daß ihnen allgemeine Gültigkeit zugestanden werden muß, und läßt sich bei jedem späteren Satze nachweisen, „daß er eine nothwendige Folge dieser Prämissen ist", so ist die Richtigkeit desselben hierdurch vollständig nachgewiesen.

Die Sätze, welche die Prämissen der Geometrie bilden, sind

von drei verschiedenen Gattungen, es sind a) Erklärungen, b) Forderungen und c) Grundsätze.

§. 5. Die Erklärungen.

Die Erklärung soll dazu dienen, um einen Begriff deutlich zu machen; was dadurch geschieht, „daß man die Merkmale desselben angiebt"; und es bedürfen Diese selbst wieder einer Erklärung, wenn sie nicht an und für sich deutlich sind.

Ist der Begriff zum voraus gegeben, so muß die Richtigkeit der Erklärung nachgewiesen werden. Es muß nämlich gezeigt werden, „daß die Erklärung für alle Fälle richtig ist, und keinen ausgedehnteren Gebrauch zuläßt, als der zu erklärende Begriff fordert." Nimmt man z. B. den Begriff „Dreieck" als gegeben an, so ist die Erklärung, „ein Dreieck ist ein von drei gleich großen Linien eingeschlossener Raum" unrichtig, weil sie nicht für alle Fälle paßt; da es auch Dreiecke giebt, bei welchen die Linien nicht gleich groß sind; und die Erklärung, „ein Dreieck ist ein von Linien eingeschlossener Raum" ist ebenfalls falsch, weil sie auch für andere Figuren richtig ist. Die erste dieser beiden Erklärungen ist zu enge und die andere zu weit. Nur wenn man sich überzeugt hat, „daß eine gegebene Erklärung weder zu enge, noch zu weit ist" muß dieselbe als richtig anerkannt werden, und alsdann ist man berechtigt, den Satz umzukehren; man findet nämlich nicht nur immer die in der Erklärung angegebenen Merkmale, wenn der Begriff gegeben ist, sondern es wird auch überall der Begriff angetroffen, wo man die sämmtlichen, in der Erklärung angegebenen Merkmale vorfindet.

Wird ein Begriff aber erst dadurch gebildet, „daß man mehrere Merkmale mit einander verbindet, und diese Vereinigung durch eine eigne Benennung bezeichnet": so sagt eine auf diese Weise gebildete Erklärung nur aus, „was unter dieser Benennung verstanden werden soll", und ihre Richtigkeit bedarf daher keines besondern Beweises; sie gilt selbst noch alsdann, wenn auch die Möglichkeit eines solchen Begriffes, wie der erklärte, noch gar nicht nachgewiesen ist. So wird z. B. durch die Erklärung „Ein Viereck, das vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat, wird ein Quadrat genannt", ein Begriff gebildet; es wird hier der

Begriff eines Quadrats nicht als gegeben vorausgesetzt, sondern es wird angegeben, „was unter dieser Benennung verstanden werden soll"; wobei es gleich viel ist, „ob eine solche Figur wirklich vorkömmt oder nicht." Erst wenn man von einem solchen Begriffe Gebrauch machen will, ist nachzuweisen, „daß eine Vereinigung der in der Erklärung vorkommenden Merkmale möglich ist."

Die Erklärung gegebener Begriffe nennt man „Sacherklärung", und die Erklärungen, durch welche Begriffe erst gebildet werden, sind Worterklärungen.

Die meisten in der Geometrie vorkommenden Erklärungen sind Worterklärungen; durch welche also die Begriffe erst erzeugt, nicht aber „als anderswoher bereits gegeben" in der Wissenschaft aufgenommen werden. Alle aus dergleichen Erklärungen abgeleiteten Folgerungen haben Gültigkeit unter der Voraussetzung, welche die Erklärung enthält; und sie erhalten allgemeine Gültigkeit, sobald nachgewiesen wird, „wie es möglich ist, einen der Erklärung entsprechenden Begriff wirklich zu erzeugen." In der Geometrie wird ein durch Worterklärung gebildeter Begriff erst durch die Auflösung einer Aufgabe eingeführt; indem gezeigt wird, „wie ein dem gebildeten Begriffe entsprechendes Ding wirklich erzeugt werden kann."

Wird bei einer Erklärung zugleich angegeben, „wie ein dem erklärten Begriffe entsprechendes Ding erzeugt werden kann", so nennt man eine solche Erklärung genetisch; und es unterscheidet sich dieselbe dadurch von der gewöhnlichen Worterklärung, daß nun nicht erst noch durch eine besondere Aufgabe die Möglichkeit des erklärten Begriffes nachgewiesen zu werden braucht. Von der Art ist z. B. die Erklärung: die durch einen bestimmten Punkt einer geraden Linie, die um ihren unverrückbaren Endpunkt in einer Ebene bewegt wird, erzeugte Figur ist ein Kreis. Alle dergleichen genetische Erklärungen, insofern sie in der Geometrie vorkommen, setzen den Begriff der Bewegung voraus.

Die in den Elementen des Euklid vorkommenden Erklärungen sind Worterklärungen; und da sie als solche keines Beweises ihrer Richtigkeit bedürfen, so sind mit Recht die Erklärungen aller in einem Buche vorkommenden Begriffe Diesem selbst vorausgeschickt; und es gewährt Dieses noch den besondern Vortheil, „daß, wenn

der Anfänger irgendwo auf einen solchen Begriff stößt, ohne der Bedeutung desselben sich zu erinnern, er sogleich weiß, wo er die Erklärung desselben zu suchen hat." Von allen in dem Euklide erklärten Begriffen, deren Daseyn sich nicht von selbst versteht, wird übrigens in den Elementen, bevor von denselben Gebrauch gemacht wird, nachgewiesen, „wie ein denselben entsprechendes Ding wirklich erzeugt werden kann."

§. 6. Die Forderungen.

„Forderungen, Postulate" sind Sätze, durch welche verlangt wird, „daß etwas ausgeführt werden soll", ohne daß man zeigt, „auf welche Weise es geschehen kann." Es wird also verlangt, „daß man die Möglichkeit der Erzeugung bestimmter Begriffe zugestehe" — ohne daß angegeben wird, wie die Ausführung möglich ist. Postulate sind daher „Aufgaben ohne Auflösung, von welchen gefordert wird, daß die Möglichkeit ihrer Auflösung für alle Fälle zugestanden werde."

In der Geometrie werden drei Postulate der Art angenommen; und zwar wird verlangt, daß man zugestehe, „es können jede zwei gegebenen Punkte durch eine gerade Linie verbunden werden; man könne jede gegebene gerade Linie beliebig verlängern; und es könne um jeden der Lage nach gegebenen Punkt, als Mittelpunkt, in jedem Abstande ein Kreis beschrieben werden."

Das Beschreiben der geraden Linie und des Kreises wird also in der Geometrie als möglich vorausgesetzt, ohne daß gelehrt wird, „auf welche Weise es geschehen kann"; und in der That läßt sich dafür auch theoretisch das Verfahren nicht wohl angeben, da z. B., das Ziehen einer geraden Linie immer bereits eine solche voraussetzt, nämlich dadurch, daß man hierbei eines Lineals sich bedient. Durch die Postulate der Geometrie wird eigentlich nichts weiter ausgesagt, als: man verlangt, daß der Gebrauch des Lineals und des Zirkels gestattet sey; so daß hiernach jede Construction als geometrisch anerkannt werde, die mit alleiniger Hülfe des Lineals und des Zirkels sich ausführen läßt. Uebrigens sind die Postulate insofern noch beschränkter, als hier ausgesagt ist: als man hierbei den Gebrauch des Zirkels nur in soweit sich erlaubt, daß mittelst desselben ein Kreis beschrieben werden kann,

wenn der Mittelpunkt und der Abstand des Umfanges von demselben gegeben sind. Jeder weitere Gebrauch des Zirkels wird später, bevor man ihn zuläßt, durch die Auflösung der entsprechenden Aufgabe gerechtfertigt.

Die Postulate bilden „das erste Material der Geometrie"; und dadurch, daß sie ausdrücklich in Anspruch genommen werden, entsteht für den Geometer die Verbindlichkeit, „außer Denselben Nichts weiter anzunehmen oder zuzulassen, bevor die Möglichkeit der Ausführung nicht strenge nachgewiesen ist." Daher kann z. B. erst alsdann von dem Zirkel Gebrauch gemacht werden, um von einer gegebenen, auf der einen Seite unbegrenzten Linie eine bestimmte Linie abzuschneiden, wenn zuvor in Buch I. Satz 3. gezeigt ist, „wie es theoretisch möglich ist, diese Aufgabe zu lösen."

Ueberhaupt haben alle Aufgaben der theoretischen Geometrie und insbesondere alle Aufgaben, die in den Elementen des Euklid vorkommen, zunächst den Zweck: nachzuweisen „wie es möglich ist, das in der Aufgabe Verlangte mit Hülfe der Sätze auszuführen, die der Aufgabe vorhergehen". Es kömmt hierbei nie darauf an, „das kürzeste Verfahren anzugeben, durch welches man zu der Auflösung gelangen kann", sondern immer nur darauf, „die Möglichkeit nachzuweisen, daß die Auflösung ausführbar sey". Wenn einmal diese Möglichkeit nachgewiesen ist: so steht es nachher frei, die Auflösung bei einem vorkommenden Falle auf eine möglichst einfache Weise vorzunehmen. Alle in den Elementen vorkommenden Aufgaben haben den Zweck, „theoretisch die Möglichkeit ihrer Auflösung da nachzuweisen, wo von Denselben Gebrauch gemacht werden soll"; und daher kömmt es, daß diese Auflösungen gewöhnlich um Vieles einfacher sich ausführen lassen, als angegeben ist.

Anmerkungen. 1) Der Italiäner Mascheroni hat ein Werk herausgegeben, welches den Titel führt: „Gebrauch des Zirkels", und von welchem eine französische Uebersetzung durch Carette, und nach dieser im Jahre 1825 eine deutsche Uebersetzung von Grüson erschienen ist. Der Verfasser nimmt in diesem Werke bloß das Postulat an, „einen Kreis zu beschreiben"; er gestattet also nur den Gebrauch des Zirkels, nicht aber den des Lineals; und es werden daher von demselben alle geometrischen Aufgaben mit alleiniger Hülfe des Zirkels gelös't, ohne daß bei diesen Auflösungen auch nur eine einzige gerade Linie gezogen wird. Die Auflösungen sind bei dieser Beschränkung, die der Verfasser sich auf-

legt, und wodurch er sich gleichsam die eine Hand auf den Rücken bindet, äußerst scharfsinnig, und verdient insofern dieses Werk Jedem, der bereits mit den Elementen der Geometrie bekannt ist, zur Uebung empfohlen zu werden. Als ein Elementarwerk darf man es jedoch nicht ansehen, da bei den in demselben vorkommenden Sätzen stets die Elemente als bekannt vorausgesetzt werden.

2) In einer kleinen Schrift „die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises" von Jacob Steiner, Berlin 1833, wird nachgewiesen, „wie die verschiedenen geometrischen Aufgaben durch den ausschließlichen Gebrauch des Lineals, also ohne Beihülfe des Zirkels sich lösen lassen." Diese Schrift verdient besonders empfohlen zu werden Allen, die über die Elemente hinaus mit den neuern Fortschritten der Geometrie vertraut zu werden wünschen.

§. 7. Grundsätze.

„Der Grundsatz" ist ein Satz, dessen Richtigkeit und allgemeine Gültigkeit unmittelbar eingesehen wird, so daß er keines Beweises bedarf. Der Beweis eines Satzes überhaupt besteht darin: daß man zeigt, „wie derselbe eine nothwendige Folge eines andern Satzes ist, dessen Richtigkeit bereits zugestanden ist". Da nun die Richtigkeit dieses Satzes, auf welchen man jenen zurückführt, auf ähnliche Art bewiesen seyn muß: so leuchtet ein, „daß ein Beweis in's Unendliche fortgeführt werden müßte, wenn man nicht zuletzt auf Sätze käme, die keines Beweises bedürfen"; und eben Diese sind die Grundsätze, von deren Gültigkeit die Strenge des ganzen Beweises abhängt. Uebrigens folgt daraus, „daß ein Grundsatz keines Beweises bedarf" nicht „daß er keines Beweises fähig sey": sondern nur, „daß er an und für sich so einleuchtend ist, daß seine Gültigkeit unmittelbar zugestanden wird, ohne daß man nöthig hat, dieses Zugeständniß erst durch eine Schlußfolge zu erzwingen."

Jeder Satz, dessen Gültigkeit von der eines andern abhängt, und der daher bewiesen werden muß, ist ein Lehrsatz; der Grundsatz verhält sich daher zu dem Lehrsatze eben so, wie das Postulat zu der Aufgabe.

Jeder Satz, der unmittelbar aus einem Begriffe folgt, muß als ein Grundsatz anerkannt werden; und es wird die Erklärung des Begriffes nicht vorausgeschickt, sobald angenommen werden kann,

„daß der Begriff an und für sich deutlich sey." Dieses ist z. B. bei dem Begriffe der „Gleichheit" der Fall. Größen sind gleich, wenn die eine für die andere, der Größe nach, gesetzt werden kann.

Ist nun $A = B$
und auch $A = C$.

so kann nach der gegebenen Erklärung B für A in der zweiten Gleichung gesetzt werden, und Dieses giebt

$$B = C$$

Und so zeigt sich, „wie der erste Grundsatz des Euklid eine unmittelbare Folge des Begriffes der Gleichheit ist."

Auch ein Satz, der unmittelbar aus einem bereits aufgestellten Grundsatze folgt, kann selbst als Grundsatz aufgestellt werden; ohne daß man nöthig hat den Zusammenhang nachzuweisen, wenn dieser unmittelbar sich erkennen läßt, oder die Richtigkeit des aufgestellten Satzes auch ohne Beweis zugestanden werden muß. Ist z. B.

$$A = B$$

so folgt, daß auch $A + C = B + C$ seyn muß.

Weil, wenn $A + C$ größer als $B + C$ wäre, aus demselben Grunde auch $B + C$ größer als $A + C$ seyn müßte. Ist nun $C = D$, so kann man D für C setzen; und daher folgt unter dieser Voraussetzung aus der Gleichung

$A + C = B + C$
auch $A + C = B + D$;
wenn also $A = B$
und $C = D$

so folgt $A + C = B + D$,

welches der zweite Grundsatz ist.

Die den Elementen des Euklid vorhergehenden Grundsätze sind theils „Folgen aus den betreffenden Begriffen", und Diese werden materielle genannt; und theils sind es unmittelbare Folgerungen aus den materiellen Grundsätzen, und Diese nennt man formale Grundsätze. Von diesen Letzteren ist die Art und Weise, wie sie aus jenen folgen, deßhalb nicht angegeben, weil ihre allgemeine Gültigkeit, auch ohne daß sie eines Beweises bedürfen, nicht bestritten werden kann. Eine Ausnahme hiervon macht der 11te

Grundsatz; der nur insofern als Grundsatz zugelassen werden kann, inwiefern er überhaupt sich nicht beweisen läßt; ohne daß dadurch zugleich feststeht, daß er keines Beweises bedürfe. Das Nähere über diesen Grundsatz enthält die dem ersten Buche der Elemente angehängte „Abhandlung über die Theorie der Parallelen.“

§. 8. Von den in dem gegenwärtigen Werke vorkommenden Zeichen.

Der Zweck des gegenwärtigen Werkes ist, „die Geometrie durch den Euklid zu lehren“; daher kömmt es hier nicht darauf an, „mit philologischer Genauigkeit die Worte des Euklid wiederzugeben“; sondern nur der Geist desselben soll beibehalten, und jeder Satz in der Art, an der ihm von Euklid mit Recht angewiesenen Stelle, nach der euklidischen Methode bewiesen werden. Diese Methode schließt es aber keineswegs aus, „daß man abkürzender Zeichen sich bediene“, wenn durch dieselben der Zusammenhang anschaulicher wird, und sie so gewählt werden, daß ihr Gebrauch kein Mißverständniß zuläßt. Hiernach werden in dem gegenwärtigen Werke folgende, größtentheils bereits allgemein gebräuchliche, Zeichen benutzt werden.

1) Das Zeichen der Gleichheit $=$

Daher bedeutet $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, die Größe **A** ist der Größe **B** gleich.

2) Das Zeichen des Größern und Kleinern $>$, wo die Oeffnung dem Größern und der Scheitel dem Kleinern zugekehrt ist.

Daher bedeutet $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, die **A** ist größer als **B**.

und $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, die **A** ist kleiner als **B**.

3) Die Zeichen der Gleichheit und des Größern und Kleinern vereint $\gtrless$; und es bedeutet hiernach $\mathbf{A} \gtrless \mathbf{B}$: die **A** ist entweder größer oder gleich, oder kleiner als **B**.

4) Das Zeichen der Summe $+$, und der Differenz $-$.

Daher bedeutet $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, so viel als „**A** und **B** zusammen“;

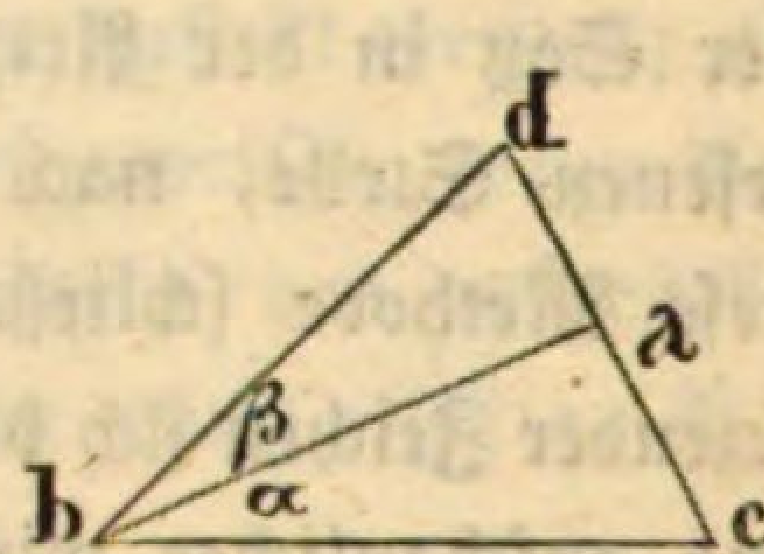
und $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ was bleibt, wenn **B** von „**A** hinweggenommen wird“.

5) Eine gerade Linie wird durch die beiden an den Endpunkten derselben angebrachten Buchstaben bezeichnet; und es ist hiernach **ab** die Linie, an deren Endpunkten die Buchstaben **a** und **b** stehen. Kann es ohne Zweideutigkeit geschehen, so wird die Linie

bloß durch einen in der Mitte derselben angebrachten Buchstaben bezeichnet.

6) Das Zeichen für einen Winkel ∟; und es wird diesem Zeichen der am Scheitel des Winkels stehende Buchstabe beigefügt, wenn nicht mehrere Winkel neben einander liegen. Daher ist ∟ a der Winkel, an dessen Scheitel der Buchstabe a steht. Liegen aber mehrere Winkel neben einander: so wird dem Zeichen entweder ein zwischen den Schenkeln angebrachter Buchstab beigefügt, oder er wird durch drei Buchstaben bezeichnet, von welchen der mittelste an dem Scheitel und die beiden andern an den Schenkeln des Winkels stehen. Hiernach ist ∟ abc der Winkel, an dessen Scheitel b und an dessen Schenkeln a und c stehen.

Daher ist ∟ c = ∟ bca = ∟ bcd
∟ α = ∟ abc
∟ β = ∟ dba
und ∟ cbd = ∟ α + ∟ β = ∟ ($\alpha + \beta$)



7) Das Zeichen für den rechten Winkel: R.

8) Die Abkürzung für parallel: prll.

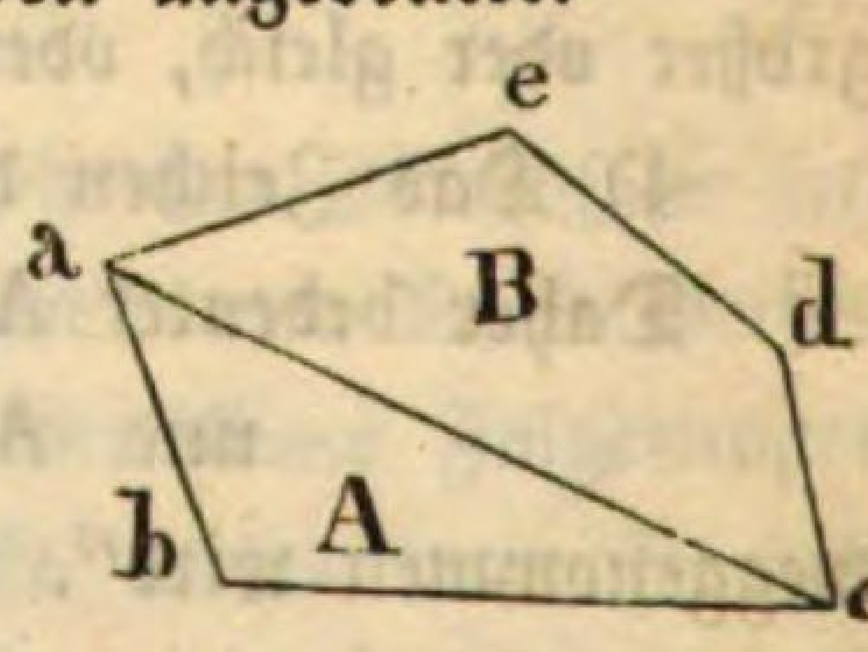
Daher bedeutet ab prll. cd „die Linie ab ist der Linie cd parallel“.

Das Parallelogram wird durch Prlgr. bezeichnet.

9) Das Zeichen für ein Dreieck △, wo zugleich die an den Spitzen desselben angebrachten Buchstaben beigesetzt werden; also ist △ abc das Dreieck, dessen Spitzen a, b und c sind.

10) Jede geradlinige Figur überhaupt wird durch die an allen Spitzen derselben angebrachten Buchstaben in der Ordnung, in welcher sie bei der Figur auf einander folgen, bezeichnet. Kann es ohne Zweideutigkeit geschehen, so wird dieselbe durch einen in dem Raume derselben angebrachten Buchstaben angedeutet.

Sonach ist z. B.
das △ abc = A,
das Viereck acde = B
und das Fünfeck abcde = A + B.



11) Das Zeichen für das Quadrat □, welchem das Zeichen der Linie beigesetzt ist, deren Quadrat darunter verstanden werden soll.

Daher bedeutet □ ab das Quadrat der geraden Linie ab,
und □ c „ „ „ „ „ c.

12) Das Zeichen für ein Rechteck $\times$, welches zwischen den Zeichen der Linien gesetzt wird, die das Rechteck einschließen.

Daher bedeutet AB $\times$ CD „das unter den geraden Linien AB und CD enthaltene Rechteck"; und

a $\times$ b das Rechteck, welches unter den Linien a und b enthalten ist.

13) Das Zeichen der Aehnlichkeit: $\sim$.

Daher bedeutet A $\sim$ B: die A ist der B ähnlich.

14) Das Zeichen der Congruenz: $\cong$.

Daher bedeutet A $\cong$ B: die A und B decken sich, oder sie sind ähnlich und gleich.

15) Das Zeichen des Verhältnisses zweier Größen A:B, und es bedeutet daher A:B = C : D; die A verhält sich zu B „wie die C zu D sich verhält".

16) Ist das Verhältniß zweier Größen aus zwei Verhältnissen zusammengesetzt, so werden die Verhältnisse, aus welchen es zusammengesetzt ist, unter einander gesetzt; so bedeutet

$$a : b = \left\{ \begin{matrix} c : d \\ \gamma : \delta \end{matrix} \right\}$$

„das Verhältniß von a : b ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen c : d und $\gamma : \delta$".

17) Sind die beiden Verhältnisse gleich, aus welchen ein anderes zusammengesetzt ist, so wird Dieses durch eine vorgesetzte 2 ausgedrückt. Hiernach ist

a : b = 2 (c : d) eben so viel als

$$a : b = \left\{ \begin{matrix} c : d \\ c : d \end{matrix} \right\}$$

und man sagt in diesem Falle: das Verhältniß a : b ist das Zweifache des Verhältnisses von c : d.

18) Eben so bedeutet a : b = 3 (c : d)

daß das Verhältniß von a : b das Dreifache ist von dem Verhältnisse c : d; oder es ist

$$a : b = \left\{ \begin{matrix} c : d \\ c : d \\ c : d \end{matrix} \right\}$$

Anmerkung. Wenn in der Folge auf irgend einen Satz zurückgewiesen werden soll, so geschieht dieses ganz einfach dadurch, daß die Zahl des

Satzes angeführt wird; und es wird derselben in dem Falle eine römische Zahl vorgesetzt, die das Buch angiebt, in welchem der Satz steht, wenn der angeführte Satz in einem andern Buche steht, als der, bei welchem er angeführt wird. So bedeutet z. B. (2.) den 2ten Satz des Buches, in welchem der Satz steht, bei welchem man auf jenen sich bezieht; und (I. 2.) bedeutet „den 2ten Satz des 1sten Buches." Eine Erklärung wird in's Besondere noch mit E., eine Forderung mit F. und ein Grundsatz mit G. bezeichnet. Daher ist (F. 3.) die 3te Forderung, (G. 9.) der 9te Grundsatz und (E. I. 10.) die 10te Erklärung des 1sten Buches.

(**p. h. per hypothesin**) heißt „vermöge der Voraussetzung", und wird also gebraucht: wenn man Etwas anführen will, das in dem Satze selbst enthalten ist. Ist z. B. von einem gleichschenkligen Dreieck **abc**, von welchem **ab** die Grundlinie seyn soll, die Rede, so ist

$$ca = cb \text{ (p. h.)}$$

(**p. c. per constructionem**) bedeutet „vermöge der Annahme oder vermöge der Construction", und wird gebraucht: wenn man Etwas benutzen will, was vorher als richtig angenommen worden ist. Heißt es z. B. „man verlängere von dem Dreieck **abc** die Seiten **ca** und **cb**, und mache die Verlängerungen $a\alpha$ und $b\beta$ gleich groß", so ist

$$a\alpha = b\beta \text{ (p. c.)}.$$

Das erste Buch der Elemente des Euklid.

Erklärungen.

1) Ein Punkt ist „was keine Theile hat".

2) Die Linie ist „eine Länge ohne Breite".

3) Wo eine Linie aufhört, sind Punkte.

4) Eine gerade Linie ist diejenige, welche zwischen allen in ihr befindlichen Punkten auf gleiche Weise liegt.

5) Eine Fläche ist, „was nur Länge und Breite hat".

6) Wo eine Fläche aufhört, sind Linien.

7) Eine Ebene (die ebene Fläche) ist diejenige, die zwischen allen in ihr befindlichen geraden Linien auf gleiche Weise liegt.

8) Ein ebener Winkel ist „die Neigung zweier Linien gegen einander, wenn dieselben in einer Ebene zusammen laufen, ohne in gerader Linie zu liegen".

9) Ein Winkel wird geradlinig genannt, wenn er von geraden Linien gebildet wird.

10) Wenn eine gerade Linie eine andere so trifft, daß die beiden dadurch entstehenden Nebenwinkel gleich sind: so sagt man, „sie ist normal auf der andern", und jeder der beiden gleichen Winkel heißt ein rechter Winkel.

11) Stumpf wird der Winkel genannt, „der größer als ein rechter ist".

12) Spitz ist der Winkel, „der kleiner ist als ein rechter".

13) Die Grenze eines Dinges ist da, wo es aufhört.

14) Eine Figur ist „ein von einer oder mehreren Grenzen eingeschlossener Raum".

15) Ein Kreis ist „eine ebene Figur, die von einer einzigen Linie (die der Umkreis, die Peripherie, heißt) so eingeschlossen

wird, daß alle gerade Linien, welche von einem bestimmten, innerhalb dieser Figur befindlichen Punkte an den Umkreis gezogen werden können, gleich groß sind".

16) Man nennt diesen Punkt des Kreises „Mittelpunkt".

17) Jede durch den Mittelpunkt des Kreises gezogene gerade Linie, welche auf beiden Seiten von dem Umkreise begrenzt wird, ist „ein Durchmesser". Der Kreis wird durch denselben in zwei gleiche Theile getheilt.

18) Die von dem Durchmesser und dem durch denselben abgeschnittenen Theil des Umkreises begrenzte Figur ist „ein Halbkreis".

19) Die von einem Theile des Kreisumfanges (von einem Kreisbogen) und einer geraden Linie (einer Sehne) begrenzte Figur ist „ein Kreisabschnitt".

20) „Geradlinige Figuren" sind diejenigen, welche von geraden Linien begrenzt werden. Und zwar wird

21) ein Dreieck von drei,

22) ein Viereck von vier, und

23) ein Vieleck (Polygon) von mehr als vier geraden Linien begrenzt.

24) Ein Dreieck heißt „gleichseitig", wenn es drei gleiche Seiten hat;

25) „gleichschenklig" aber wird es genannt, wenn nur zwei Seiten desselben gleich groß sind; und

26) „ungleichseitig", wenn keine Seite desselben einer andern gleich ist.

27) Ein Dreieck heißt ferner „rechtwinklig", wenn es einen rechten Winkel hat;

28) „stumpfwinklig", wenn es einen stumpfen Winkel hat; und

29) „spitzwinklig", wenn es drei spitze Winkel hat.

30) Unter den vierseitigen Figuren heißt diejenige „ein Quadrat", die gleichseitig und rechtwinklig ist;

31) „ein Rechteck (Oblongum)", die zwar rechtwinklig, aber nicht gleichseitig ist;

32) „ein Rhombus", die zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklig ist.

33) „Ein Rhomboid" ist ein Viereck, das weder gleichseitig noch rechtwinklig ist; in welchem aber die einander gegenüber liegenden Seiten, und eben so auch die einander gegenüber liegenden Winkel gleich groß sind.

34) Jede andere vierseitige Figur heißt „ein Trapez".

35) „Parallel" sind gerade Linien, die in einer Ebene liegen, und auf keiner der beiden Seiten zusammen treffen, so weit man sie auch verlängern mag.

Anmerkungen. Der Raum hat eine Ausdehnung nach drei verschiedenen Richtungen, die man gewöhnlich durch „Länge, Breite und Höhe oder Tiefe" unterscheidet, ohne daß hierbei vollkommen genau bestimmt ist: „welche dieser Richtungen die Länge, Breite oder Höhe ist", wenn gleich für den gemeinen Sprachgebrauch ein Unterschied zwischen diesen drei Benennungen feststeht. „Das Gemeinschaftliche der Länge, Breite und Höhe" nennt man eine einfache Dimension des Raumes; und daher kann man sagen, „der Raum hat Ausdehnung nach drei verschiedenen Dimensionen."

„Die Linie" ist eine einfache Dimension des Raumes; also nicht nur eine Länge ohne Breite, sondern auch eine Breite ohne Länge ꝛc. Man hat es mit einer Linie zu thun, so oft bloß eine einfache Dimension des Raumes, mit Ausschließung der beiden anderen, berücksichtigt werden soll. Wenn man die Länge eines Weges kennen lernen will, so bekümmert man sich weder um die Breite, noch um die Höhe desselben; soll die Breite eines Grabens bestimmt werden, so bleibt die Länge und Tiefe desselben unbeachtet; und wenn man die Höhe eines Thurmes ausmessen will, so fragt man nicht nach Länge und Breite desselben.

„Die Fläche" ist „was zwei Dimensionen hat", und man hat es daher immer mit einer Fläche zu thun, wenn zwei Dimensionen des Raumes, mit Ausschließung der dritten, berücksichtiget werden. Wenn die Größe eines Grundstückes bestimmt werden soll, so wird auf die Tiefe desselben keine Rücksicht genommen; und wenn man die Fläche einer Wand ausmessen will, so bekümmert man sich nicht um die Stärke derselben.

Da, wo ein Gegenstand aufhört, ist „seine Grenze"; und es ist die Grenze nicht ein Theil des Begrenzten und auch nicht des Angrenzenden. Eine Fläche muß daher nothwendig von Linien begrenzt werden; diese Grenze kann nur eine einzige Dimension haben, weil sie sonst entweder ein Theil der Fläche, oder eine Angrenzende seyn würde. Aus eben diesem Grunde kann die Grenze der Linie gar keine Dimension haben. Die Linie wird von Punkten begrenzt.

„Gerade" ist ein einfacher Begriff; und daher müssen alle Erklärungen „der geraden Linie" mißlingen. Derjenige, der nicht bereits eine deutliche Vorstellung „von einer geraden Linie" hat, wird durch keine Erklärung derselben eine solche erlangen. Wenn aber die richtige „Vorstellung der geraden Linie" vorausgeht, so wird man in jeder der mannichfachen Erklärungen, welche von derselben gewöhnlich gegeben werden, sie wieder erkennen; und man muß daher alle Erklärungen als Erläuterungen ansehen, von welchen diejenige die beste ist, aus welcher unmittelbar weitere Folgerungen über das Wesen der geraden Linie sich ableiten lassen. Dieses nun ist bei der obigen Erklärung Nr. 4. der Fall; aus derselben folgt unmittelbar, „daß eine gerade Linie durch zwei der Lage nach ge-

gebene Punkte, ihrer Lage nach, vollkommen bestimmt ist; und daß daher zwei zusammentreffende, aber nicht zusammenfallende gerade Linien sich nur in einem einzigen Punkte schneiden können."

„Der ebene Winkel" ist (E. 8.) „die Neigung zweier Linien gegen einander, wenn dieselben in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen". Diese Erklärung scheint insofern nicht genau, inwiefern man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch eine Linie nur dann als geneigt gegen die andere ansieht, wenn sie mit ihr einen spitzen Winkel bildet. „Daß aber, bei der Erklärung des ebenen Winkels, der Begriff Neigung nicht in dieser beschränkten Bedeutung genommen werden soll, sondern überhaupt hierunter jede Lage der zusammentreffenden Linien verstanden wird", ergiebt sich unmittelbar aus dem Zusatze, nach welchem nur die Lage ausgenommen ist, wo die zusammentreffenden in gerader Linie liegen. Die den Winkel bildenden Linien nennt man „seine Schenkel"; und der Punkt, in welchem sie zusammentreffen, ist „der Scheitel desselben". Haben zwei Winkel den einen Schenkel gemein, und fallen ihre Scheitel zusammen: so ist der Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel innerhalb des Raumes von dem anderen Winkel liegt. Die Größe eines Winkels ist daher durch die Lage der Schenkel gegen einander bestimmt und ganz unabhängig von der Länge derselben.

In Beziehung auf den Kreis ist zu bemerken: daß hierunter eigentlich die Kreisfläche verstanden wird, obgleich diese Benennung mitunter auch statt Kreisumfang gebraucht wird. „Die gerade Linie, welche irgend einen Punkt des Kreisumfanges mit dem Mittelpunkte desselben verbindet", wird „der Radius oder Halbmesser des Kreises" genannt, der halb so groß als der Durchmesser desselben ist. Alle Halbmesser eines Kreises, und also auch alle Durchmesser, sind gleich groß.

„Jedes Viereck, welches von zwei Paar parallelen Seiten eingeschlossen wird", nennt man „ein Parallelogram"; und wenn in einem Viereck ein Paar Seiten parallel sind, das andere Paar aber nicht, so nennt man dasselbe „einen Paralleltrapez".

Forderungen.

Es wird verlangt, daß man zugestehe:

1) es kann von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie gezogen werden;

2) jede begrenzte gerade Linie kann stetig in gerader Richtung verlängert werden; und

3) man kann um jeden Punkt, als Mittelpunkt, in jedem Abstande einen Kreis beschreiben.

Anmerkung. Weder aus der Erklärung der geraden Linie (E. 4.) geht hervor, „wie eine gerade Linie gezogen oder verlängert werden kann"; noch aus der Erklärung des Kreises (E. 15.), „auf welche Weise derselbe sich beschreiben läßt". Auch wird in der ganzen Geometrie nicht gelehrt,

„wie diese Operationen sich ausführen lassen", während man die Möglichkeit dieser Ausführung stets voraussetzt; und hierzu ist man nur berechtigt, insofern die obigen drei Forderungen zugestanden werden. Daß durch diese Postulate nichts weiter ausgesagt wird, als „man verlangt, daß der unbedingte Gebrauch des Lineals zugestanden werde, und der des Zirkels, insofern die Lage des Mittelpunktes des zu beschreibenden Kreises und der Abstand des Umfanges von dem Mittelpunkte gegeben sind", ist bereits in der Einleitung §. 6. bemerkt worden.

Grundsätze.

1) „Was Einem und Demselben gleich ist", ist selbst gleich.

2) „Gleiches zu Gleichem hinzugethan" giebt Gleiches.

3) „Gleiches von Gleichem hinweggenommen" bleibt Gleiches.

4) „Gleiches zu Ungleichem hinzugethan" giebt Ungleiches.

5) „Gleiches von Ungleichem hinweggenommen" bleibt Ungleiches.

6) „Gleiches verdoppelt" giebt Gleiches.

7) „Gleiches halbirt" giebt Gleiches.

8) „Was sich deckt" ist gleich.

9) „Das Ganze" ist größer als ein Theil desselben.

10) Alle „rechten Winkel" sind gleich groß.

11) Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß die beiden, auf derselben Seite liegenden innern Winkel zusammen genommen kleiner als zwei rechte sind: so treffen diese Linien, wenn sie genugsam verlängert werden, an eben dieser Seite zusammen.

12) Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Erläuterungen. Es ist bereits in der Einleitung §. 7. bemerkt worden: daß die Grundsätze der Geometrie keines Beweises bedürfen; daß sie aber eines solchen fähig sind, insofern sich zeigen läßt, „wie sie als unmittelbare Folgen der denselben zum Grunde liegenden Begriffe sich ergeben, oder wie einer dieser Sätze von den anderen abhängt". Auf diese Art ist beispielsweise bereits in der Einleitung die Richtigkeit des ersten und des zweiten Grundsatzes nachgewiesen; und es gilt für den dritten Dasselbe, was für den zweiten Gültigkeit hat.

Ist nun $A + B = A + C$,

so muß nach (G. 3.) auch $B = C$ seyn;

und hieraus folgt unmittelbar, daß, wenn B nicht gleich C ist, auch $A + B$ nicht $A + C$ gleich seyn kann; und Dieses ist der vierte Grundsatz.

Ist ferner $B - A = C - A$,
so ist auch nach (G. 3.) $B = C$;
wenn also nicht $B = C$ ist, kann auch $B - A$ nicht $C - A$ gleich seyn; welches den fünften Grundsatz giebt.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } A = B \\ \text{also } A = B \\ \hline \text{so folgt nach (G. 2.) } A + A = B + B \\ \hline \text{also } 2A = 2B; \end{array}$$

Dieses ist der sechste Grundsatz: „Gleiches verdoppelt" giebt Gleiches.

Daß auch „Gleiches halbirt" Gleiches geben muß, läßt sich nun auf folgende Art nachweisen: Es sey $A = B$, aber nicht $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$, so kann man setzen $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B + x$

$$\begin{array}{l} \text{und daher nach (G. 6.) } 2 \cdot \frac{1}{2} A = 2 (\frac{1}{2} B + x) \\ \hline \text{also } A = B + 2x \\ \text{aber auch } A = B; \end{array}$$

folglich nach (G. 1.) $B = B + 2x$;
was nicht seyn kann. Daher ist die Annahme „$\frac{1}{2} A$ ungleich $\frac{1}{2} B$" falsch, sobald $A = B$ ist. Wenn also $A = B$, so ist auch $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$.

Der achte Grundsatz ist eine unmittelbare Folge des Begriffes „decken". „Dinge decken sich" heißt: sie können so in einander gelegt werden, daß sie ganz zusammen fallen, so daß kein Theil des einen vor irgend einem Theile des andern hervorragt; und hieraus folgt unmittelbar, „daß sie gleich seyn müssen". Das Decken setzt aber nicht bloß Gleichheit der Größe nach von den Dingen voraus, die sich decken sollen, sondern auch eine Gleichheit ihrer Form; und daher läßt sich dieser Satz nicht umkehren; aus der Voraussetzung „zwei Dinge sind gleich" folgt also nicht „daß sie sich decken".

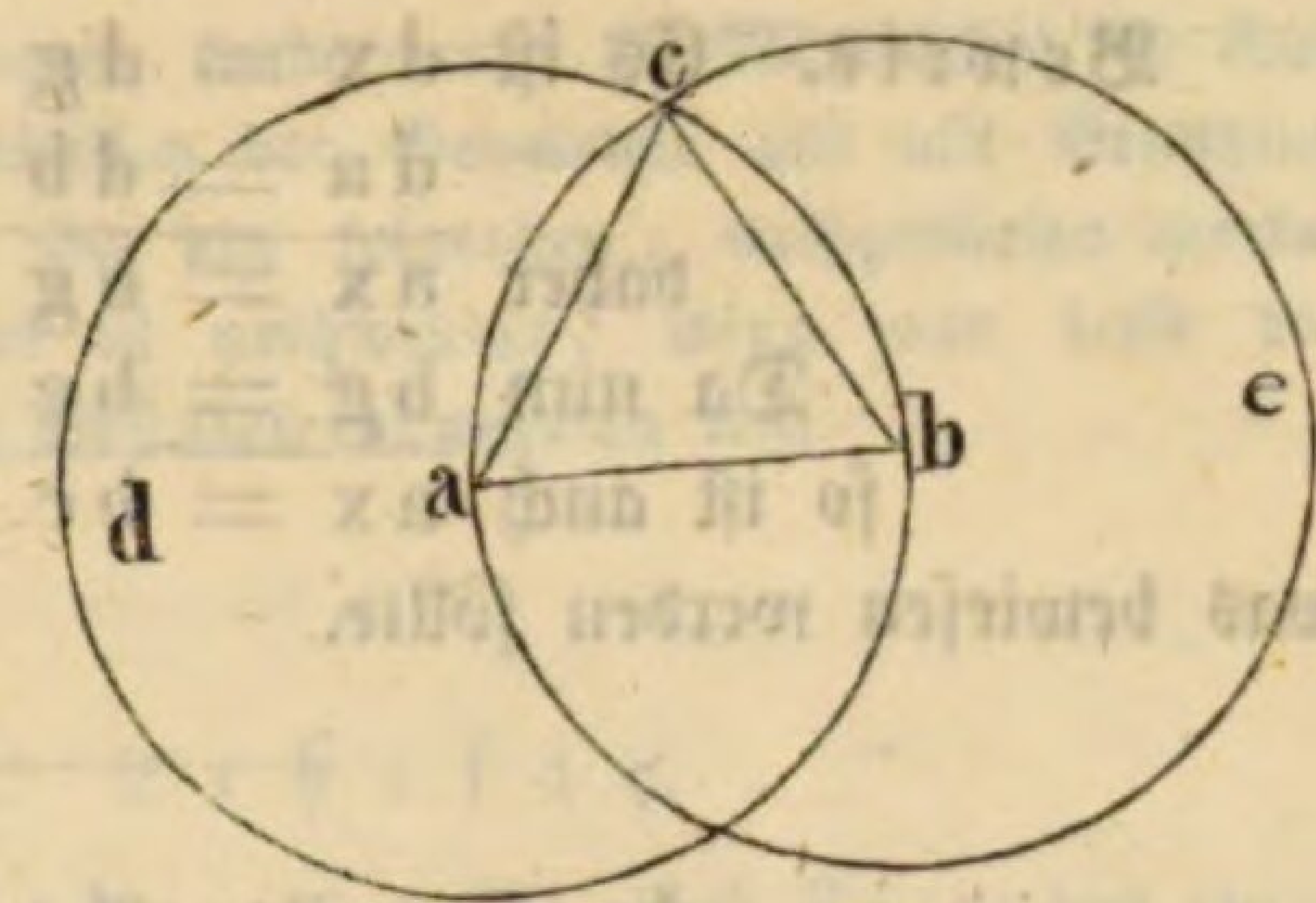
Der zehnte Grundsatz folgt unmittelbar hieraus; denn hat man zwei Paar Nebenwinkel, von welchen jedes Paar unter sich gleich sind: so ist jeder dieser Winkel ein rechter, und es deckt nun, wenn sie in einander gelegt werden, der eine Winkel des ersten Paares den einen Winkel des andern.

Eben so folgt der zwölfte Grundsatz aus der Erklärung „der geraden Linie" (E. 4.); und es geht aus dieser Erklärung hervor, wie auch bereits bemerkt worden ist, „daß zwei gerade Linien, die ihre Endpunkte gemein haben, sich decken".

Nähere Erläuterungen zu dem eilften Grundsatze findet man in der „Anmerkung zu dem Satze 1., 17" und in „der vierten Beilage zu dem ersten Buche".

I. Satz 1. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie ab soll ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden.



Auflösung. 1) Man beschreibe aus a mit dem Halbmesser ab den Kreis bcd (F. 3.)

2) Eben so beschreibe man aus b mit dem Halbmesser ba den Kreis ace (F. 3.)

3) Einen Durchschnittspunkt c der beiden beschriebenen Kreise verbinde man mit a und mit b, durch die Geraden ca und cb (F. 1.)

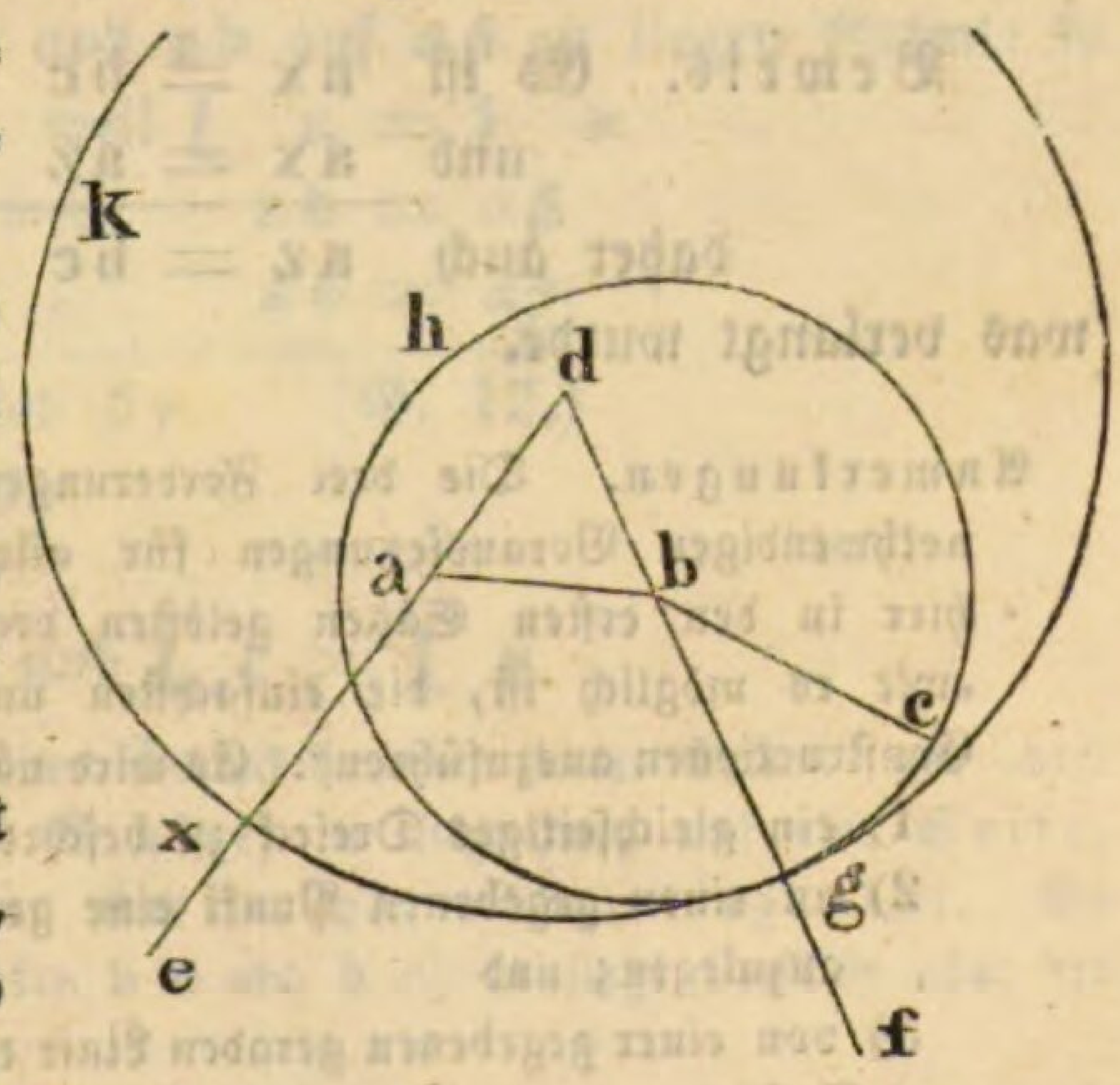
abc ist jetzt das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist ab = ac (E. 15.)
und ba = ab = bc „

daher auch ac = bc (G. 1.)
und sonach ab = ac = bc; also ist nach (E. 24.) das Dreieck abc gleichseitig.

I. Satz 2. Aufgabe.

Eine begrenzte gerade Linie bc ist gegeben; man soll an den gegebenen Punkt a eine der bc gleiche gerade Linie legen.



Auflösung. 1) Verbinde a mit b durch die Gerade ab (F. 1.)

2) Beschreibe über ab das gleichseitige Deieck abd (1.)

3) Verlängere die db nach f, und die da nach e (F. 2.)

4) Beschreibe aus b mit bc den Kreis cgh (F. 3.), welcher die verlängerte db in g schneidet.

5) Aus d beschreibe man nun mit dg einen Kreis gxk (F. 3.), der die verlängerte da in x schneidet: so ist

ax = bc die an a zu legende Linie.

Beweis. Es ist $dx = dg$ (E. 15.)
$da = db$ (E. 24.)
daher $ax = bg$ (G. 3.)
Da nun $bg = bc$ (E. 15.)
so ist auch $ax = bc$ (G. 1.)
was bewiesen werden sollte.

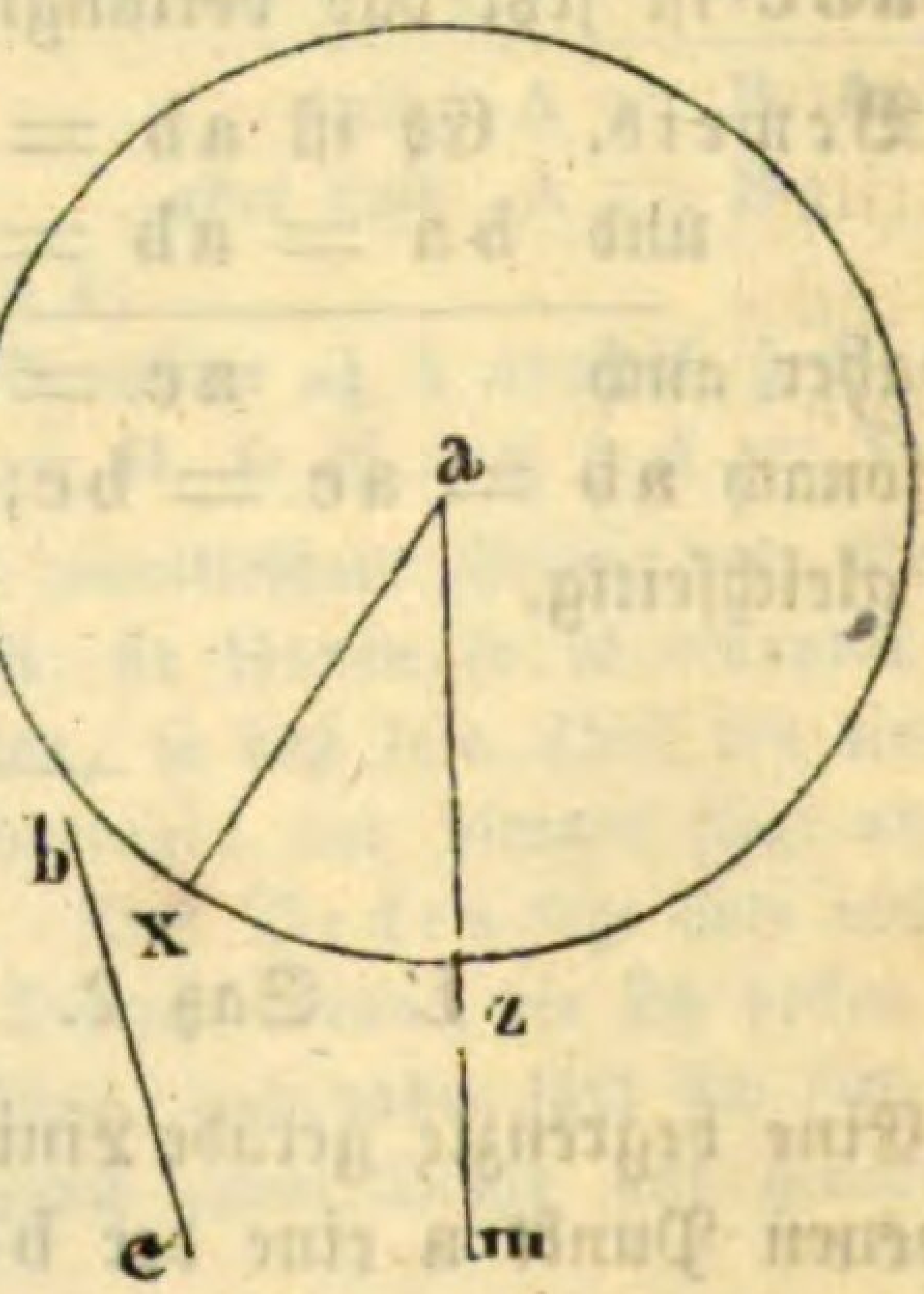
I. Satz 3. **Aufgabe.**

Es sind zwei ungleiche gerade Linien am und bc gegeben; man soll von der größern am eine, der kleinern bc gleiche Linie abschneiden.

Auflösung. 1) Lege an a eine der bc gleiche Linie ax (2.)

2) Beschreibe aus a mit ax einen Kreis (F. 3.) der die am in z schneiden wird:

so ist az das abzuschneidende Stück.



Beweis. Es ist $ax = bc$ (p. c.)
und $ax = az$ (E. 15.)
daher auch $az = bc$ (G. 1.)
was verlangt wurde.

Anmerkungen. Die drei Forderungen der Geometrie enthalten die nothwendigen Voraussetzungen für alle Constructionen; und durch die hier in den ersten Sätzen gelösten drei Aufgaben wird nachgewiesen, „wie es möglich ist, die einfachsten und am häufigsten vorkommenden Constructionen auszuführen". Es wird nämlich gezeigt, wie es möglich ist:

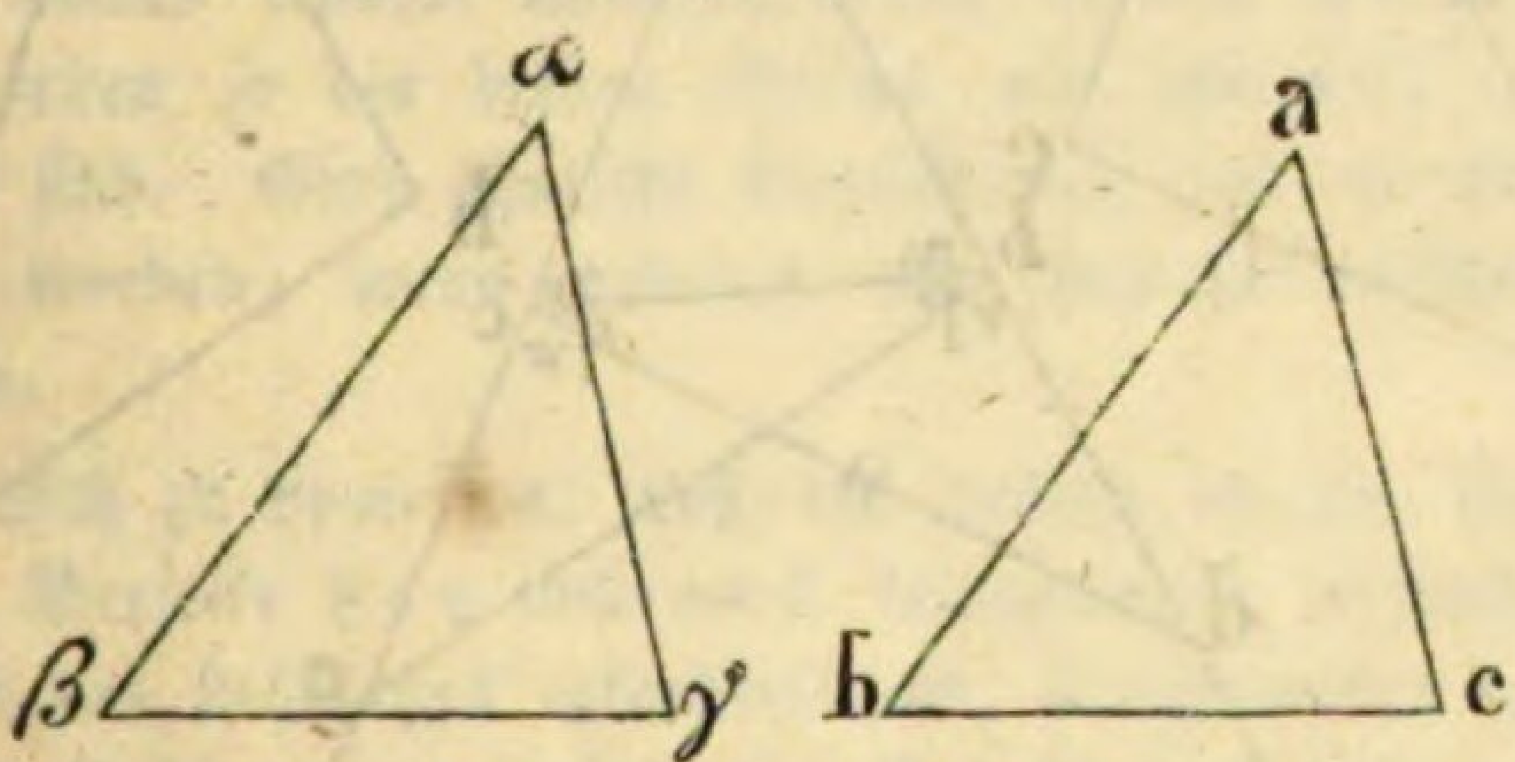
1) ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben;
2) an einen gegebenen Punkt eine gerade Linie von gegebener Länge anzulegen; und
3) von einer gegebenen geraden Linie ein gegebenes Stück abzuschneiden.

Daß man, wenn diese Constructionen vorkommen, sie mit Hülfe des Zirkels auf eine weit einfachere Weise ausführt, als es nach den hier gegebenen Auflösungen geschehen kann, darf nicht in Betracht kommen; weil durch die hier gegebene Auflösung der Aufgaben nicht das praktisch

anzuwendende Verfahren erläutert, sondern nur die Möglichkeit der Ausführung, mit Hülfe der Prämissen der Geometrie und mit Benutzung der vorhergehenden Aufgaben bei den folgenden, nachgewiesen werden soll. Diese Nachweisung aber ist nothwendig, wenn man diese drei Constructionen nicht selbst als Postulate annehmen will.

I. Satz 4. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken abc und $\alpha\beta\gamma$ zwei Seiten des einen ab und ac zweien Seiten des andern $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ jede für sich gleich sind (nämlich die erste ab der ersten $\alpha\beta$, und die andere ac der andern $\alpha\gamma$), und es sind auch die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich (also $\llcorner$ a = $\llcorner$ α), so ist auch die dritte Seite bc der dritten Seite $\beta\gamma$ gleich; beide Dreiecke decken sich, und es sind auch die, den gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel von gleicher Größe.



Beweis. Man denke sich das Dreieck abc auf Δ $\alpha\beta\gamma$ so gelegt, daß $\llcorner$ a auf $\llcorner$ α und ab auf $\alpha\beta$ zu liegen kömmt: so fällt ac mit $\alpha\gamma$ zusammen, weil $\llcorner$ a = $\llcorner$ α

b liegt auf β weil ab = $\alpha\beta$

und c „ „ γ „ ac = $\alpha\gamma$

---

daher decken sich die bc und $\beta\gamma$ (G. 12.)

und es ist folglich bc = $\beta\gamma$

und Δ abc $\cong$ Δ $\alpha\beta\gamma$.

Folglich ist $\llcorner$ b = $\llcorner$ β und $\llcorner$ c = $\llcorner$ γ.

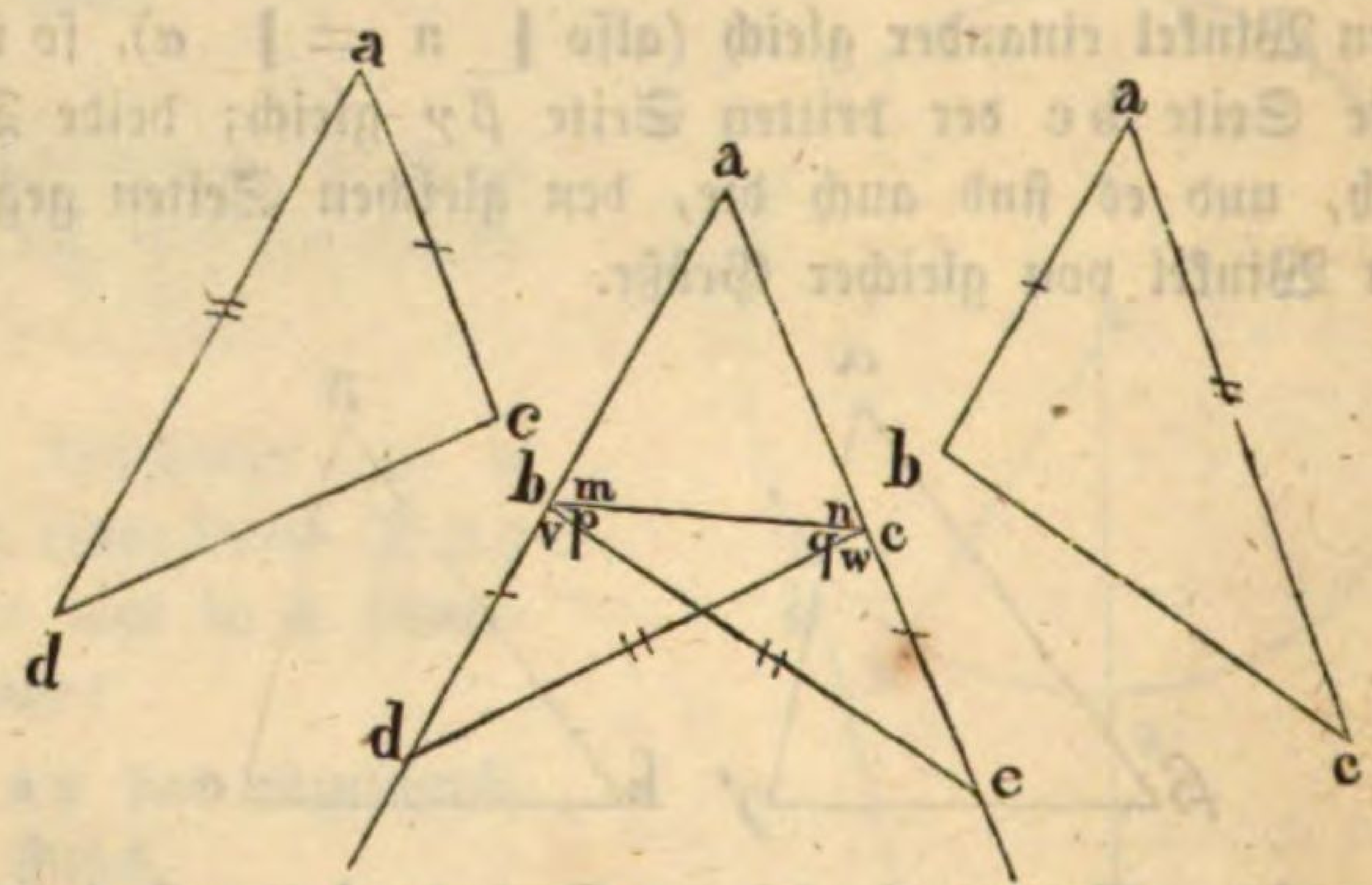
Anmerkung. Bei einem jeden Dreieck kommen „drei Seiten" und „drei Winkel" vor; und es ist ein Winkel, in Beziehung auf eine Seite, entweder ein anliegender oder ein gegenüber liegender. So ist $\llcorner$ b anliegend den Seiten b a und b c; es liegt derselbe aber der Seite a c gegenüber.

Der erste Gegenstand der Geometrie ist: auszumitteln, „unter welchen Bedingungen zwei Dreiecke sich decken". Der vierte Satz nun giebt die erste Bedingung an, unter welcher Dieses der Fall ist. Zwei Dreiecke decken sich gegenseitig: wenn sie einen gleichen Winkel haben,

und die diesen Winkel einschließenden Seiten gleich groß sind, also die eine Seite der einen und die andere der anderen gleich ist.

I. Satz 5. Lehrsatz.

In jedem gleichschenkligen Dreieck **abc** sind die Winkel an der Grundlinie **m** und **n** einander gleich; und es sind auch, wenn man die Schenkel **ab** und **ac** verlängert, die Winkel unter der Grundlinie **cbd** und **bce** (oder, was dasselbe ist, **p + v** und **q + w**) von gleicher Größe.



Beweis. Man verlängere **ab** und **ac** (F. 2.), nehme in der Verlängerung von **ab** beliebig einen Punkt **d**, mache **ae = ad** (3.) und ziehe die Linien **be** und **cd** (F. 1.), so ist

ab = ac (p. h.)
ae = ad (p. c.)
und ∟ a = ∟ a.

Folglich ist △ bae ≌ △ cad (4.)
und daher ist auch ∟ abe = ∟ acd
oder es ist m + p = n + q . . . A.

Da die Dreiecke **bae** und **cad** sich decken, so ist auch

be = cd
und ∟ e = ∟ d.
Da nun auch ce = bd (G. 3.)

---

so ist △ bec ≌ △ cdb (4.)
und folglich ist ∟ p = ∟ q . . . B.

Es ist also nach A ... $m + p = n + q$
und nach B $p = q$

folglich ist auch $\angle m = \angle n$ (G. 3.)

Es sind also wirklich die Winkel an der Grundlinie einander gleich, was das Erste war.

Weil aber die beiden Dreiecke **bec** und **cdb** sich decken, so ist auch

$$\angle (q + w) = p + v)$$

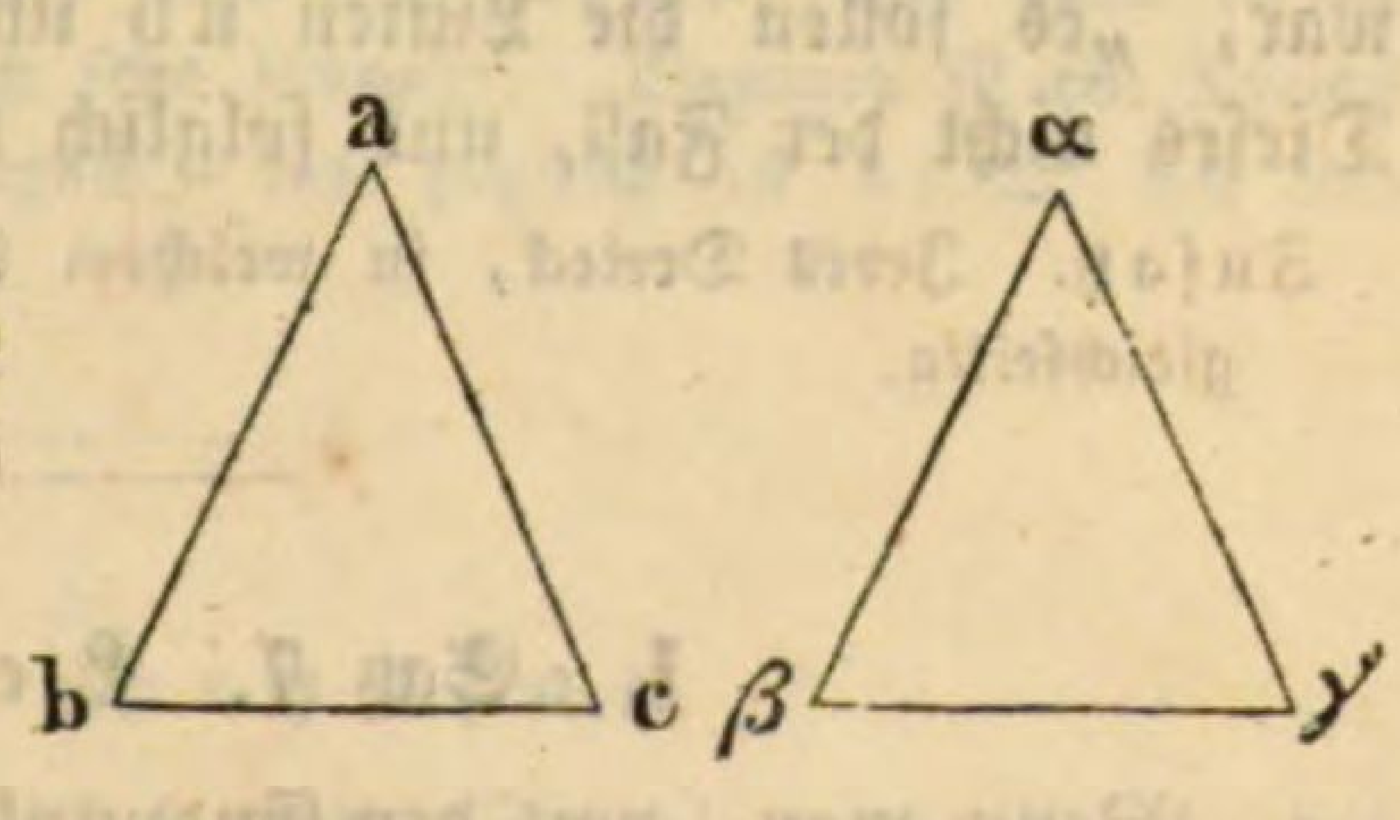
und es sind sonach auch die Winkel unter der Grundlinie von gleicher Größe; und Dieses war das Zweite.

Anmerkungen. Zur leichteren Uebersicht des Beweises sind die beiden Dreiecke **bae** und **cad** besonders angegeben; und es sind die Stücke, aus welchen die Congruenz derselben folgt, durch besondere Zeichen bemerkbar gemacht. Auf gleiche Weise sind auch die gleichen Stücke der beiden Dreiecke **bec** und **cdb** in der Figur besonders bezeichnet; nämlich es sind die beiden einmal durchstrichenen Seiten **ce** und **bd** einander gleich; und eben so die beiden Seiten **eb** und **dc**, welche zwei Mal durchstrichen sind. Eine ähnliche Bezeichnung soll in der Folge immer angewendet werden, wenn dadurch der Beweis anschaulicher gemacht werden kann.

Es ist noch zu bemerken: daß die beiden in der Figur abgesondert angegebenen Dreiecke **bae** und **cad** keinesweges wesentlich zu der, bei dem Beweise des Lehrsatzes erforderlichen, Construction gehören, sondern hier bloß zur Erläuterung dastehen. Sobald diese besonders angegebenen Dreiecke wirklich zur Construction gehörten, würde dadurch der Beweis unvollständig seyn; weil bisher das Verfahren noch nicht angegeben ist, „durch welches ein gegebenes Dreieck sich abzeichnen läßt".

Aus eben diesem Grunde ist auch der folgende, von Mehreren angegebene Beweis des Satzes, „daß in einem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich groß sind", unrichtig:

Man zeichne ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welches dem gleichschenklichen Dreieck **abc** congruent ist, so decken sich diese Dreiecke;



1) weil $ab = \alpha\beta$
$ac = \alpha\gamma$
und $\angle a = \angle \alpha$

Daher ist $\angle b = \angle \beta$

und 2) weil $ab = \alpha\gamma$
$ac = \alpha\beta$
und $\angle a = \angle \alpha$

$\angle c = \angle \beta$ -

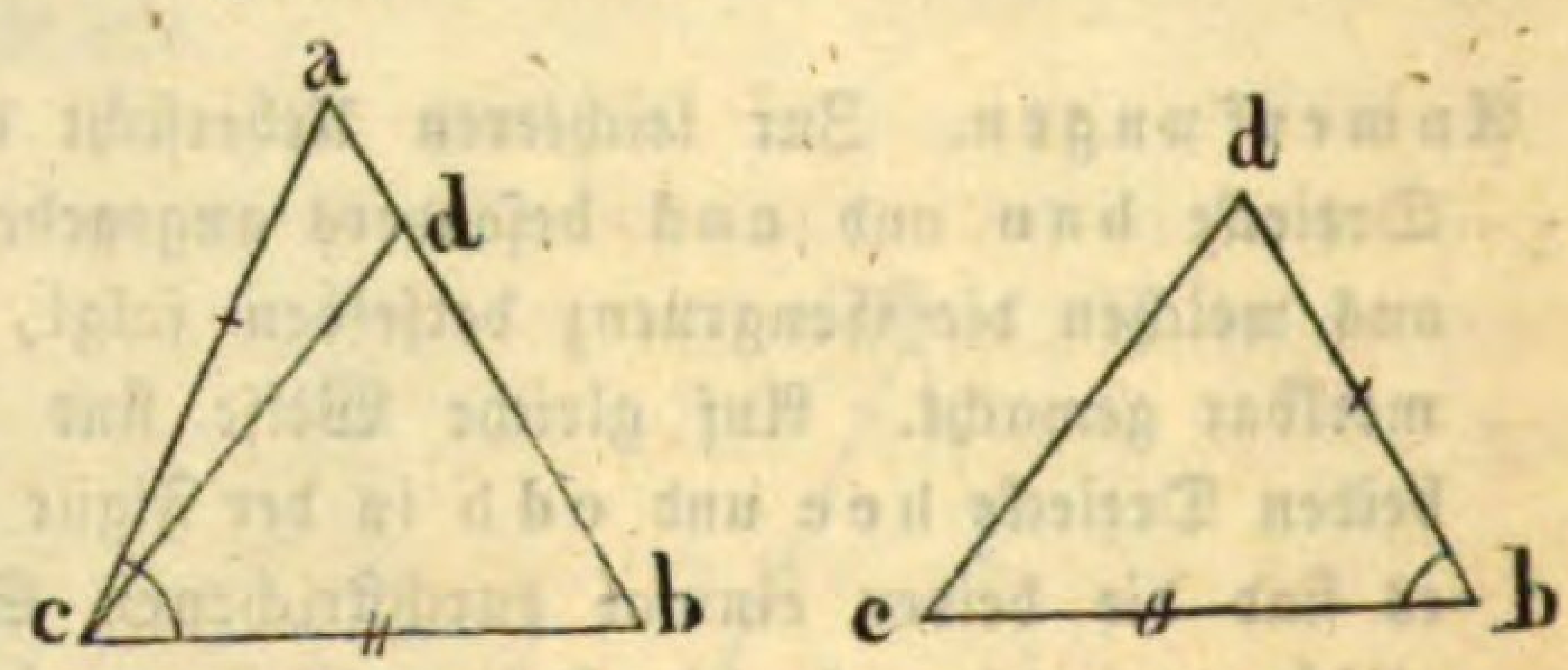
Da sonach $\angle b = \angle \beta$
und auch $\angle c = \angle \beta$

so ist $\angle b = \angle c.$ (G. 1.)

Zusatz. Jedes gleichseitige Dreieck hat drei gleiche Winkel.

I. Satz 6. Lehrsatz.

Wenn ein Dreieck zwei gleiche Winkel hat (wenn also $\angle$ **abc** $= \angle$ **acb** ist): so sind auch die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten **ac** und **ab** von gleicher Größe.



Beweis. Sind die beiden Linien ac und ab ungleich, so muß eine von beiden die größere seyn; und nimmt man an, „es sey **ab** die größere", so kann auf derselben ein Stück **bd** = **ca** abgeschnitten werden (3.) Man ziehe **dc**, so ist nun

$$db = ac \qquad \text{(p. c.)}$$
$$\angle dbc = \angle acb \qquad \text{(p. h.)}$$
$$bc = cb$$

also $\Delta\, dbc \cong \Delta\, acb$ (4.)
und daher auch $\angle dcb = \angle abc$.
Und weil $\angle abc = \angle acb$ (p. h.)

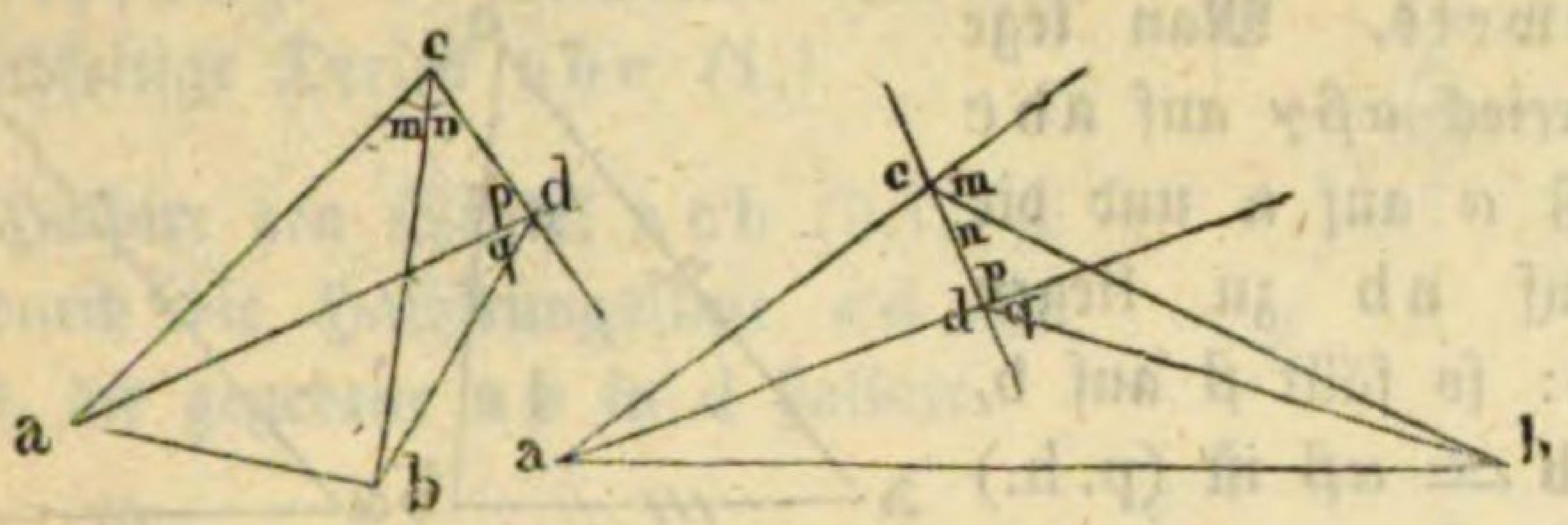
so folgt $\angle dcb = \angle acb$ (G. 1.)

was nicht möglich, ist nach (G. 9.) Es ist also die Voraussetzung falsch, aus der diese Folgerung sich ergiebt. Diese Voraussetzung war, „es sollen die Linien **ab** und **ac** ungleich seyn"; also ist Dieses nicht der Fall, und folglich sind sie gleich groß.

Zusatz. Jedes Dreieck, in welchem die drei Winkel gleich groß sind, ist gleichseitig.

I. Satz 7. Lehrsatz.

Wenn man „von den Endpunkten **a** und **b** der geraden Linie **ab**, an irgend einen Punkt **c** die Geraden **ac** und **bc** zieht": so ist es nicht möglich, „auf derselben Seite von **ab** einen Punkt **d** von der Lage anzugeben, daß, wenn man **ad** und **bd** zieht, zu gleicher Zeit sey **ad** = **ac**, und auch **bd** = **bc**".



Beweis. Es liege der Punkt d außerhalb oder innerhalb der Fläche des Dreiecks abc, so kann man in beiden Fällen c mit d durch eine Gerade cd verbinden. Ist nun ac = ad, so folgt

$$\angle(m + n) = \angle p \qquad (5.)$$

$$\text{also} \quad \angle n < \angle p \qquad (\text{G. } 9.)$$

und daher um so mehr $\angle n < \angle(p + q)$.

Nun sind $\angle n$ und $\angle(p + q)$ Winkel an der Grundlinie cd des Dreiecks bcd; folglich kann dieses Dreieck für die Grundlinie cd nicht gleichschenkelig seyn. Daher sind, wenn ad = ac, die Linien bd und bc nothwendigerweise ungleich.

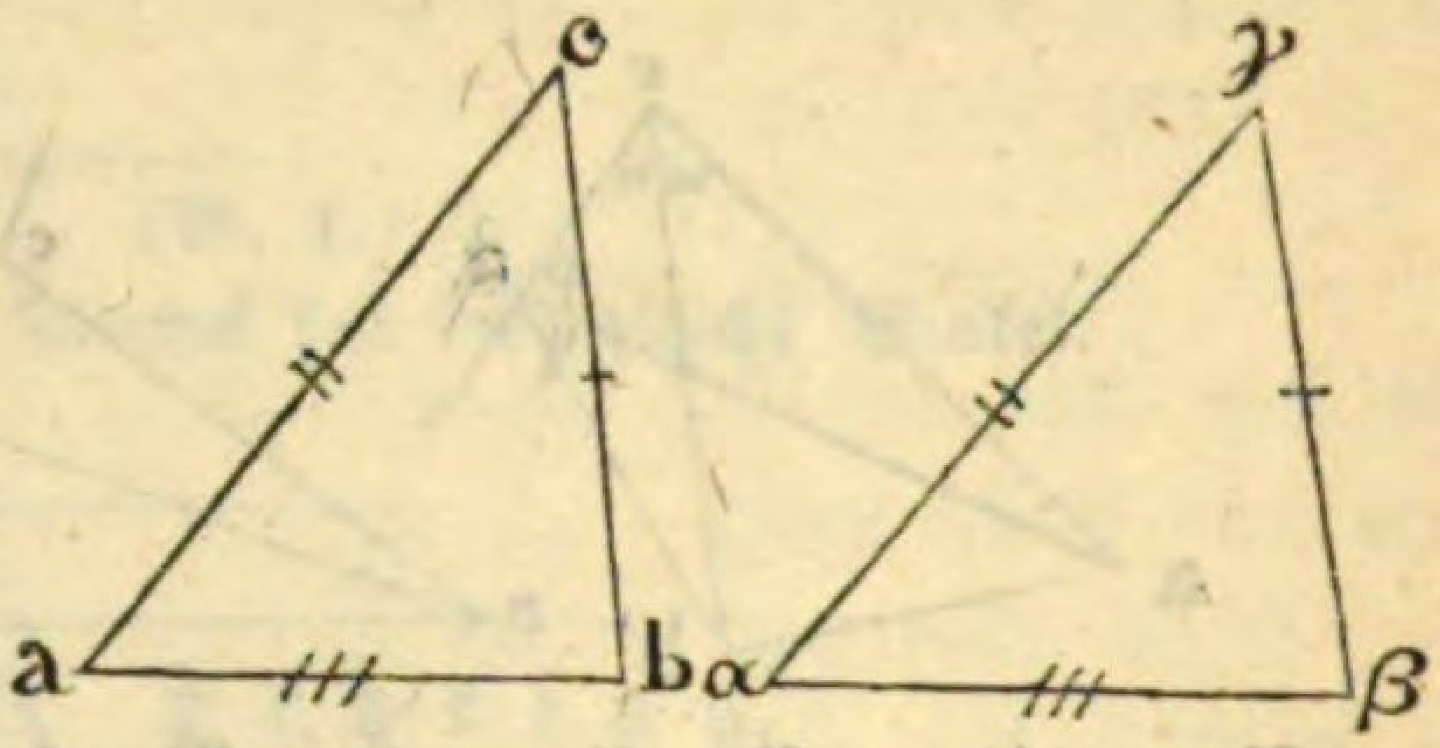
Anmerkung. Dieser Lehrsatz läßt sich auch auf folgende Art ausdrücken: Wenn zwei Dreiecke abc und abd, die auf derselben Seite von ab liegen, die Grundlinie ab gemein haben, und es sind die Seiten links ac und ad von gleicher Größe, so können die Seiten rechts bc und bd einander nicht gleich seyn.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist sowohl für den Fall bewiesen, wenn d außerhalb des Dreiecks abc, als auch, wenn er innerhalb der Fläche von $\triangle$ abc liegt; „daß aber auch in dem dritten, hier noch möglichen Falle, wenn d in der Linie bc liegt, der Satz richtig ist", versteht sich von selbst.

Wesentlich gehört zu diesem Lehrsatze, „daß die beiden Dreiecke abc und abd auf einer und derselben Seite von ab liegen, und daß nun nicht zu gleicher Zeit die Seiten links ac und ad, und eben so die Seiten rechts bc und bd gleich seyn können". Dagegen ist ein Dreieck abd von der Art wohl möglich, daß zugleich ist ac = bd und bc = ad.

I. Satz 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken abc und $\alpha\beta\gamma$ die drei Seiten des Einen einzeln genommen, den drei Seiten des Andern gleich sind (nämlich bc = $\beta\gamma$; ac = $\alpha\gamma$ und ab = $\alpha\beta$): so sind auch die von gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken gleich groß.

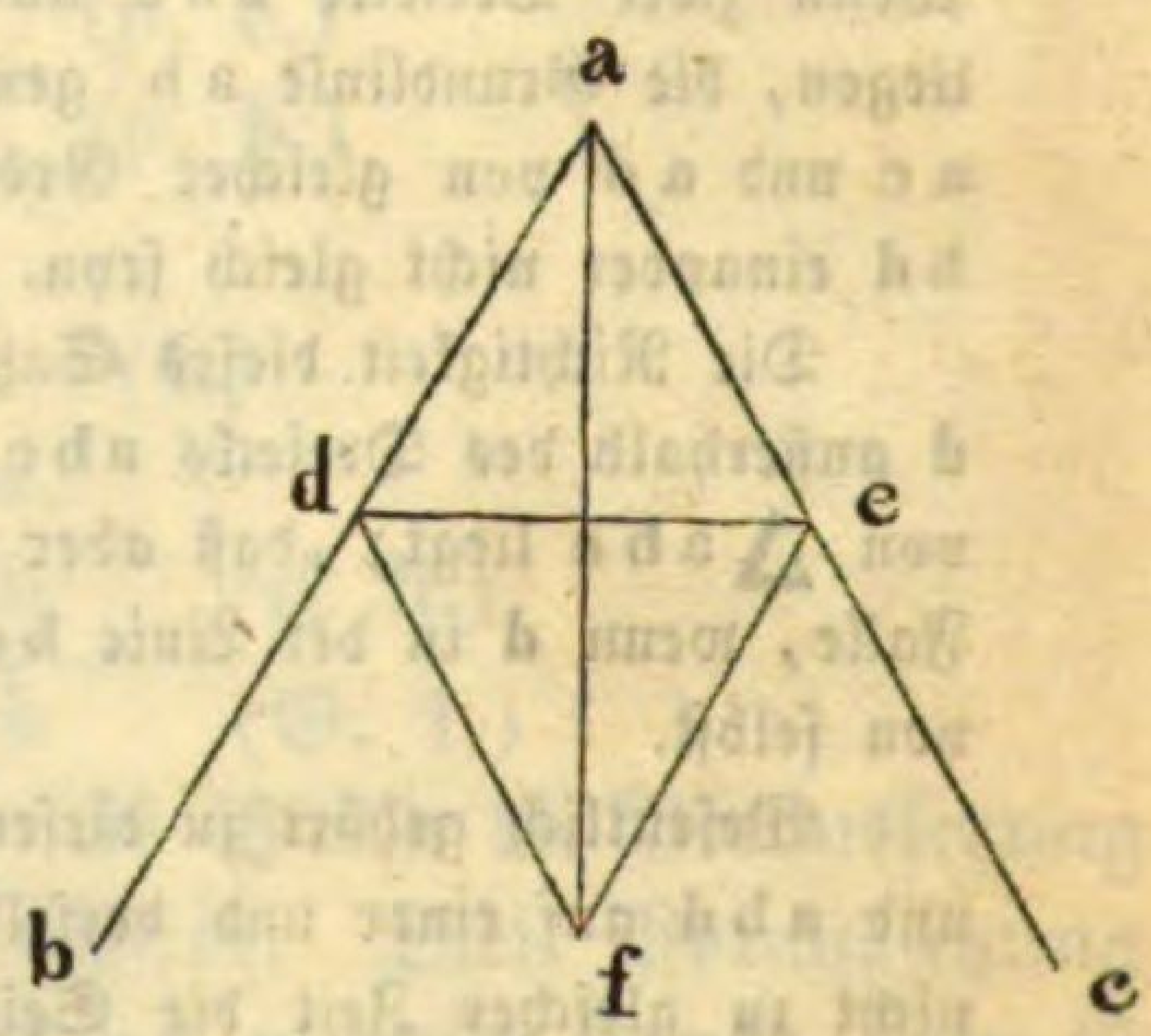


Beweis. Man lege das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ auf abc (so daß α auf a und die $\alpha\beta$ auf ab zu liegen kömmt): so fällt β auf b, weil ab $= \alpha\beta$ ist (p. h.) Nun ist $\alpha\gamma =$ ac, und zugleich auch $\beta\gamma =$ bc; folglich können die Spitzen c und γ nicht außer einander liegen (7.). Also fällt γ auf c, und sonach $\alpha\gamma$ mit ac, und $\beta\gamma$ mit bc zusammen; und daher ist $\llcorner\ \gamma = \llcorner$ c.

Anmerkung. Wenn also die drei Seiten eines Dreiecks, einzeln genommen, den drei Seiten eines andern gleich sind: so haben diese Dreiecke auch gleiche Winkel, und können immer so in einander gelegt werden, daß sie sich decken.

I. Satz 9. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel bac zu halbiren.



Auflösung. 1) Man nehme auf dem einen Schenkel ab beliebig einen Punkt d;

2) Schneide auf dem anderen Schenkel ein Stück ae = ad ab (3.)

3) Ziehe de (F. 1.)

4) Beschreibe über de ein gleichseitiges Dreieck def (1.)

5) Verbinde den hierdurch gefundenen Punkt f mit a durch af (F. 1.) so halbirt die Gerade af den Winkel bac.

Beweis. Es ist ae = ad (p. c.)
ef = df „
und af = af

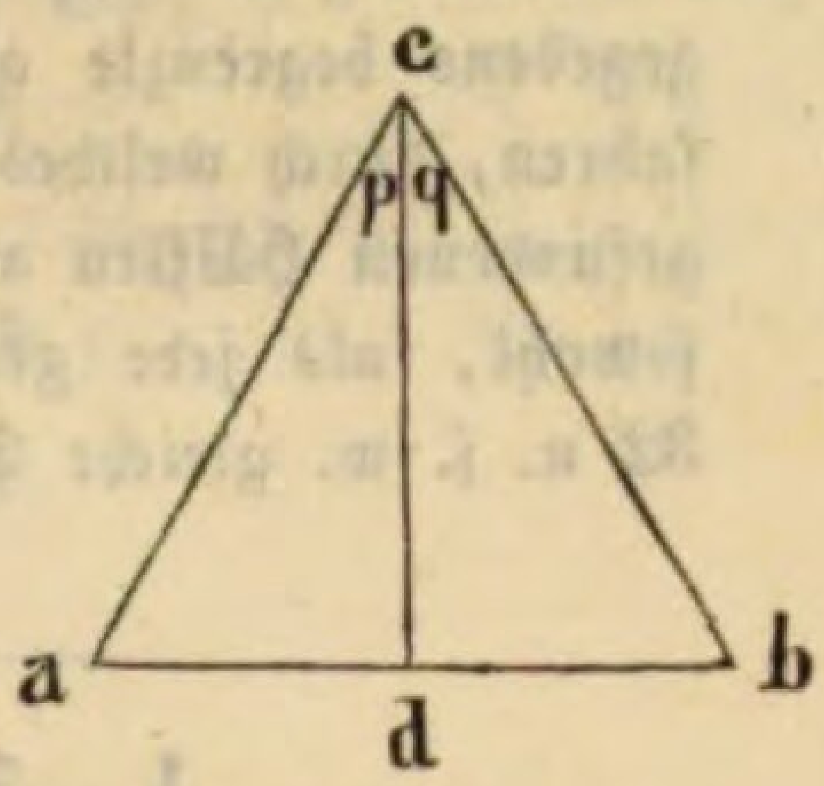
folglich ist Δ aef $\cong \Delta$ adf (8.)

Und daher ist $\llcorner$ eaf $= \llcorner$ daf; und es ist daher jeder dieser beiden Winkel die Hälfte des ganzen Winkels.

I. Satz 10. Aufgabe.

Eine gegebene begrenzte gerade Linie ab zu halbiren.

Auflösung. 1) Beschreibe über ab das gleichseitige Dreieck abc (1.)



2) Halbire den Winkel acb (9.), so wird, durch die Halbirungslinie cd des Winkels, die gegebene ab in d halbirt.

Beweis. Es ist $ca = cb$ (p. c.)
$\angle p = \angle q$ „
und da $cd = cd$

so ist $\triangle cad \cong \triangle cbd$ (4.)

und daher ist $da = db$; jede dieser beiden Linien ist also „die Hälfte der Ganzen“.

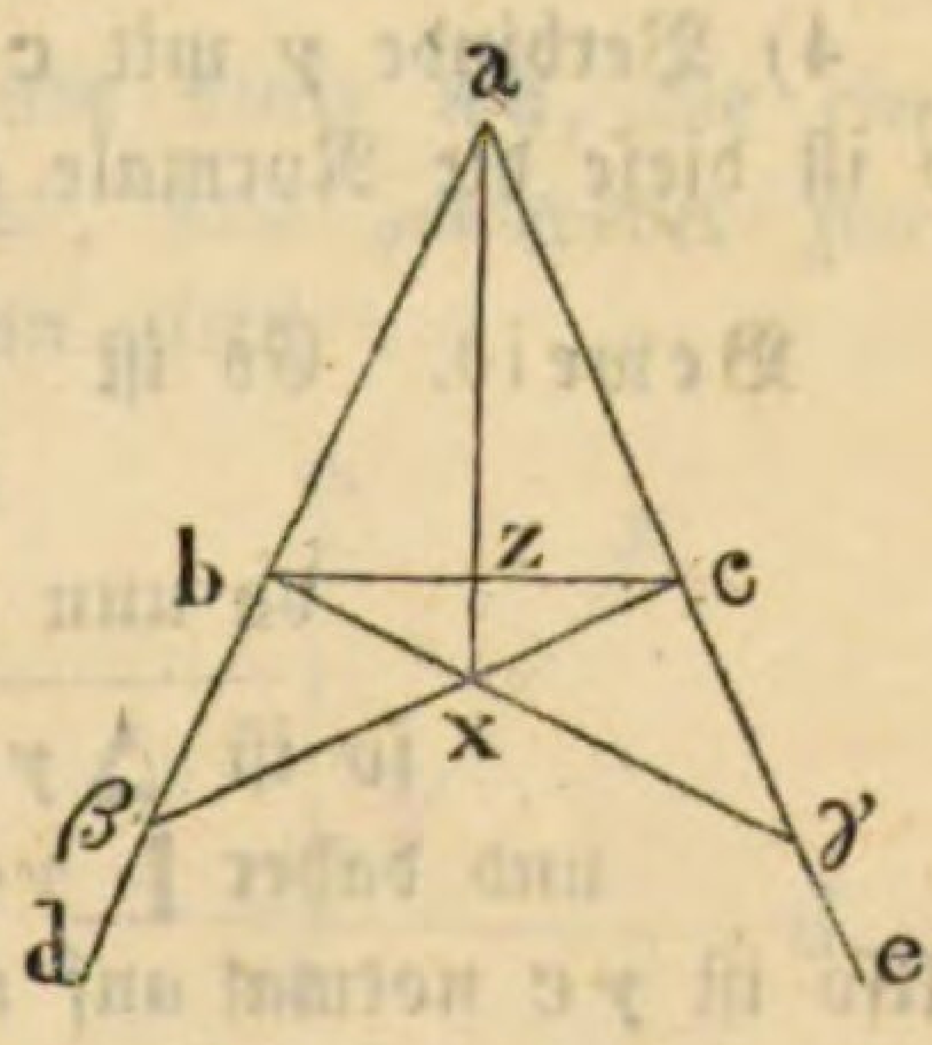
Anmerkung 1. Die Aufgabe, „einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren“, läßt sich auch auf folgende Art lösen:

1) Man nehme, auf dem einen Schenkel ad des zu theilenden Winkels dae, beliebig zwei Punkte b und β an.

2) Nehme auf dem anderen Schenkel $ac = ab$ und $a\gamma = a\beta$ (3.)

3) Verbinde b mit γ und c mit β (F. 1.)

4) Den Durchschnittspunkt x dieser beiden Linien verbinde man mit dem Scheitel a des gegebenen Winkels durch ax (F. 1.)
so wird durch diese Linie der Winkel halbirt.



Beweis. Es ist $ac = ab$ (p. c.)
$a\beta = a\gamma$ „
da nun $\angle ca\beta = \angle ba\gamma$

so ist $\triangle ca\beta \cong \triangle ba\gamma$ (4.)
Folglich ist $c\beta = b\gamma$
und $\angle c\beta b = \angle b\gamma c$
und da $b\beta = c\gamma$ (G. 3.)

so ist $\triangle c\beta b \cong \triangle b\gamma c$ (4.)
Und hieraus folgt $\angle bc\beta = \angle cb\gamma$
oder $\angle bcx = \angle cbx$

also ist auch $xb = xc$ (6.)
Da nun $ab = ac$ (p. c.)
und $ax = ax$

so ist $\triangle xab \cong \triangle xac$
und daher $\angle xab = \angle xac$
und es ist folglich durch ax der Winkel ead halbirt.

Anmerkung 2. Da nach 9. jeder gegebene Winkel, und nach 10. jede gegebene begrenzte gerade Linie, halbirt werden kann, und das Verfahren, durch welches diese Aufgaben gelös't werden, sich auch bei den gefundenen Hälften anwenden läßt: so folgt, „daß jeder gegebene Winkel sowohl, als jede gegebene begrenzte gerade Linie, auch in 4, 8, 16, 32 u. s. w. gleiche Theile getheilt werden könne".

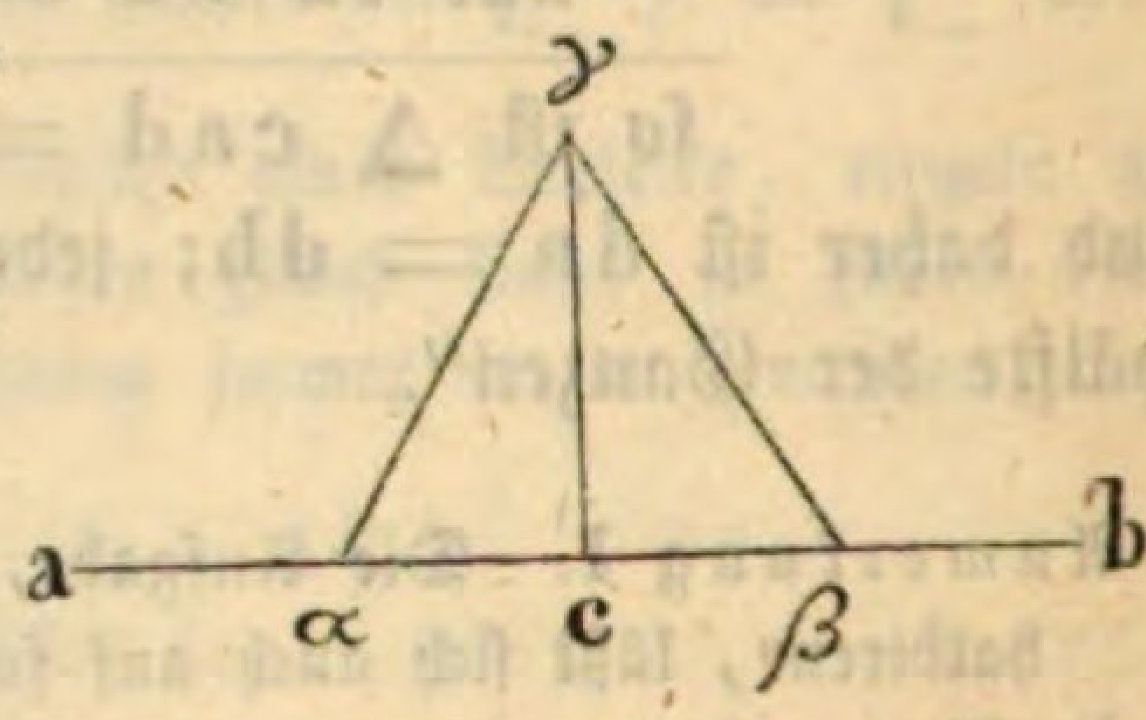
I. Satz 11. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ab, in einem in ihr gegebenen Punkte c, eine Normale zu errichten.

Auflösung. 1) Man nehme auf ca beliebig den Punkt α,

2) schneide auf cb die $c\beta = c\alpha$ ab (3.)

3) Beschreibe über $\alpha\beta$ das gleichseitige Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (1.)



4) Verbinde γ mit c durch die Gerade γc, so ist diese die Normale auf ab in dem Punkte c.

Beweis. Es ist $c\alpha = c\beta$ (p. c.)

$\alpha\gamma = \beta\gamma$ „

da nun $c\gamma = c\gamma$

so ist $\Delta\, \gamma c\alpha \cong \Delta\, \gamma c\beta$ (8.)

und daher $\llcorner\, \gamma c\alpha = \llcorner\, \gamma c\beta$

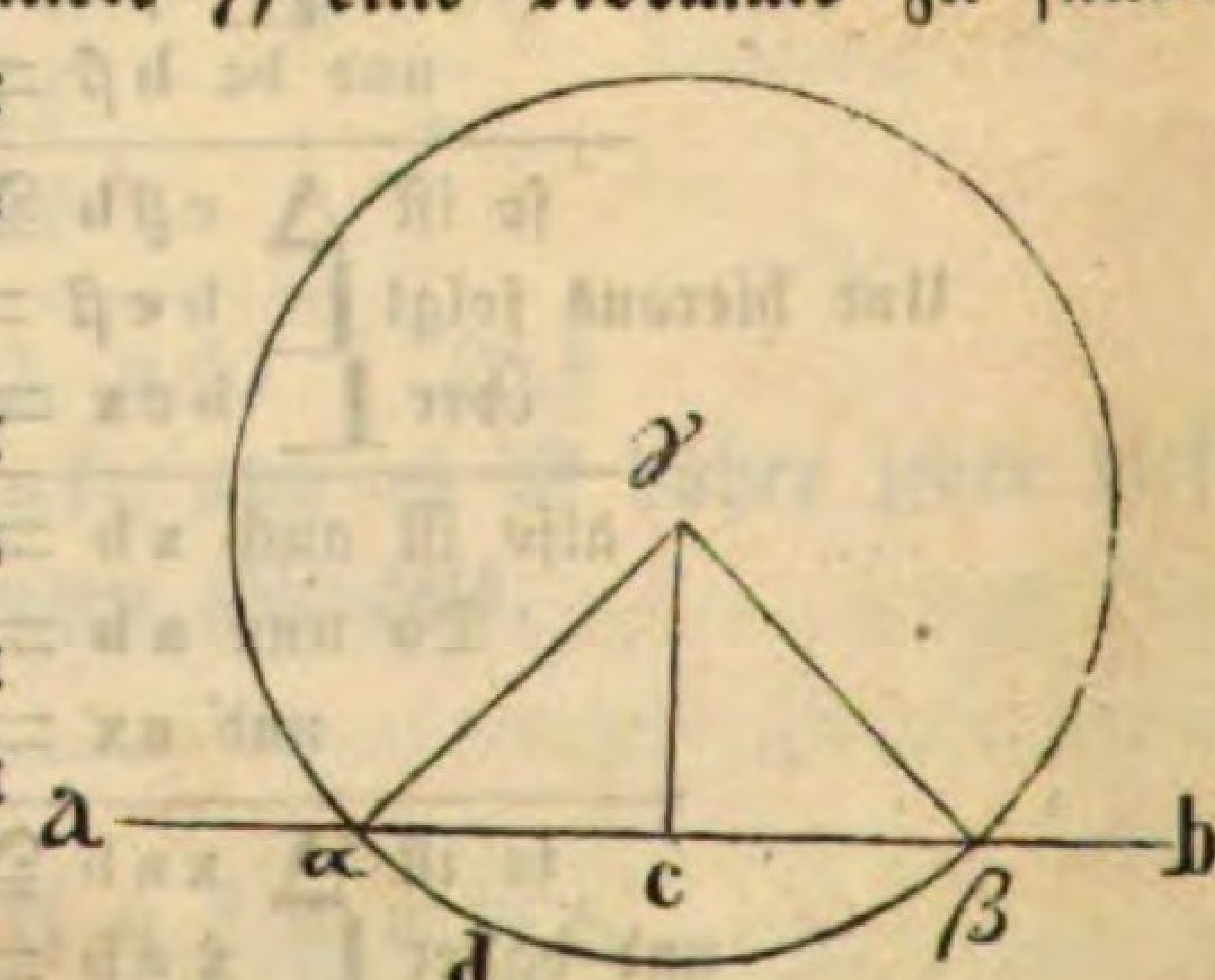
Also ist γc normal auf ab (E. 10.)

I. Satz 12. Aufgabe.

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie ab, von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte γ, eine Normale zu fällen.

Auflösung. 1) Auf der anderen Seite von ab nimm beliebig einen Punkt d.

2) Aus γ beschreibe mit einem Radius $= \gamma d$ einen Kreis (F. 3.), so wird von demselben die gegebene ab in den Punkten α und β geschnitten.



3) $\alpha\beta$ halbire in c (10).

4) Verbinde c mit γ durch die Gerade cγ, so ist diese Verbindungslinie normal auf ab.

Beweis. Ziehe $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ so ist

$$\gamma\alpha = \gamma\beta \qquad (\text{E. } 15.)$$
$$c\alpha = c\beta \qquad (\text{p. c.})$$
$$\text{und } \gamma c = \gamma c$$

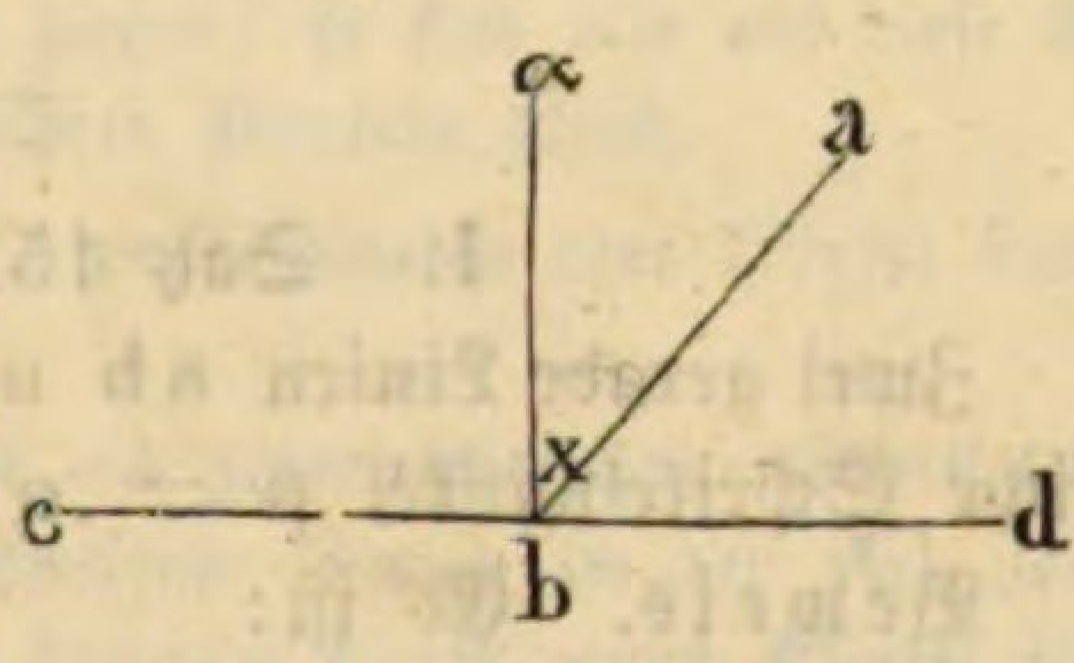
$$\text{daher } \Delta\, \gamma c \alpha \cong \Delta\, \gamma c \beta$$
$$\text{und folglich } \angle\, \gamma c \alpha = \angle\, \gamma c \beta$$

und daher ist γc normal auf ab (E. 10).

Anmerkung. Durch die beiden Aufgaben, Satz 11 und 12, wird gezeigt: wie es möglich ist, „sowohl auf einer geraden Linie in einem, in derselben gegebenen Punkte eine Normale zu errichten, als auch von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte eine Normale auf dieselbe zu fällen.

I. Satz 13. Lehrsatz.

Die beiden Winkel, welche eine gerade Linie ab, die eine andere cd in b trifft, mit derselben macht, sind „entweder zwei rechte Winkel, oder zweien rechten Winkeln gleich".



Beweis. Ist $\angle$ cba = $\angle$ dba, so sind es zwei rechte Winkel (E. 10.); und sind diese Winkel verschieden, so errichte in b auf cd die Normale bα (11.): so ist alsdann

$$\angle\, db\alpha = \angle\, cb\alpha = R. \qquad (\text{E. } 10.)$$
$$\text{Nun ist } \angle\, db\alpha = \angle\, dba + x$$
$$\text{und } \angle\, \alpha bc = \angle\, \alpha bc$$

$$\text{also } \angle\, db\alpha + \angle\, \alpha bc = \angle\, dba + x + \angle\, \alpha bc \quad (\text{G. } 2.)$$
$$\text{und weil } \angle\, db\alpha + \angle\, \alpha bc = 2\,R. \qquad (\text{p. c.})$$

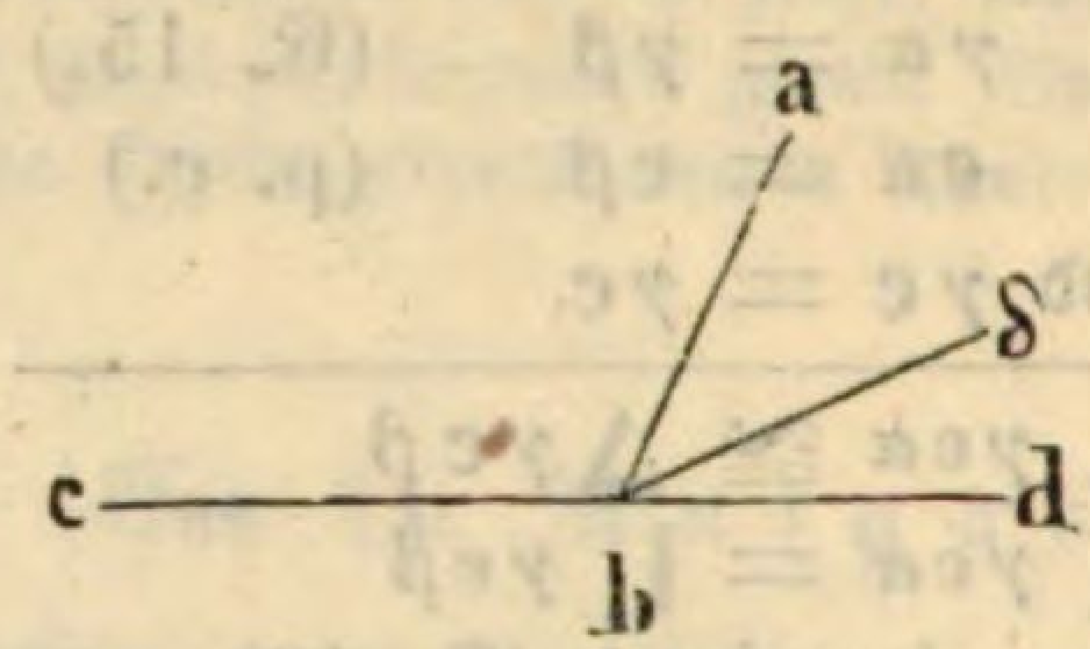
$$\text{so ist auch } \angle\, dba + x + \angle\, \alpha bc = 2\,R. \qquad (\text{G. } 1.)$$
$$\text{Da nun } x + \angle\, \alpha bc = \angle\, abc$$

$$\text{so ist auch } \angle\, dba + x + \angle\, \alpha bc = \angle\, dba + \angle\, abc$$
$$\text{und folglich } \angle\, dba + \angle\, abc = 2R.$$

I. Satz 14. Lehrsatz.

Wenn mit einer Linie ab, an einem und demselben Punkte b, die beiden auf verschiedenen Seiten liegenden Linien bc und bd

zwei Nebenwinkel abc und abd bilden, welche zusammen zweien rechten Winkeln gleich sind: so liegen die Linien bc und bd in gerader Linie an einander.



Beweis. Wäre cbd keine gerade Linie, so sey cbδ eine solche; alsdann ist

$\llcorner cba + \llcorner ab\delta = 2$ R. (13.)

Da nun auch $\llcorner cba + \llcorner abd = 2$ R. (p. h.)

so folgt $\llcorner cba + \llcorner ab\delta = \llcorner cba + \llcorner abd$ (G. 1.)

und daher $\llcorner ab\delta = \llcorner abd$ (G. 3.)

Dieses aber ist nicht möglich (G. 9.)

Also ist die Voraussetzung falsch. Diese war, „daß eine andere Linie bδ, außer bd, mit cb in gerader Linie liege"; es ist Dieses also nicht der Fall, und folglich ist cbd eine gerade Linie.

I. Satz 15. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien ab und cd, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel $p = q$ und $m = n$.

Beweis. Es ist:

$p + m = 2$ R. (13.)

und $m + q = 2$ R. „

daher $p + m = m + q$ (G. 1.)

Folglich ist $p = q$ (G. 3.)

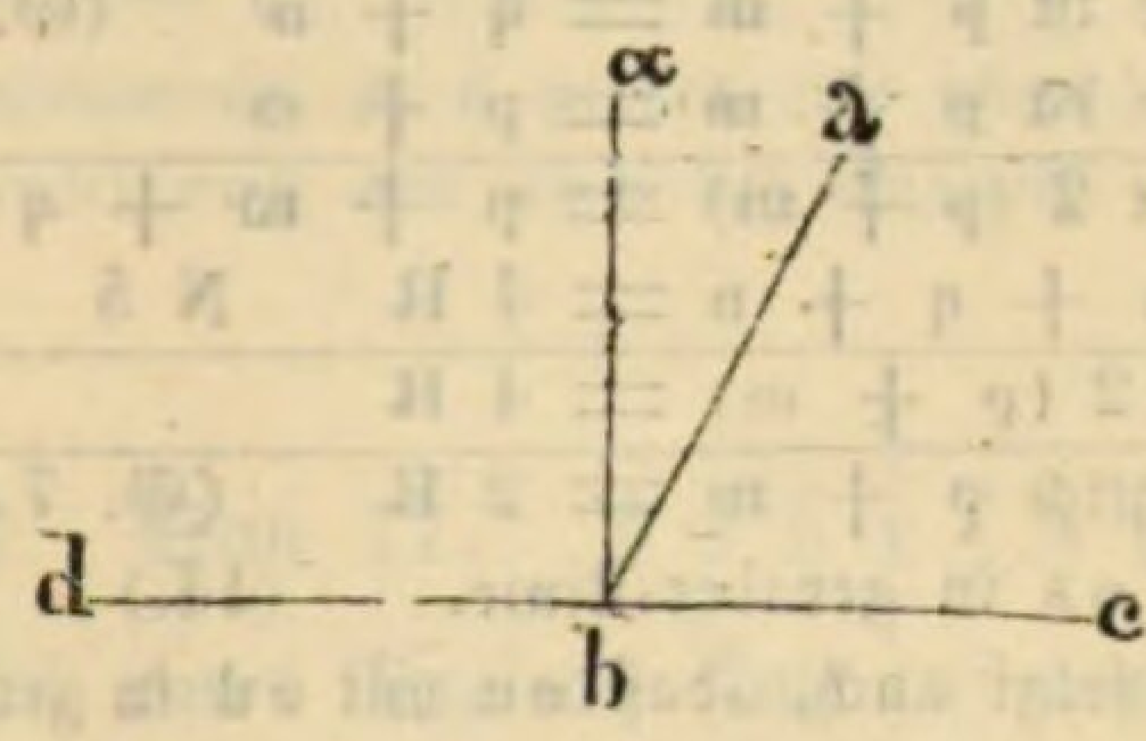


Eben so wird bewiesen, „daß $m = n$ ist".

Anmerkungen. Aus den Sätzen 13., 14. und 15. folgt: 1) Wenn zwei Winkel einen Schenkel gemein haben, und die übrigen beiden Schenkel liegen in gerader Linie, und der eine dieser Winkel ist ein rechter, so ist der andere ebenfalls ein rechter; und ist der eine Winkel ein stumpfer (E. 11.), so muß der andere ein spitzer seyn (E. 12.).

2) Der zehnte Grundsatz, „daß alle rechte Winkel einander gleich sind" (von dem bisher noch kein Gebrauch gemacht ist), kann nun, wenn man ihn nicht als Grundsatz will gelten lassen, auf folgende Art bewiesen werden.

Nimmt man an, „daß es rechte Winkel **cba** und **cbα** giebt, die einander nicht gleich sind": so wird, wenn man sie so in einander legt, daß ihr Scheitel **b** und der eine Schenkel **bc** zusammen fallen, der zweite Schenkel **ba** des einen innerhalb des anderen Winkels **cbα** liegen. Man verlängere **cb** nach **d**,



so ist $\angle\ cb\alpha = \angle\ \alpha bd$ (E. 10.)
und $\angle\ cba < \angle\ cb\alpha$ (p. h.)

also auch $\angle\ cba < \angle\ \alpha bd$.
Und da $\angle\ cba = \angle\ abd$ (p. h.)

so ist auch $\angle\ abd < \angle\ \alpha bd$

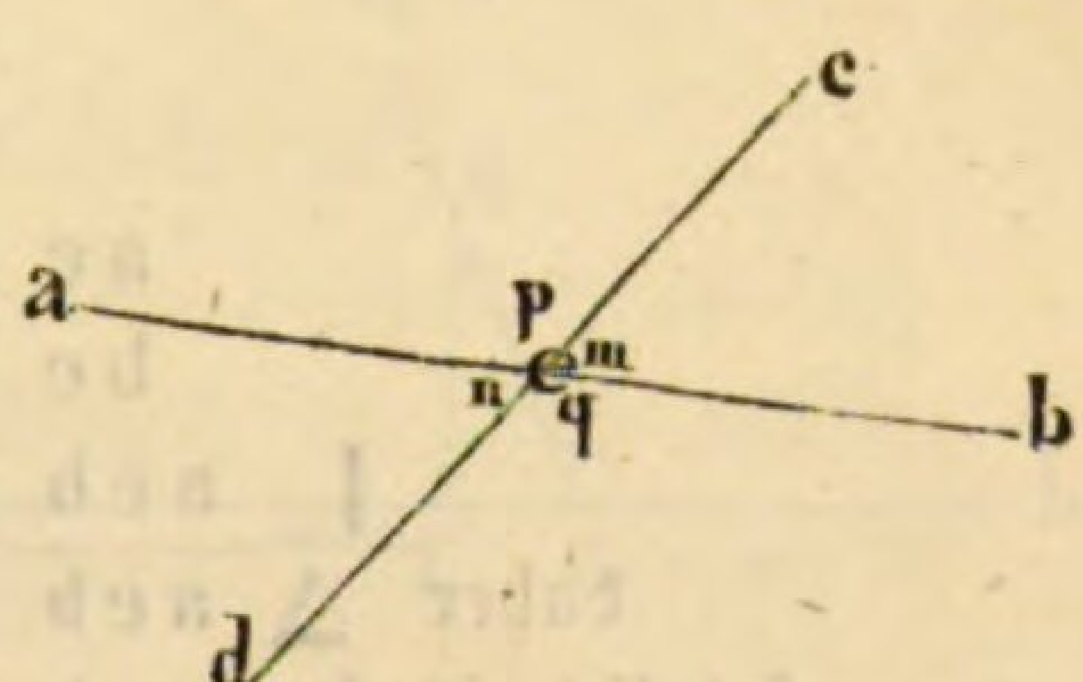
was nicht möglich ist. Die Voraussetzung, „daß rechte Winkel verschieden seyn können", ist also falsch, und es sind daher alle rechten Winkel gleich groß.

3) Werden von einem Punkte einer geraden Linie mehrere gerade Linien gezogen, die alle auf derselben Seite liegen: so sind alle auf diese Weise gebildeten Winkel zusammen zweien rechten Winkeln gleich.

4) Die durch zwei sich schneidende Linien gebildeten vier Winkel sind zusammen vier rechten Winkeln gleich.

5) Alle Winkel, die um einen Punkt als gemeinschaftlicher Scheitel durch mehrere in diesem Punkte zusammentreffende Linien in der Art gebildet werden, daß je zwei neben einander liegende Linien einen Winkel bilden, sind zusammen vier rechten Winkeln gleich.

6) Wenn in dem Punkte **e** der geraden Linie **ab** auf verschiedenen Seiten derselben die Geraden **ec** und **ed** gezogen werden, und es ist $\angle\ m = \angle\ n$, so liegt **ec** mit **ed** in gerader Linie; denn es ist



$\angle\ m = \angle\ n$ (p. h.)
$\angle\ p = \angle\ p$

also $\angle\ m + \angle\ p = \angle\ n + \angle\ p$. (G. 2.)
Da nun $\angle\ m + \angle\ p = 2\,R$ (13.)

so ist auch $\angle\ n + \angle\ p = 2\,R$ (G. 1.)
und daher **ec** und **ed** in gerader Linie. (14.)

7) Werden von einem Punkte e vier gerade Linien eb, ec, ea und ed gezogen, und es ist zu gleicher Zeit $\angle m = \angle n$ und $\angle p = \angle q$, so liegt ec mit ed und eben so eb mit ea in gerader Linie. Denn da

$p = q$
und $m = n$

so ist $p + m = q + n$ (G. 2.)
und da $p + m = p + m$

so folgt $2(p + m) = p + m + q + n$. (G. 2.)
Da nun $p + m + q + n = 4R$ N 5

so ist auch $2(p + m) = 4R$

folglich $p + m = 2R$ (G. 7.)

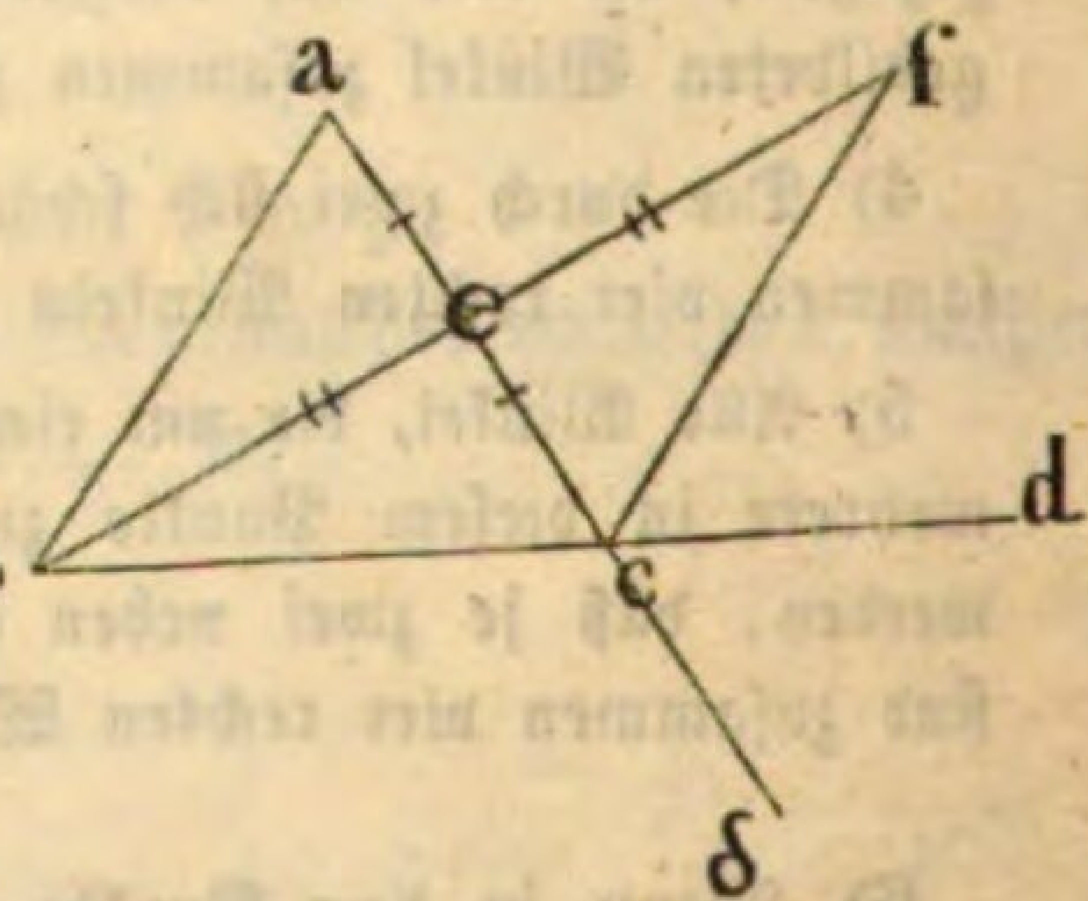
also liegt eb mit ea in gerader Linie. (14.)

Auf gleiche Weise folgt auch, „daß ec mit ed in gerader Linie liegen muß".

I. Satz 16. Lehrsatz.

Wird eine Seite bc eines Dreiecks abc nach d verlängert, so ist der dadurch entstehende Außenwinkel dca (der von der Verlängerung cd und der anliegenden Seite ca des Dreiecks gebildet wird) größer als jeder der beiden innern gegenüberliegenden Winkel cab und abc des Dreiecks.

Beweis. Man halbire ac in e (10.); ziehe be, verlängere dieselbe, mache die Verlängerung ef = be (3.), und ziehe fc, so ist



$ae = ec$ (p. c.)
$be = ef$ „

$\angle aeb = \angle cef$ (15.)

daher $\triangle aeb \cong \triangle cef$ (4.)
folglich ist $\angle eab = \angle ecf$.
Nun ist $\angle acd > \angle ecf$ (G. 9.)

folglich ist auch $\angle acd > \angle cab$.

Auf gleiche Weise folgt auch, „daß $\angle acd > \angle abc$".

Anmerkung. Dieser Satz kann auch auf folgende Art ausgedrückt werden. Wird von einem Dreieck abc eine Seite bc nach d verlängert, so ist der dadurch entstehende Außenwinkel acd größer als der Winkel cab des Dreiecks, welcher der verlängerten Seite bc gegenüber liegt; und die

Richtigkeit dieses Satzes ist eben bewiesen worden. Verlängert man nun ac nach δ, so ist aus demselben Grunde

$$\angle bc\delta > \angle abc$$

$$\text{da nun } \angle bc\delta = \angle acd \quad (15.)$$

$$\text{so ist auch } \angle acd > \angle abc.$$

Folglich ist der Außenwinkel acd größer, als jeder der beiden innern gegenüber liegenden Winkel cab und abc des Dreiecks.

I. Satz 17. Lehrsatz.

Je zwei Winkel eines Dreiecks sind zusammen kleiner als zwei rechte Winkel.

Beweis. Verlängere bc nach d, so ist

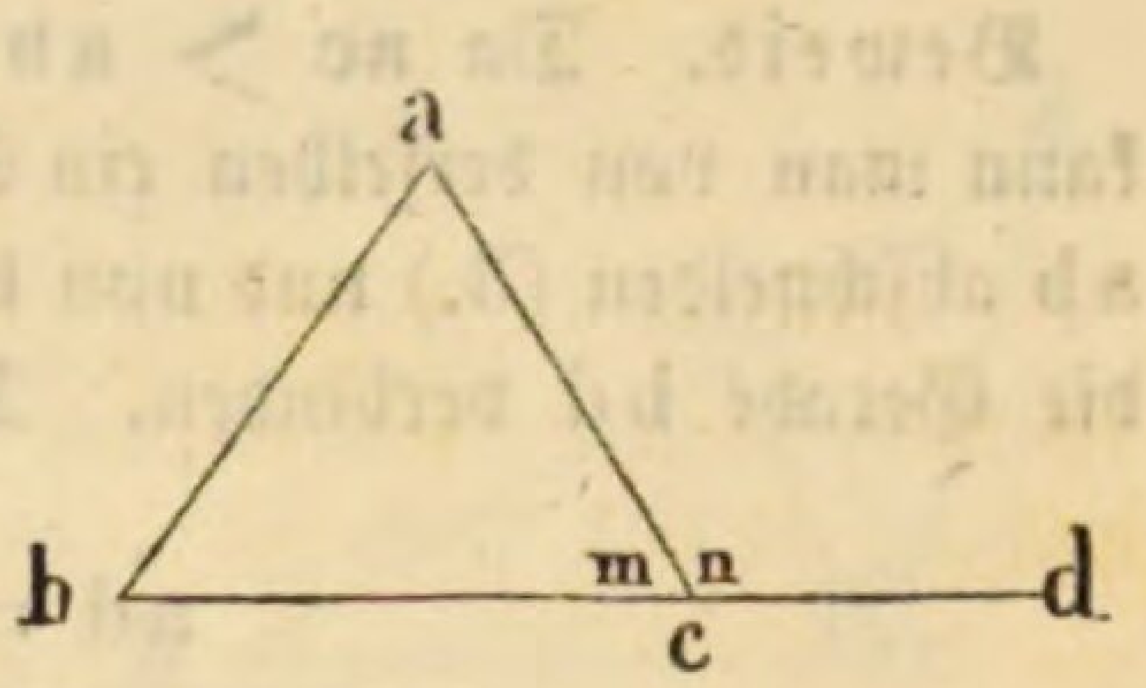
$$\angle a < \angle n \quad (16.)$$

$$\angle m = \angle m$$

$$\text{also auch } \angle a + \angle m < \angle m + \angle n$$

$$\text{aber } \angle m + \angle n = 2\,R \quad (13).$$

$$\text{also ist } \angle a + \angle m < 2\,R.$$

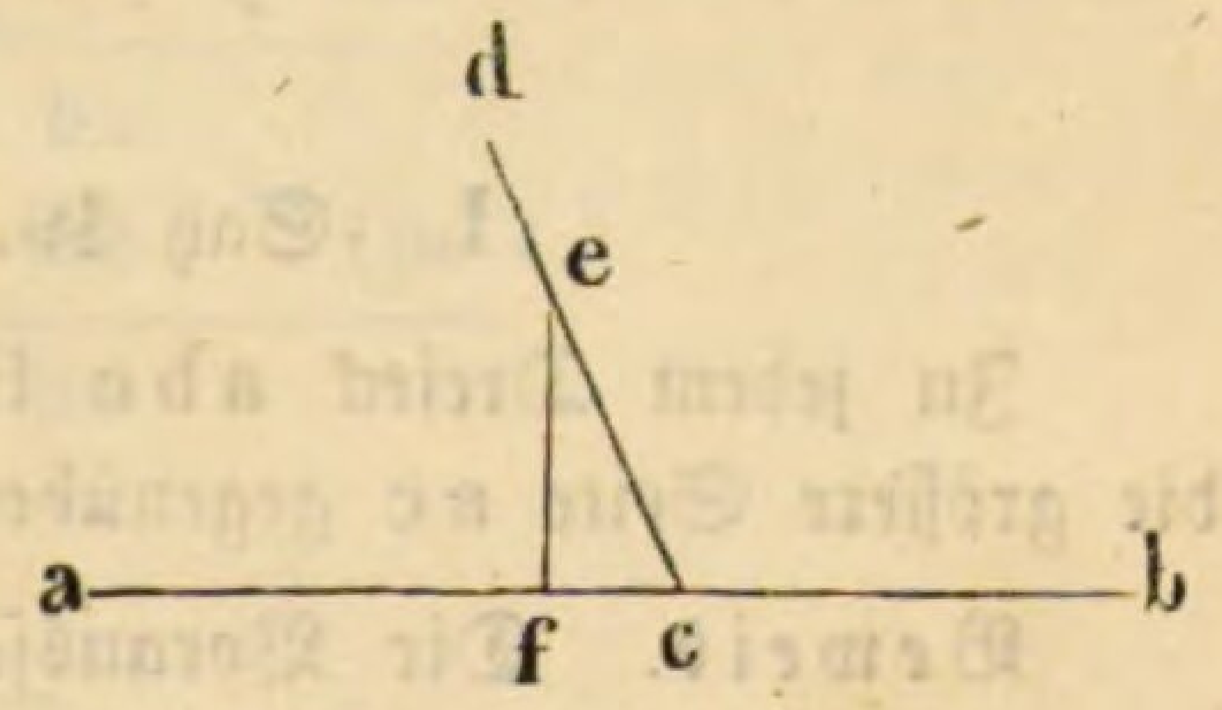


Folgerungen. Aus diesem Satze folgt:

1) Wenn in einem Dreieck ein Winkel ein rechter oder ein stumpfer ist, so muß jeder der beiden übrigen Winkel ein spitzer seyn. Daher hat jedes geradlinige Dreieck wenigstens zwei spitze Winkel; und hierdurch werden nun die Erklärungen 27, 28 und 29 deutlich.

2) Jedes gleichseitige Dreieck ist ein spitzwinkliges, und in jedem gleichschenkligen Dreieck müssen die Winkel an der Grundlinie spitze Winkel seyn.

3) Ist an einem Punkte c der Geraden ab die gerade Linie cd so gezogen, daß die dadurch gebildeten Winkel dca und dcb ungleich sind (daß also der eine ein spitzer und der andere ein stumpfer Winkel ist), und man fället von irgend einem Punkte e der cd eine Normale ef auf ab: so trifft diese immer den Schenkel ca des spitzen Winkels.



Anmerkung. Die Umkehrung des 17ten Satzes lautet: Sind zwei an einer geraden Linie anliegende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte, so sind es Winkel eines Dreiecks; oder auch, werden zwei gerade Linien ab und αβ von einer dritten cd geschnitten, und es sind die beiden innern, auf einer

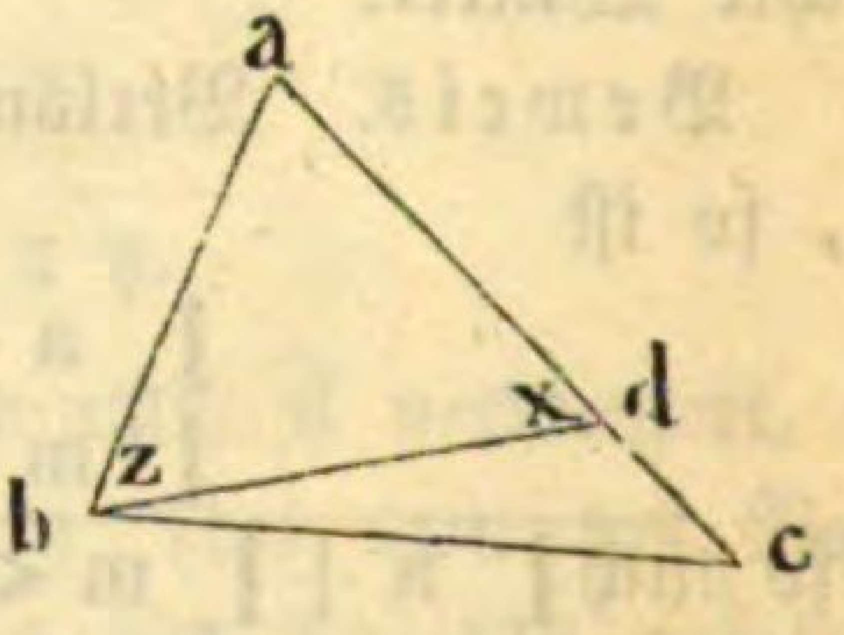


Seite liegenden Winkel m und n zusammen kleiner als zwei rechte Winkel: so treffen diese Linien, genugsam verlängert, an eben dieser Seite zusammen. Dieses nun ist der, unter den Grundsätzen vorkommende 11te Satz; und wenn auch zugestanden werden muß, „daß dieser Satz keineswegs die Eigenschaften eines Grundsatzes hat“, so ist es doch auch bis jetzt noch nicht gelungen, einen strengen Beweis für denselben aufzufinden. Ein Weiteres hierüber findet man in der vierten Beilage zu dem ersten Buche.

I. Satz 18. Lehrsatz.

In jedem Dreieck abc liegt der größern Seite ac auch der größere Winkel abc gegenüber.

Beweis. Da ac > ab seyn soll, so kann man von derselben ein Stück ad = ab abschneiden (3.) und nun b mit d durch die Gerade bd verbinden. Da sonach



$$ad = ab \quad \text{(p. c.)}$$

so ist auch $\angle z = \angle x$ (5.)

aber $\angle x > \angle c$ (16.)

folglich auch $\angle z > \angle c$.

Da nun $\angle abc > \angle z$

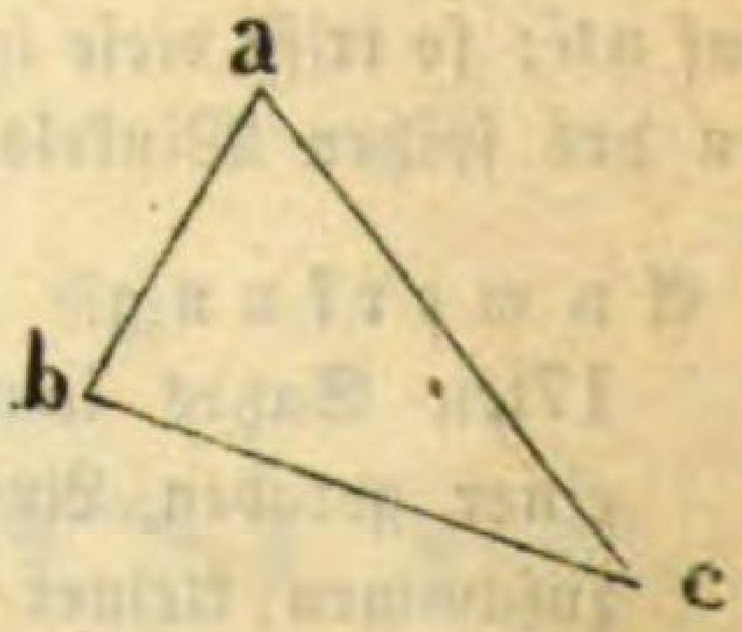
so ist um so mehr $\angle abc > \angle c$.

Aus der Voraussetzung ac > ab folgt also $\angle abc > \angle c$.

I. Satz 19. Lehrsatz.

In jedem Dreieck abc liegt dem größern Winkel abc auch die größere Seite ac gegenüber.

Beweis. Die Voraussetzung ist hier



$$\angle b > \angle c$$

und es ist nun entweder

1) ab = ac oder 2) ab > ac oder 3) ac > ab.

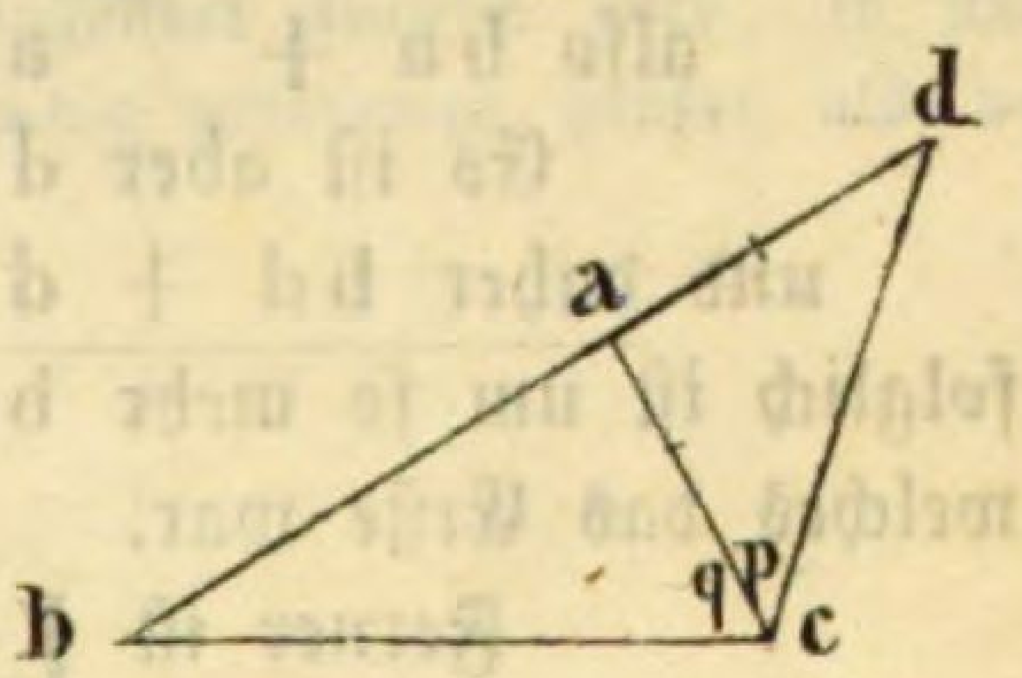
ab = ac kann nicht seyn, weil sonst $\angle c = \angle b$ seyn müßte (5.), was der Voraussetzung widerspricht; ab > ac kann auch nicht seyn, weil sonst $\angle c > \angle b$ seyn müßte (18.), was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Da nun einer der drei angegebenen Fälle statt finden muß, und die beiden ersten der Voraussetzung widersprechen: so muß nothwendig der 3te Fall statt finden, und es ist also ac > ab, sobald ∟ b > ∟ c vorausgesetzt wird.

Anmerkung. In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite die größte; und ebenso ist in jedem rechtwinkligen Dreieck die Seite die größte, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt.

I. Satz 20. Lehrsatz.

In jedem Dreieck sind je zwei Seiten ab und ac zusammen größer als die dritte bc.



Beweis. Man verlängere ba, mache die Verlängerung ad der andern Seite ac gleich (3.) und ziehe cd, so ist

ad = ac (p. c.)

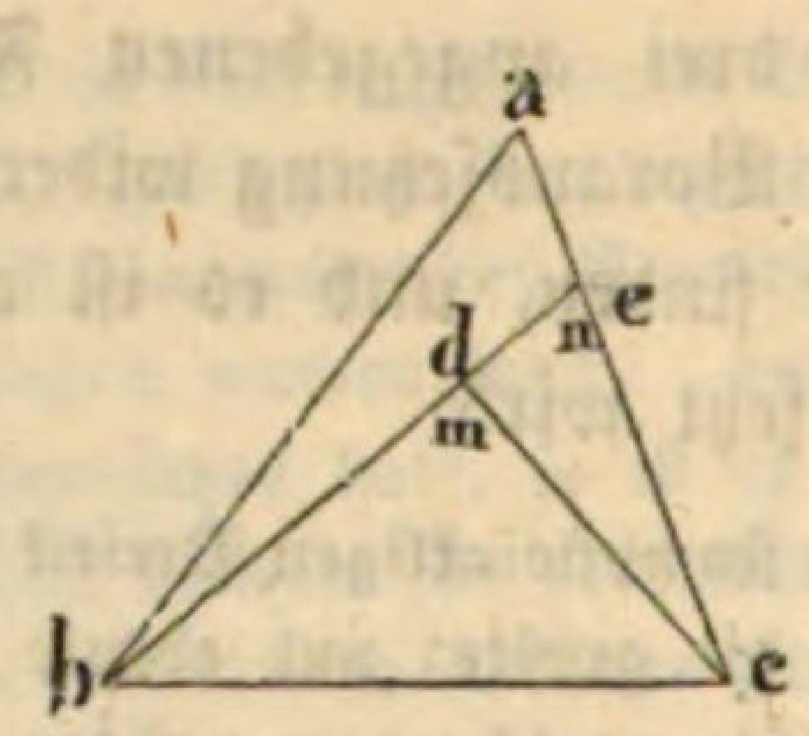
daher ∟ p = ∟ d (5.)
und folglich ∟ (p + q) > ∟ d (G. 9.)
Es ist also in dem Dreieck bcd
∟ bcd > ∟ d
und daher bd > bc (19.)
Da nun bd = ba + ad

so ist auch ba + ad > bc
und weil ad = ac (p. c.)

so folgt ba + ac > bc
was bewiesen werden sollte.

I. Satz 21. Lehrsatz.

Wenn von den Endpunkten b und c der einen Seite bc eines Dreiecks abc, zwei gerade Linien bd und cd an einen Punkt d innerhalb des Dreiecks abc gezogen werden: so sind diese Linien zusammen kleiner als die beiden übrigen Seiten ba und ca des Dreiecks abc, schließen aber einen größern Winkel bdc ein als diese.



Beweis. Man verlängere bd bis e, so ist

$$ba + ae > be \quad (20.)$$

und weil $be = bd + de$

auch $ba + ae > bd + de.$

Da nun $ec = ec$

so ist auch $ba + ae + ec > bd + de + ec$

also $ba + ac > bd + de + ec$

Es ist aber $de + ec > cd \quad (20.)$

und daher $bd + de + ec > bd + cd$

folglich ist um so mehr $ba + ac > bd + cd$

welches das Erste war.

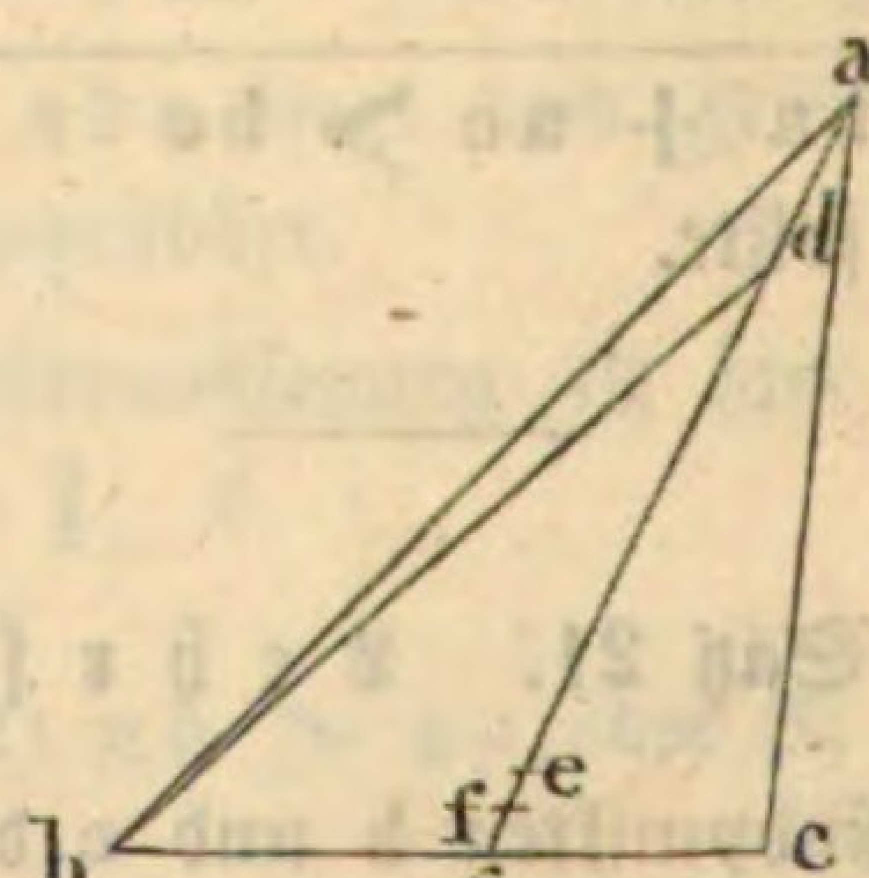
Ferner ist $\llcorner m > \llcorner n \quad (16.)$

und $\llcorner n > \llcorner a$ „

daher ist um so mehr $\llcorner m > \llcorner a$

und dieses war das Zweite.

Zusatz I. „Daß $bd + dc < ba + ac$ seyn muß", gilt nur für den Fall unbedingt, wenn b und c die Endpunkte der einen Seite des Dreiecks abc sind. Ist das Dreieck abc aber bei c recht- oder stumpfwinklig, und man nimmt statt c einen anderen, zwischen b und c liegenden Punkt g der Linie bc, und zieht ag: so läßt sich in dieser Linie immer ein Punkt d von der Lage angeben, daß, wenn man bd zieht, $bd + dg$ größer als $ba + ac$ wird.



Beweis. Da $\llcorner c$ ein stumpfer oder rechter Winkel seyn soll (p. h.), so ist in $\triangle acg$

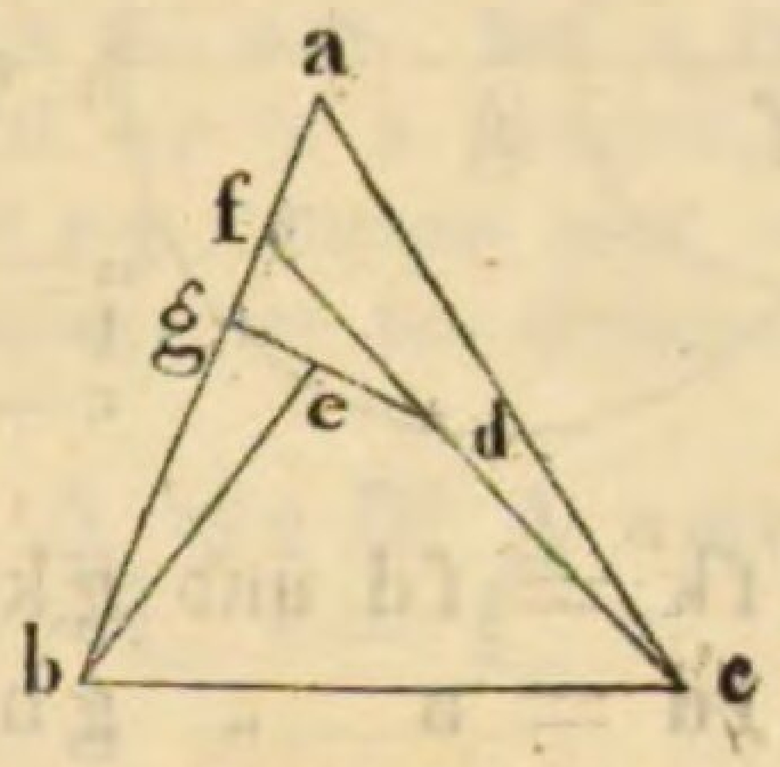
$$ag > ac \quad (19.)$$

Man nehme $ae = ac$, halbire eg in f, und nehme $ad = ef$ und ziehe db.

$$\begin{array}{rl} \text{Da} & ad = ef \quad (\text{p. c.}) \\ \text{und} & de = de \\ \hline \text{so ist} & ae = df. \quad (\text{G. 1.}) \\ \text{Und da} & ae = ac \quad (\text{p. c.}) \\ \hline \text{so ist} & ac = df \\ \text{aber} & ab < ad + db \quad (20.) \\ \hline \text{folglich} & ab + ac < df + ad + db. \\ \text{Und weil} & ad = fg \\ \hline \text{auch} & ab + ac < \underbrace{df + fg} + db \\ \text{und daher} & ab + ac < \quad dg \quad + db \end{array}$$

was bewiesen werden sollte.

Zusatz 2. Nimmt man in der Fläche des Dreiecks abc zwei Punkte d und e so an, daß, wenn die Geraden be, ed und dc gezogen werden, dadurch weder $\llcorner\, bed$ noch $\llcorner\, edc$ ein einspringender Winkel wird: so sind immer die Seiten ba und ac von $\Delta\, abc$ zusammen größer als $be + ed + dc$.



Beweis. Man verlängere cd und de, bis sie die ab in f und g schneiden, so ist

$$\begin{array}{rl} & ac + af > cf \quad (20.) \\ \text{also} & ac + af > cd + df \\ \text{und} & df + fg > dg. \quad " \\ \hline \text{Daher} & ac + af + fg + df > cd + dg + df \\ \hline \text{folglich} & ac + \underbrace{af + fg} > cd + \underbrace{dg} \quad (\text{G. 3.}) \\ \text{oder} & ac + \quad ag \quad > cd + de + eg \\ & gb + eg > eb \quad (20.) \\ \hline \text{also auch} & ac + ag + gb + eg > cd + de + eb + eg \\ \text{und} & ac + \underbrace{ag + gb} > cd + de + eb. \quad (\text{G. 3.}) \\ \text{Es ist also} & ac + \quad ab \quad > cd + de + eb \end{array}$$

was bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Der letzte Satz gilt auch für den Fall, wenn innerhalb der Fläche des Dreiecks abc mehr als zwei Punkte angenommen werden; wenn nur durch die Verbindung dieser Punkte keine gegen bc einspringende Winkel entstehen.

I. Satz 22. Aufgabe.

Es sind drei gerade Linien a, b und c gegeben, von welchen je zwei zusammen größer sind als die dritte; man soll ein Dreieck beschreiben, dessen Seiten diesen Linien gleich sind.

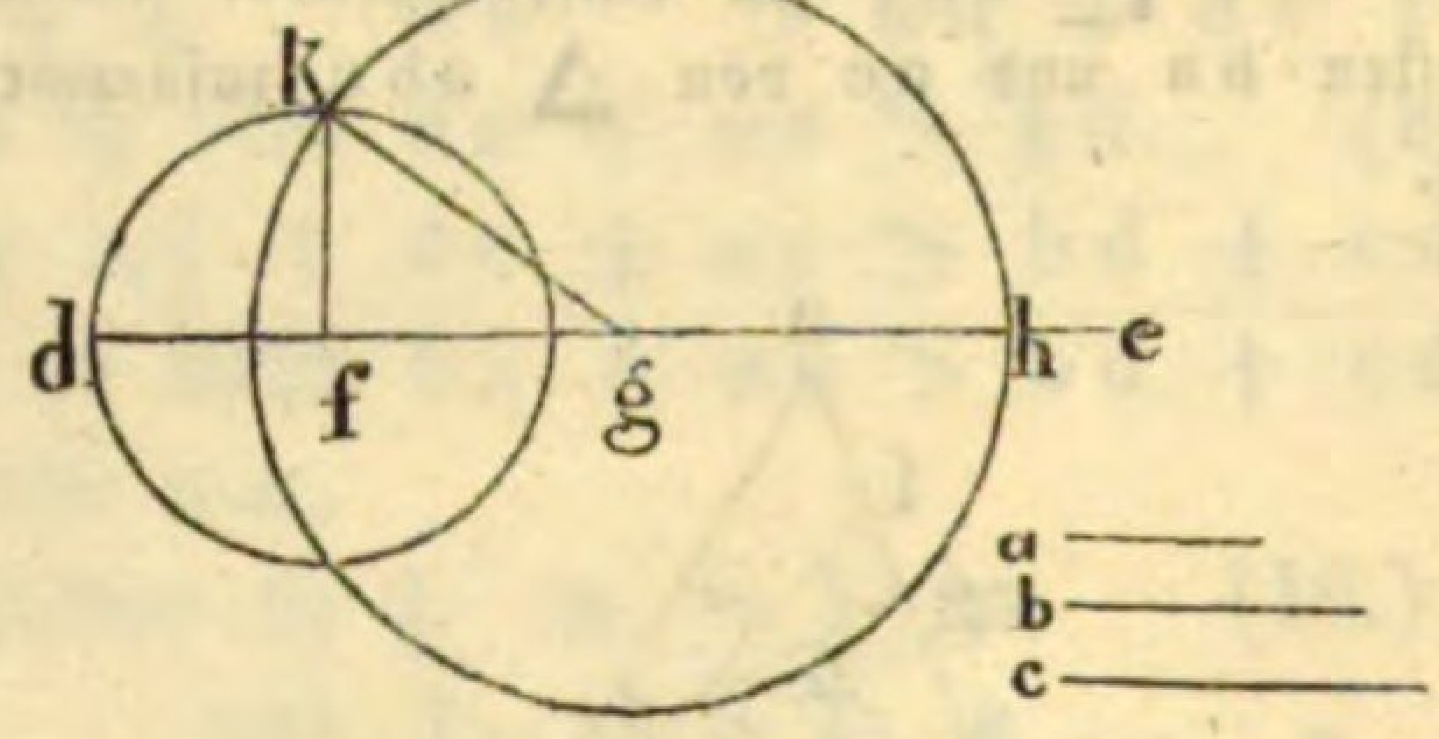
Auflösung. 1) Ziehe eine gerade Linie de, die in d begrenzt, in e aber unbegrenzt ist.

2) Schneide auf derselben df = a, fg = b und gh = c ab (3.)

3) Beschreibe aus f mit fd und aus g mit gh einen Kreis.

4) Von dem Punkte k, wo beide Kreise sich schneiden, ziehe die geraden Linien kf und kg

so ist Δ fgk das verlangte Dreieck.



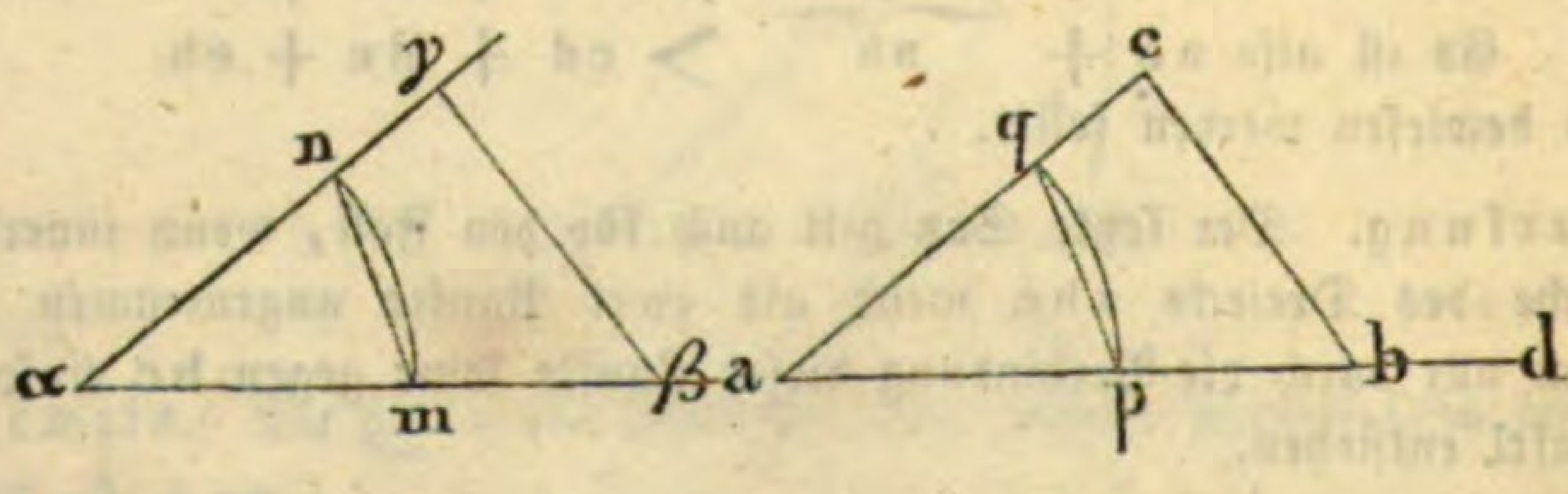
Beweis. Es ist fk = fd und gk = gh (E. 15.)
aber auch fd = a „ gh = c (p. c.)

folglich ist fk = a und gk = c.

Da nun auch fg = b,
so sind die drei Seiten des Dreiecks fkg den gegebenen Linien a, b und c gleich.

I. Satz 23. Aufgabe.

Man soll an den Punkt a der geraden Linie ad einen Winkel ansetzen, der einem gegebenen Winkel $\beta\alpha\gamma$ gleich ist.



Auflösung. 1) Auf den Schenkeln des gegebenen Winkels nehme man die Punkte β und γ beliebig, und verbinde dieselben durch die gerade Linie $\beta\gamma$.

2) Ueber **ad** beschreibe ein Dreieck **abc**, so daß $ab = \alpha\beta$, $ac = \alpha\gamma$ und $bc = \beta\gamma$ ist (22.)

so ist das Verlangte geschehen.

Beweis. Da $ab = \alpha\beta$
$ac = \alpha\gamma$
$bc = \beta\gamma$

so ist $\triangle\, abc \cong \triangle\, \alpha\beta\gamma$ (8.)

und daher $\llcorner\, a = \llcorner\, \alpha$.

Anmerkung. Das gewöhnlich gebräuchliche Verfahren, um an einen gegebenen Punkt **a** der Linie **ad** einen, dem $\llcorner\, \alpha$ gleichen Winkel **a** zu beschreiben, ist insofern etwas kürzer, als man hierzu ein gleichschenkliges Dreieck benutzt.

Nämlich man nimmt auf $\alpha\beta$ beliebig einen Punkt **m**, und auf **ad** den Punkt **p**, so daß $ap = \alpha m$. Aus α beschreibt man mit αm einen Kreis, der den Schenkel $\alpha\gamma$ in **n** schneidet, und aus **a** beschreibt man mit **ap** den Kreisbogen **pq**. Hierauf wird aus **p** mit einem Radius $= mn$ ein Bogen beschrieben, der den Ersteren in **q** schneidet. Zieht man nun **aq**, so ist

$$\triangle\, apq \cong \triangle\, \alpha mn$$

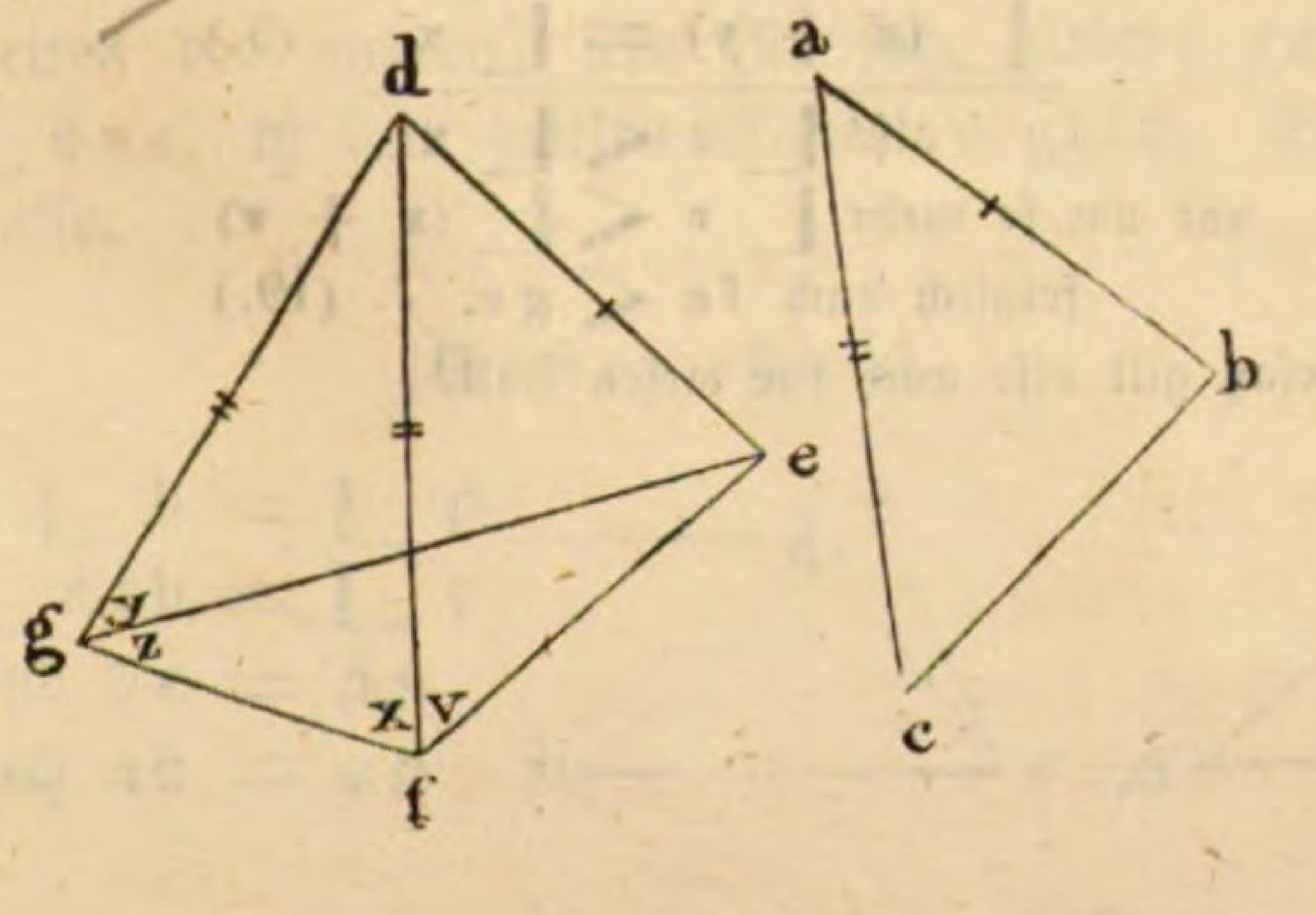
und daher $\llcorner\, a = \llcorner\, \alpha$.

I. Satz 24. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken **dge** und **acb** zwei Seiten des einen, jede für sich, zweien Seiten des andern gleich sind, aber der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel ist in dem einen Dreieck größer als in dem andern: so ist in diesem Dreieck auch die dritte Seite größer als in dem andern. Ist nämlich

$dg = ac$ und $de = ab$, aber $\llcorner\, gde > cab$

so ist auch $ge > cb$.



Beweis. Man lege an ed einen Winkel $edf = \angle bac$ (23.), mache $df = ac$ (3.) und ziehe fe und fg: so ist

$$de = ab \quad \text{(p. h.)}$$
$$\angle edf = \angle bac \quad \text{(p. c.)}$$
$$df = ac \quad „$$

also $\Delta\, edf \cong \Delta\, bac$ (4.)

folglich ist $df = ac$ und $ef = bc$.

Da nun $ac = dg$ (p. h.)

so ist $df = dg$

und daher $\angle (z + y) = \angle x$ (5.)

also $\angle z < \angle x$ (G. 9.)

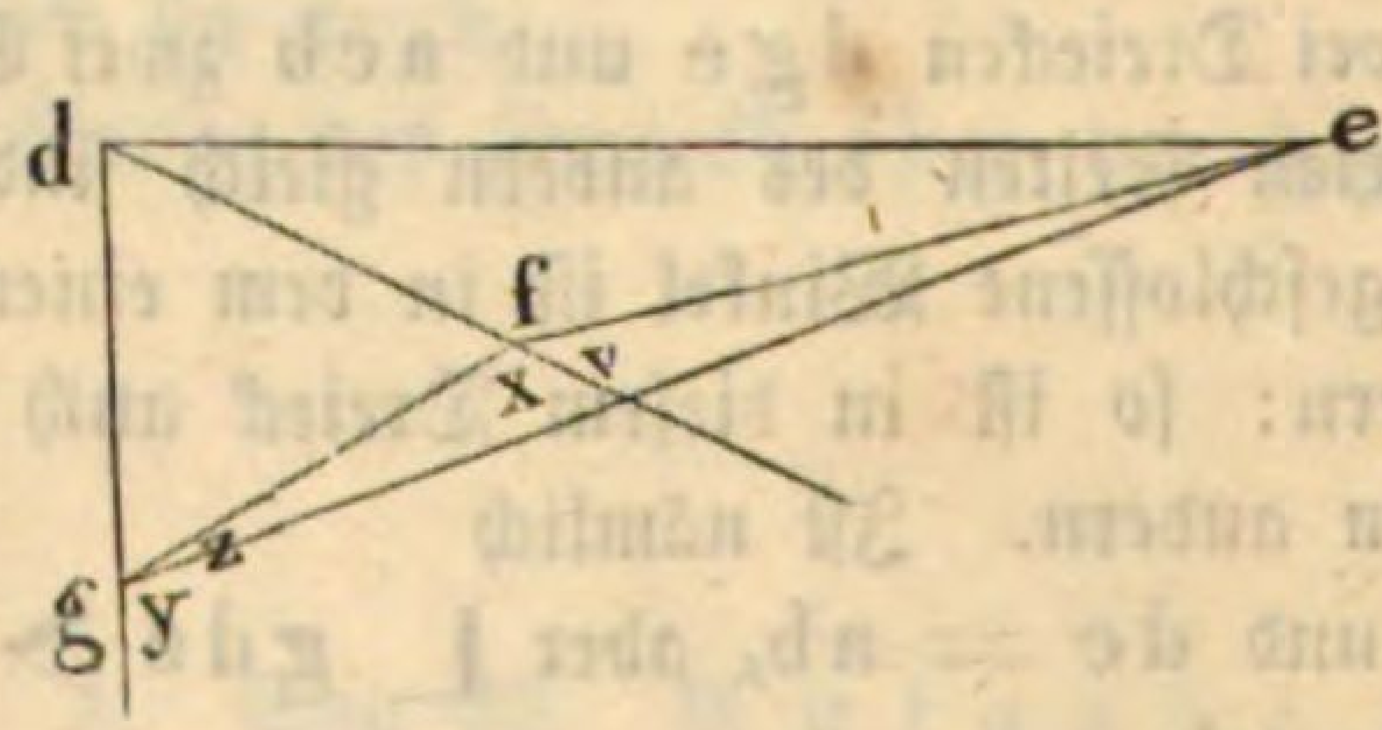
und um so mehr $\angle z < \angle (x + v)$.

Folglich ist auch in dem Dreieck egf $ef < eg$ (19.)

und daher auch $bc < eg$

was bewiesen werden sollte.

Zusatz. Bei dem Beweise wurde hier vorausgesetzt, „es liege, wenn man $df = ac$ macht, der Punkt f außerhalb des Dreiecks edg". Es sind aber noch die Fälle möglich: daß entweder f in der Linie eg liegt, oder innerhalb der Fläche von Δ edg. In dem erstern dieser beiden Fälle ist ohne Weiteres einleuchtend, „daß ef und folglich auch $bc = ef$ kleiner als eg seyn muß". Liegt aber f innerhalb der Fläche von Δ gde, so ist nun



$\angle (z + y) = \angle x$ (5.)

also $\angle z < \angle x$

und um so mehr $\angle z < \angle (x + v)$

folglich auch $fe < ge$. (19.)

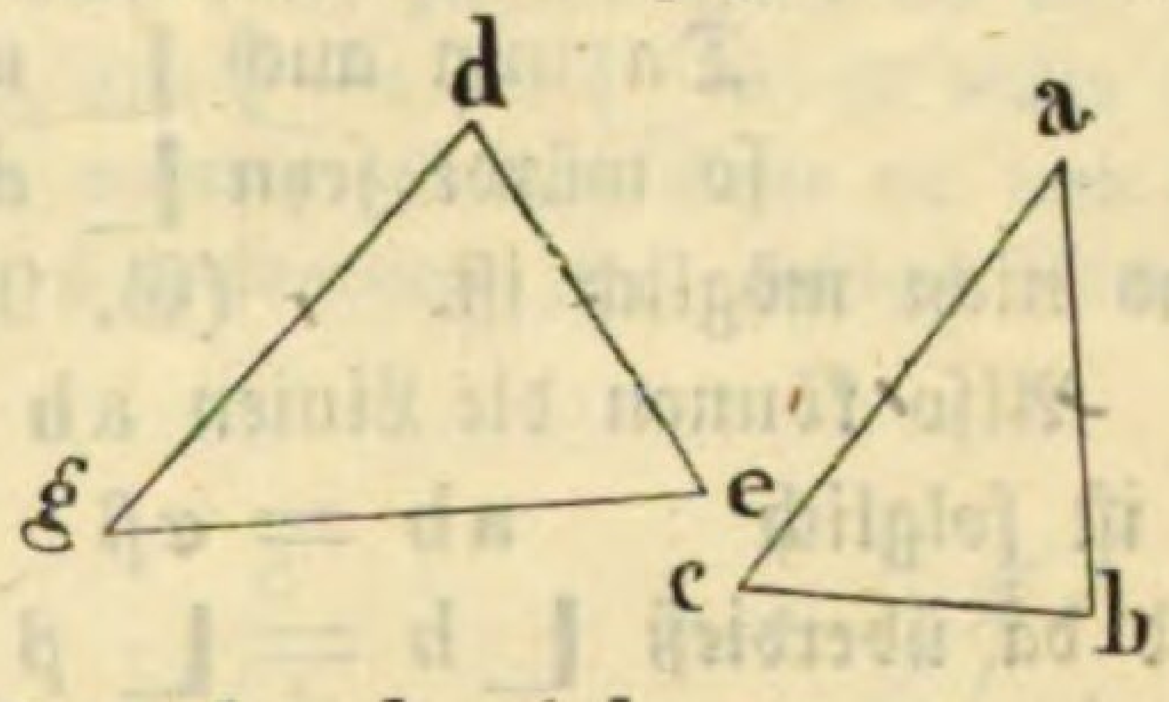
Der Lehrsatz gilt also auch für diesen Fall.

I. Satz 25. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken **dge** und **acb** zwei Seiten des einen **dg** und **de**, zweien Seiten des andern **ac** und **ab**, jede für sich gleich sind, die dritte Seite **ge** des einen Dreiecks aber größer ist, als die dritte Seite **cb** des andern: so ist auch in dem erstern der Winkel d, welcher der größern **ge** gegenüber liegt, größer als der Winkel a des andern Dreiecks, der der kleinern **cb** gegenüber liegt.

Beweis. Es ist entweder:

1) $\angle$ d = $\angle$ a oder
2) $\angle$ d < $\angle$ a oder
3) $\angle$ d > $\angle$ a.



Wäre $\angle$ d = $\angle$ a
da **dg** = **ac**
und **de** = **ab**
so würde seyn **ge** = **cb**. (4.)

Oder $\angle$ d < $\angle$ a
da **dg** = **ac** (p. h.)
und **de** = **ab** „
ge < **cb**. (24.)

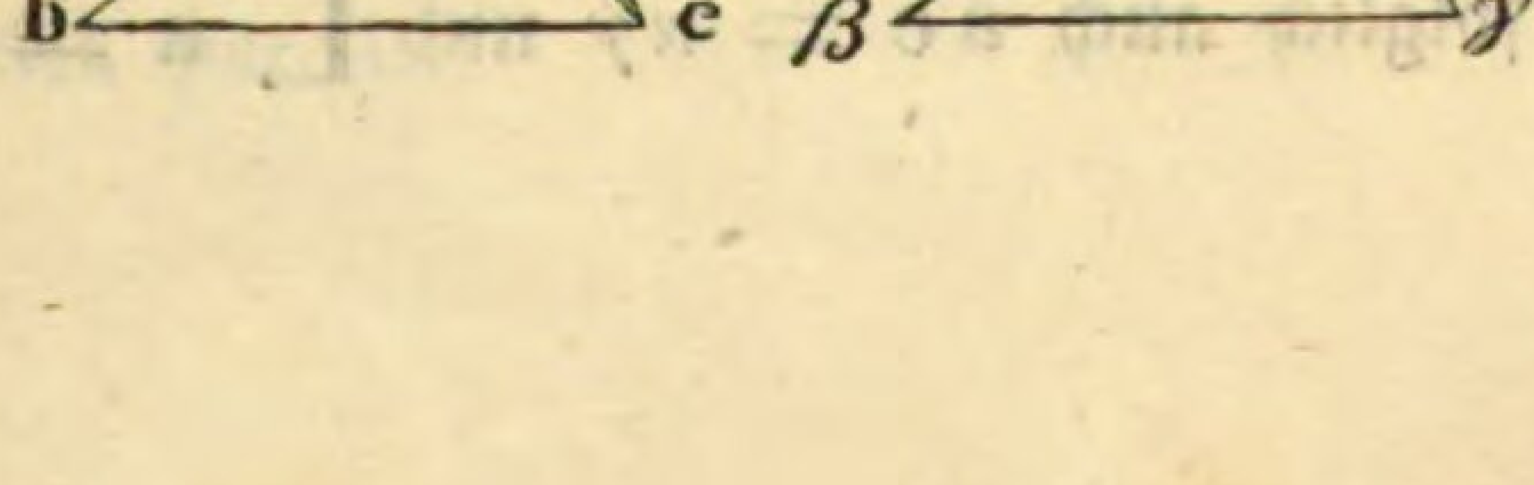
Beides widerspricht der Voraussetzung, wonach **ge** > **cb** seyn soll. Es kann also weder seyn $\angle$ d = $\angle$ a, noch $\angle$ d < $\angle$ a; folglich ist $\angle$ d > $\angle$ a, was bewiesen werden sollte.

I. Satz 26. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken **abc** und $\alpha\beta\gamma$ zwei Winkel, $\angle$ b und $\angle$ **acb**, des einen, zweien Winkeln β und γ des andern, jeder für sich gleich sind, also $\angle$ b = $\angle$ β und $\angle$ **acb** = $\angle$ γ, und eine Seite ist einer Seite gleich (es sey Dieses die Seite **bc** = $\beta\gamma$, welche von jenen Winkeln eingeschlossen wird, oder die Seite **ab** = $\alpha\beta$, die dem einen dieser Winkel c = γ gegenüber liegt): so sind auch die beiden übrigen Seiten des einen Dreiecks den beiden übrigen Seiten des andern, jede für sich, gleich; auch der dritte Winkel, $\angle$ **bac**, ist dem dritten Winkel α gleich. Beide Dreiecke decken sich also.

Erster Fall.

Es ist $\angle$ b = $\angle$ β
$\angle$ **acb** = $\angle$ γ
und **bc** = $\beta\gamma$
so ist auch **ab** = $\alpha\beta$



Beweis. Wäre Dieses nicht der Fall, so müßte eine dieser Linien größer als die andere seyn; es sey also:

ab $>$ $\alpha\beta$ und daher db $= \alpha\beta$. Ziehe cd.

Da nun $\angle$ b $= \angle\, \beta$ (p. h.)
und bc $= \beta\gamma$ „

so ist Δ dbc $\cong \Delta\, \alpha\beta\gamma$ (4.)
und daher $\angle$ dcb $= \angle\, \gamma$.
Da nun auch $\angle$ acb $= \angle\, \gamma$ (p. h.)

so würde seyn $\angle$ dcb $= \angle$ acb

was nicht möglich ist. (G. 9.)

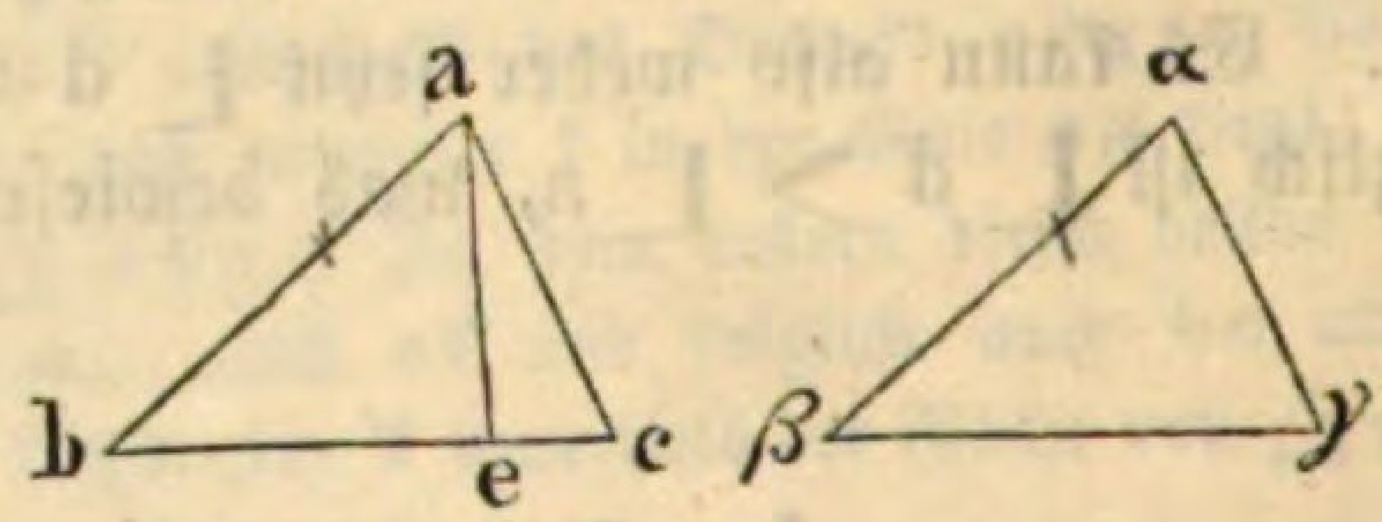
Also können die Linien ab und $\alpha\beta$ nicht verschieden seyn; und es ist folglich ab $= \alpha\beta$
und da überdieß $\angle$ b $= \angle\, \beta$
und bc $= \beta\gamma$

so ist Δ abc $\cong \Delta\, \alpha\beta\gamma$. (4.)

Folglich auch ac $= \alpha\gamma$ und $\angle$ a $= \angle\, \alpha$.

Zweiter Fall.

Wenn $\angle$ b $= \angle\, \beta$
$\angle$ c $= \angle\, \gamma$
und ab $= \alpha\beta$
so ist auch bc $= \beta\gamma$



Beweis. Wäre Dieses nicht der Fall, so müßte eine dieser beiden Linien größer als die andere seyn. Es sey also bc $> \beta\gamma$
und daher be $= \beta\gamma$. Ziehe ae.

Da nun $\angle$ b $= \angle\, \beta$ (p. h.)
und ba $= \beta\alpha$ „

so ist Δ abe $\cong \Delta\, \alpha\beta\gamma$ (4.)
und daher $\angle$ aeb $= \angle\, \gamma$
Da nun $\angle$ c $= \angle\, \gamma$

so würde seyn $\angle$ aeb $= \angle$ e

was nicht möglich ist. (16.)

Die Seiten bc und $\beta\gamma$ sind also nicht verschieden, und folglich ist:

bc $= \beta\gamma$

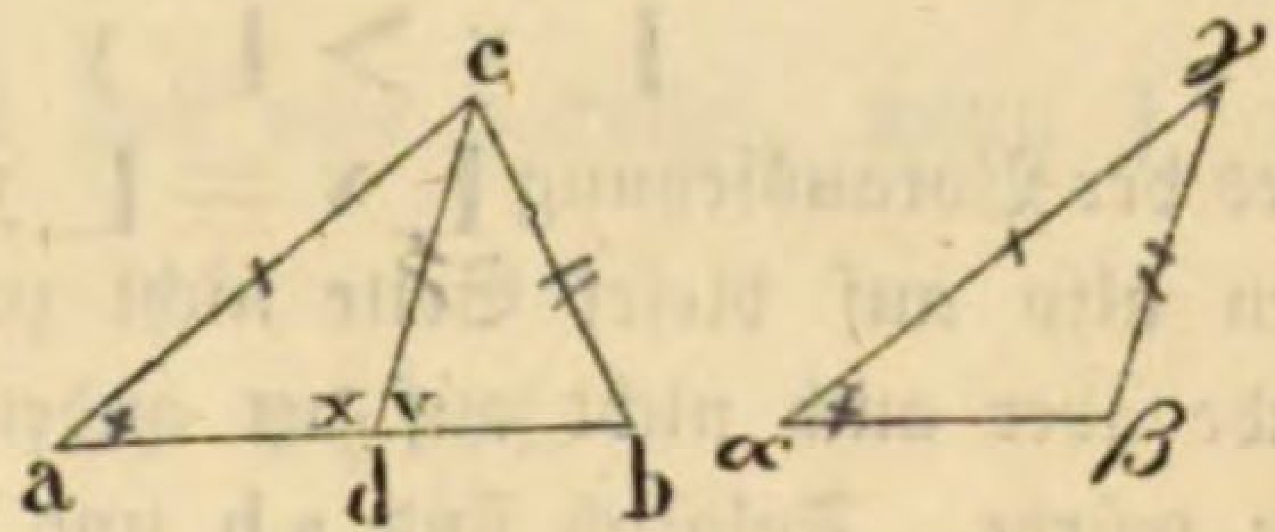
Da nun $\angle$ b $= \angle\, \beta$
und ba $= \beta\alpha$

so ist Δ abc $\cong \Delta\, \alpha\beta\gamma$ (4.)

folglich auch ac $= \alpha\gamma$ und $\angle$ a $= \angle\, \alpha$.

Zusatz 1. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel gleich haben, so daß der erste Winkel dem ersten, und der zweite dem zweiten gleich ist; und sie haben außerdem eine gleiche Seite, die in beiden dieselbe Lage hat: so haben diese Dreiecke auch die übrigen beiden Seiten und den dritten Winkel gleich, und können so in einander gelegt werden, daß sie sich decken.

Zusatz 2. Haben zwei Dreiecke **acb** und $\alpha\gamma\beta$ zwei Seiten gleich, so daß die erste **ac** der ersten $\alpha\gamma$, und die zweite **cb** der zweiten $\gamma\beta$ gleich ist; und ist außerdem in beiden Dreiecken der, einer gleichen Seite **cb** und $\gamma\beta$ gegenüber liegende Winkel gleich groß, also $\angle a = \angle \alpha$: so decken sich diese Dreiecke, oder es sind die, der anderen gleichen Seite **ca** und $\gamma\alpha$ gegenüber liegenden Winkel **b** und β zusammen zwei rechten Winkeln gleich.



Beweis. Ist $\angle acb = \angle \gamma$, so decken sich die Dreiecke **acb** und $\alpha\gamma\beta$. (4.) Sollen sie sich also nicht decken, so muß einer dieser Winkel größer seyn als der andere. Es sey hiernach $\angle acb > \angle \gamma$; man ziehe **cd** so, daß $\angle acd = \gamma$ (23.), so ist nun:

$$\angle acd = \angle \gamma \quad \text{(p. c.)}$$
$$ca = \gamma\alpha \quad \text{(p. h.)}$$
$$\angle a = \angle \alpha \quad \text{„}$$

Daher $\triangle acd \cong \triangle \alpha\gamma\beta$ (26.)

folglich ist $cd = \gamma\beta$ und $\angle x = \angle \beta$

Da nun $cb = \gamma\beta$ (p. h.)

so ist $cb = cd$ (G. 1.) also $\angle y = \angle b$ (5.)

folglich ist auch $\angle x + \angle y = \angle \beta + \angle b$. (G. 2.)

Da nun $\angle x + \angle y = 2R$ (13.)

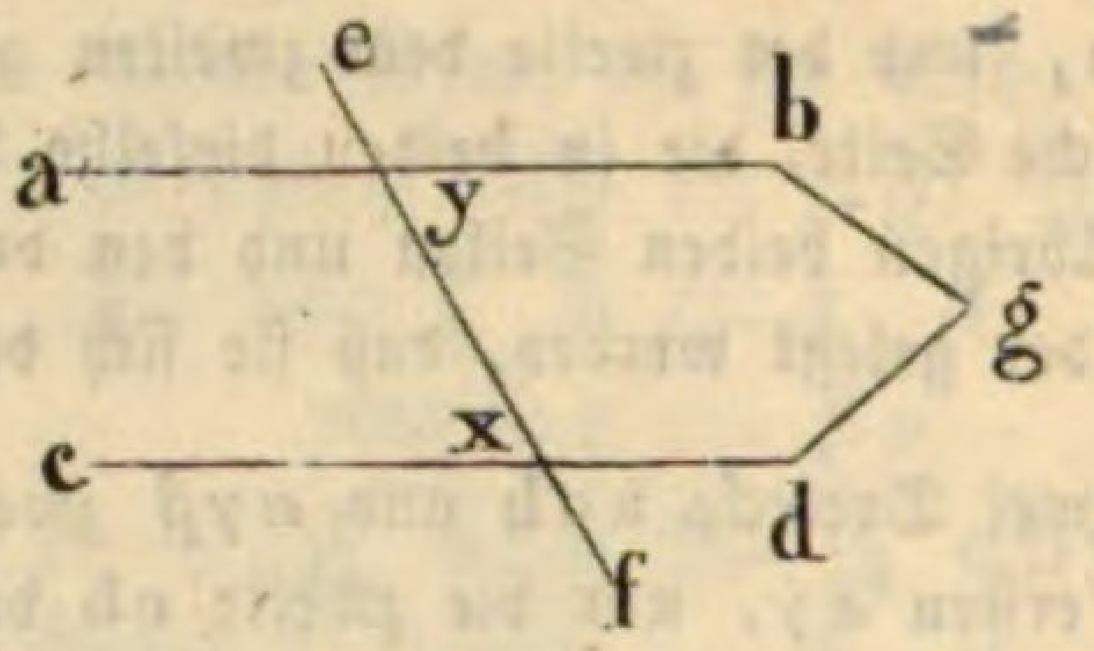
so ist auch $\angle \beta + \angle b = 2R$

was bewiesen werden sollte.

Zusatz 3. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten zweien Seiten gleich, die eine der einen und die andere der anderen; und sie haben auch den Winkel gleich, welcher der größern dieser Seiten gegenüber liegt: so decken sie sich.

I. Satz 27. Lehrsatz.

Werden zwei gerade Linien ab und cd von einer dritten ef geschnitten, und sind die dadurch gebildeten Wechselwinkel x und y gleich groß, so sind diese Linien parallel.



Beweis. Wären die Linien **ab** und **cd** nicht parallel, so würden sie, genugsam verlängert, an einer Seite zusammen treffen. Es sey Dieses bei **g** der Fall, so ist **egf** ein Dreieck, und **x** ein Außenwinkel desselben; daher ist alsdann:

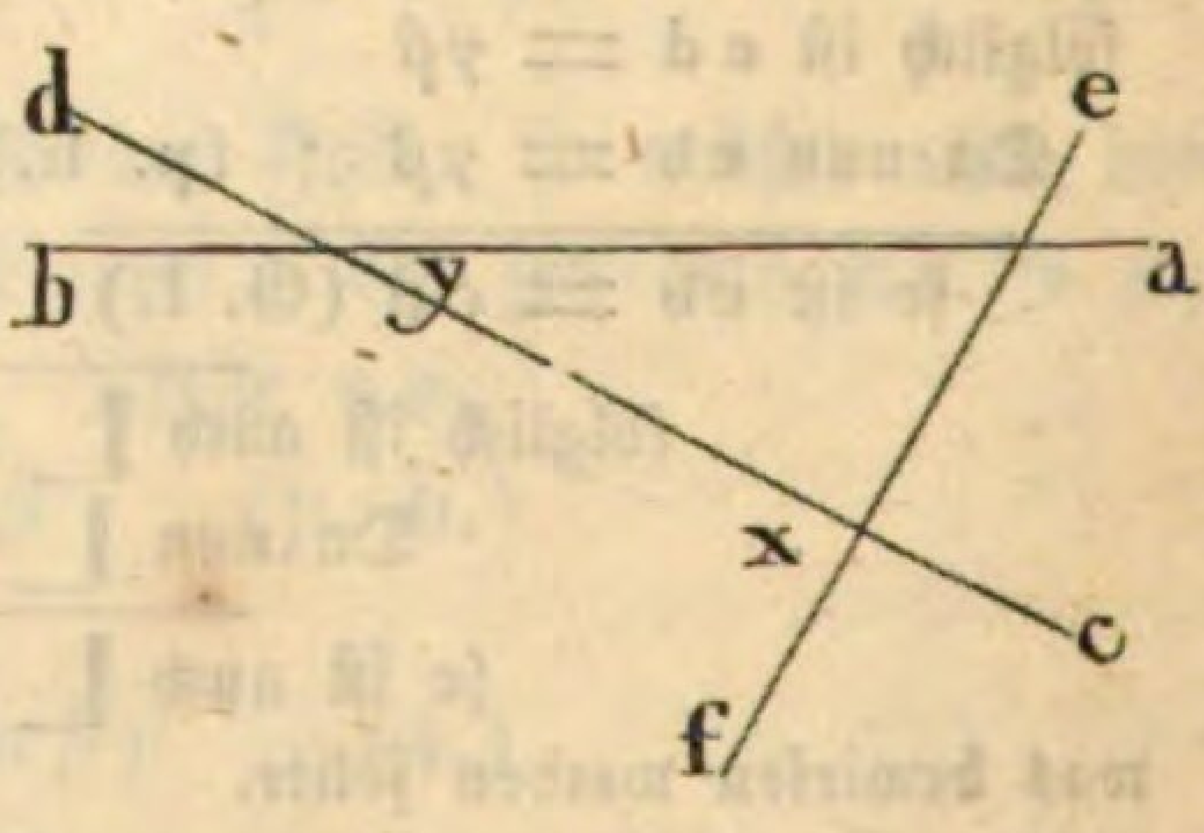
$$\angle x > \angle y \quad (16.)$$

welches der Voraussetzung $\angle x = \angle y$ widerspricht. Die **ab** und **cd** können also auf dieser Seite nicht zusammen treffen; aus gleichem Grunde aber auch nicht auf der anderen Seite, weil sonst $y > x$ folgen würde. Folglich sind **ab** und **cd** parallel. (E. 35.)

Zusatz. Die Richtigkeit dieses Lehrsatzes läßt auch auf folgende Art sich nachweisen:

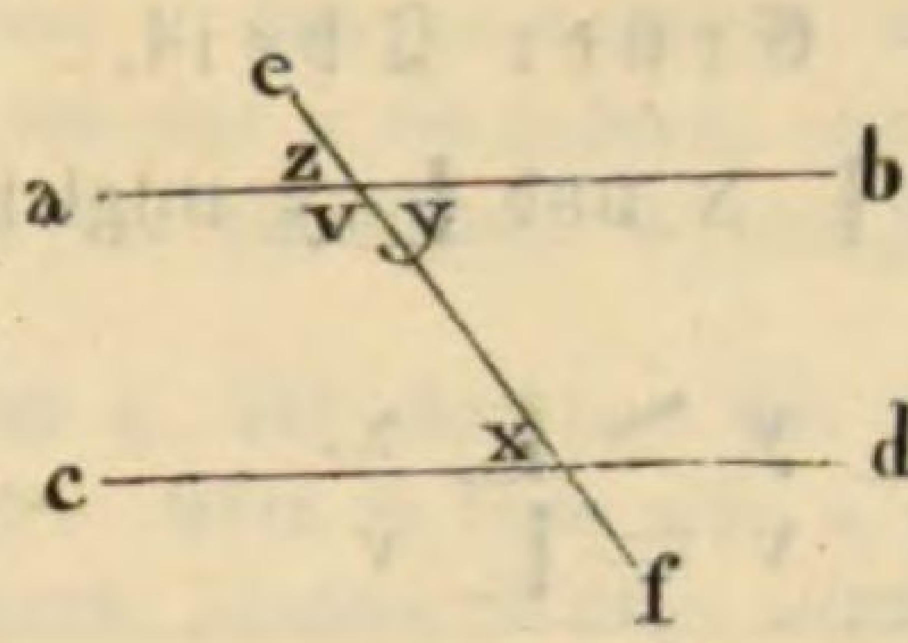
Wenn zwei sich schneidende Linien **ab** und **cd** von einer dritten **ef** geschnitten werden, so können die Wechselwinkel **x** und **y** nicht gleich groß seyn; denn es ist $\angle x > \angle y$ (16.)

Hieraus folgt unmittelbar: Sind die Wechselwinkel **x** und **y** gleich groß, so können die Linien **ab** und **cd** sich nicht schneiden. (E. 35.)



I. Satz 28. Lehrsatz.

Werden die beiden geraden Linien **ab** und **cd** von einer dritten **ef** geschnitten, und es ist der äußere Winkel **z** dem ihm gegenüber, an derselben Seite liegenden, innern Winkel **x** gleich; oder es sind die beiden innern, an derselben Seite liegenden Winkel **v** und **x** zusammen zwei rechten Winkeln gleich: so sind die Linien **ab** und **cd** parallel.



Erster Theil.

Beweis. Da $\angle z = \angle x$ (p. h.)
und $\angle z = \angle y$ (15.)

so ist $\angle y = \angle x$ (G. 1.)

also ab parallel cd. (27.)

Die Linien ab und cd sind also parallel, wenn $\angle z = \angle x$ ist.

Zweiter Theil.

Da $\angle v + \angle x = 2R$ (p. h.)
und $\angle v + \angle y = 2R$ (13.)

so ist $\angle v + \angle y = \angle v + \angle x$,

und daher $\angle y = \angle x$. (G. 3.)

Folglich ist ab parallel cd (27.)

Die Linien ab und cd sind also auch parallel, wenn $\angle v$ und $\angle x$ zusammen zwei rechte Winkel betragen.

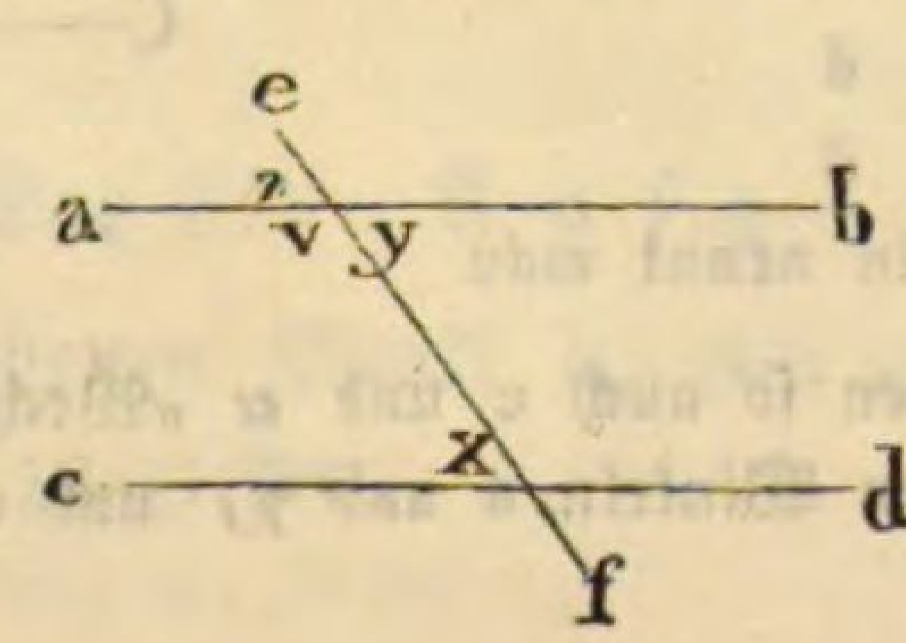
I. Satz 29. Lehrsatz.

Sind zwei gerade Linien ab und cd parallel: so sind, wenn sie von einer dritten ef geschnitten werden,

1) die Wechselwinkel x und y gleich groß; ferner ist

2) der äußere Winkel z dem innern gegenüber, an derselben Seite liegenden x gleich; und

3) die beiden innern an derselben Seite liegenden Winkel v und x sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.



Erster Theil.

Beweis. Wäre $\angle x$ und $\angle y$ ungleich, so müßte einer der größere seyn.

Es sey daher $\angle y > \angle x$.

Da nun $\angle v = \angle v$

so ist auch $\angle y + \angle v > \angle x + \angle v$

und weil $\angle y + \angle v = 2\,R$ (13.)

so ist $2\,R > \angle x + \angle v$.

Daher schneiden sich die Linien **ba** und **dc** auf der Seite, wo die Winkel v und x liegen. (G. 11.)

Die Linien **ab** und **cd** sind also nicht parallel, was der Voraussetzung widerspricht; folglich ist die Annahme falsch, „daß $\angle x$ und $\angle y$ ungleich sind"; also können diese Winkel nicht ungleich seyn, wenn die Linien **ab** und **cd** parallel seyn sollen, folglich ist $\angle x = \angle y$.

Zweiter Theil.

Aus der Voraussetzung „**ab** parallel **cd**" folgt also

$\angle x = \angle y$.

Da nun $\angle y = \angle z$ (13.)

so folgt auch $\angle x = \angle z$ (G. 1.)

Dritter Theil.

Da sonach, wenn **ab** und **cd** parallel sind,

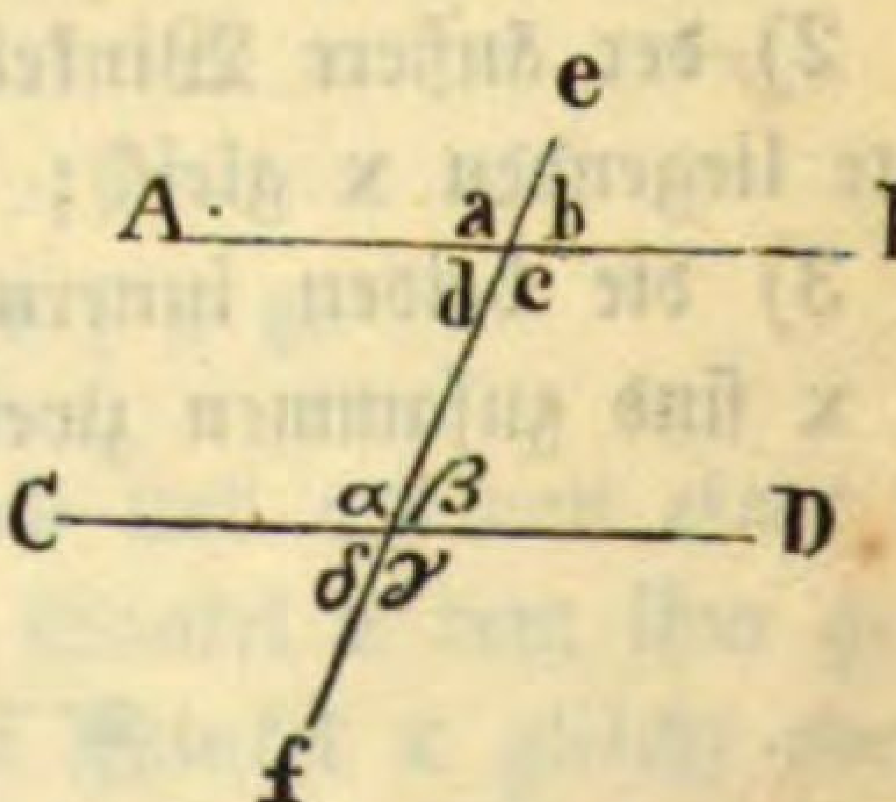
$\angle x = \angle z$ seyn muß:

so ist auch $\angle x + \angle v = \angle z + \angle v$ (G. 2.)

aber $\angle z + \angle v = 2\,R$ (13.)

es ist also auch $\angle x + \angle v = 2\,R$.

Anmerkungen. Werden zwei gerade Linien **AB** und **CD** von einer dritten **ef** geschnitten, so entstehen an jedem der beiden Durchschnittspunkte vier Winkel:



a, b, c, d

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$

und von diesen Winkeln nennt man

1) **d** und β und eben so auch **c** und α „Wechselwinkel". Dieselbe Benennung kann auch den Winkeln **a** und γ, und eben so **b** und δ beigelegt werden.

2) Die Winkel a und α sind an derselben Seite „gegenüber liegende Winkel", von welchen der eine a ein äußerer, und der andere α ein innerer ist. Dasselbe gilt auch für die Winkel b und β, für δ und d, und für γ und c.

3) Die Winkel d und α, und eben so c und β, sind an derselben Seite liegende „innere Winkel". Eben so kann man a und δ, und auch b und γ an derselben Seite liegende „äußere Winkel" nennen.

Die ganze Theorie der Parallelen besteht in der Beantwortung der beiden Fragen:

1) Unter welchen Bedingungen sind zwei Linien parallel? und 2) welche Eigenschaften kommen parallelen Linien zu? Die erste dieser beiden Fragen wird durch die Sätze 27 und 28 beantwortet; und durch Satz 29 wird gezeigt, „daß jene Sätze auch umgekehrt Gültigkeit haben", wodurch auch die zweite Frage beantwortet ist.

I. Satz 30. Lehrsatz.

Sind zwei gerade Linien ab und $\alpha\beta$ einer dritten cd parallel, so sind sie einander selbst parallel.

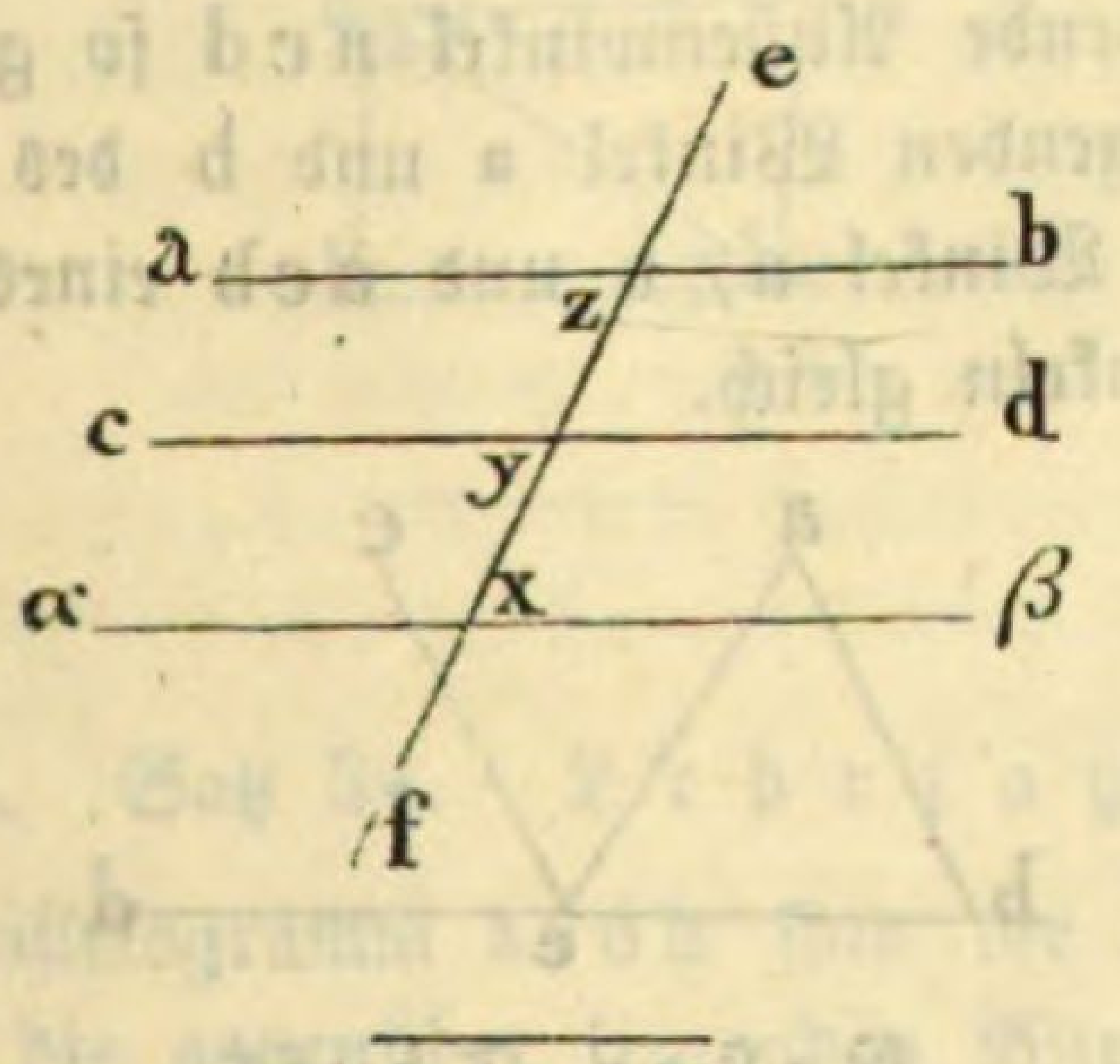
Beweis. Es werden diese Linien von ef geschnitten.

Da nun ab parallel cd, so ist $\llcorner z = \llcorner y$ (29.)

$\alpha\beta$ „ cd „ $\llcorner y = \llcorner x$ „

folglich ist auch $\llcorner z = \llcorner x$

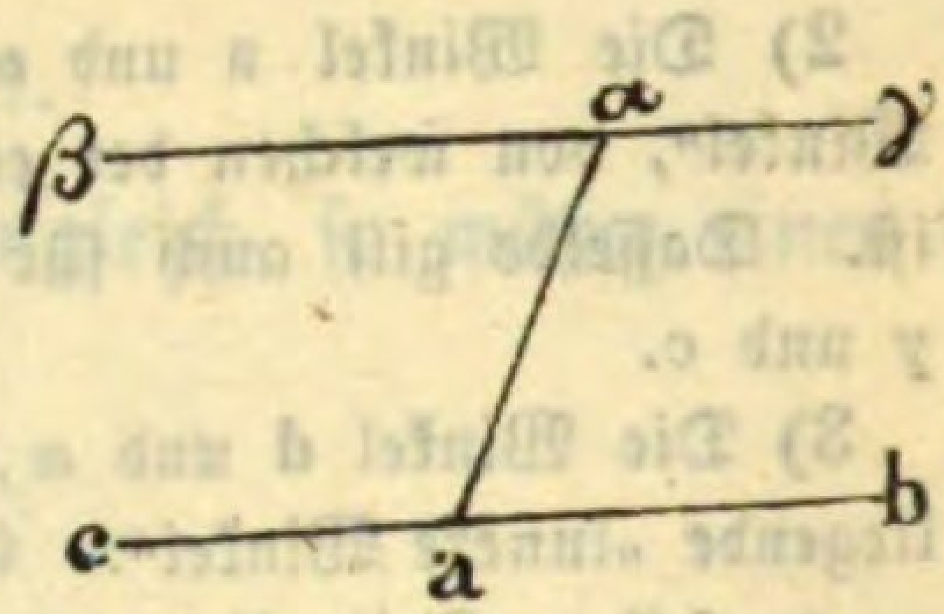
und daher ab parallel $\alpha\beta$. (27.)



I. Satz 31. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt α, eine gerade Linie $\beta\gamma$ einer gegebenen cb parallel zu ziehen.

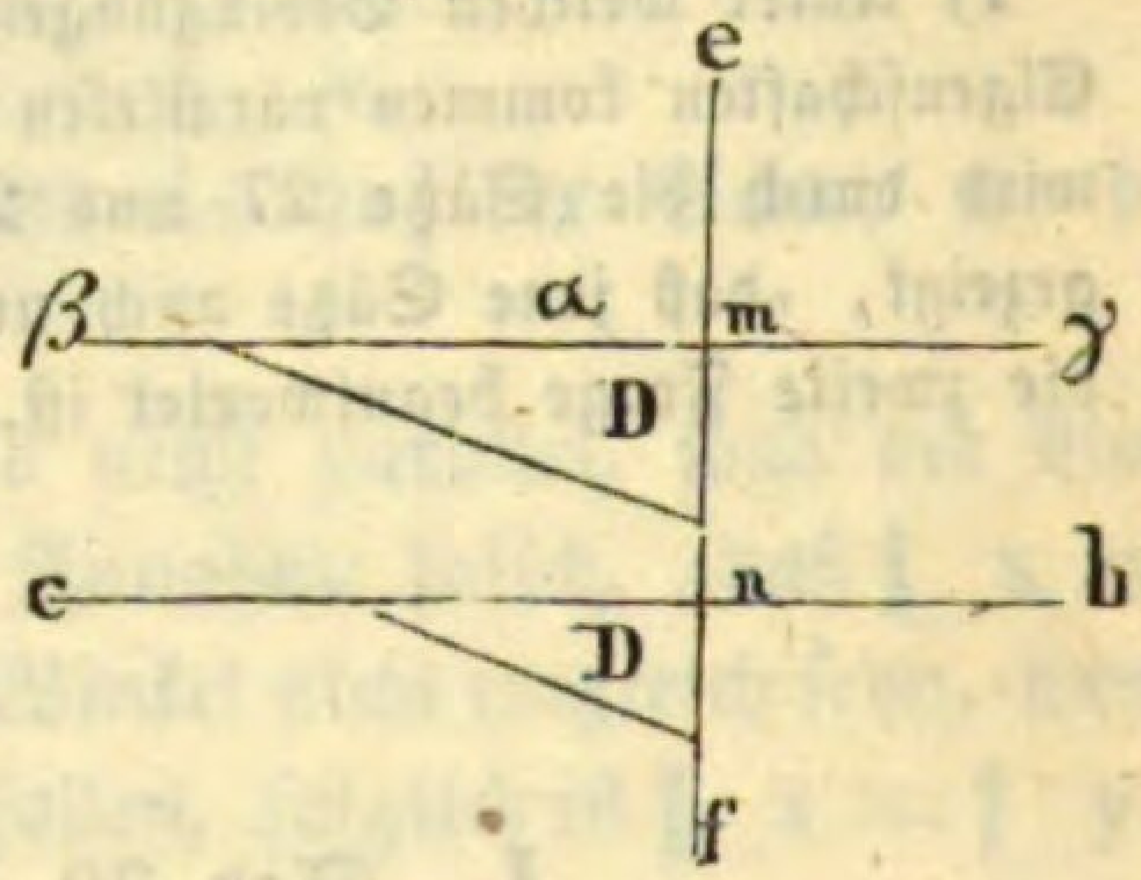
Auflösung. 1) Nimm in **bc** beliebig den Punkt **a**.



2) Ziehe $a\alpha$ und lege an α den Winkel $\beta\alpha a = \angle\, b a \alpha$ (23.), und verlängere $\beta\alpha$ nach γ: so ist $\beta\gamma$ parallel **cb**.

Beweis. Da $\angle\, \beta\alpha a = \angle\, b a \alpha$ (p. c.)

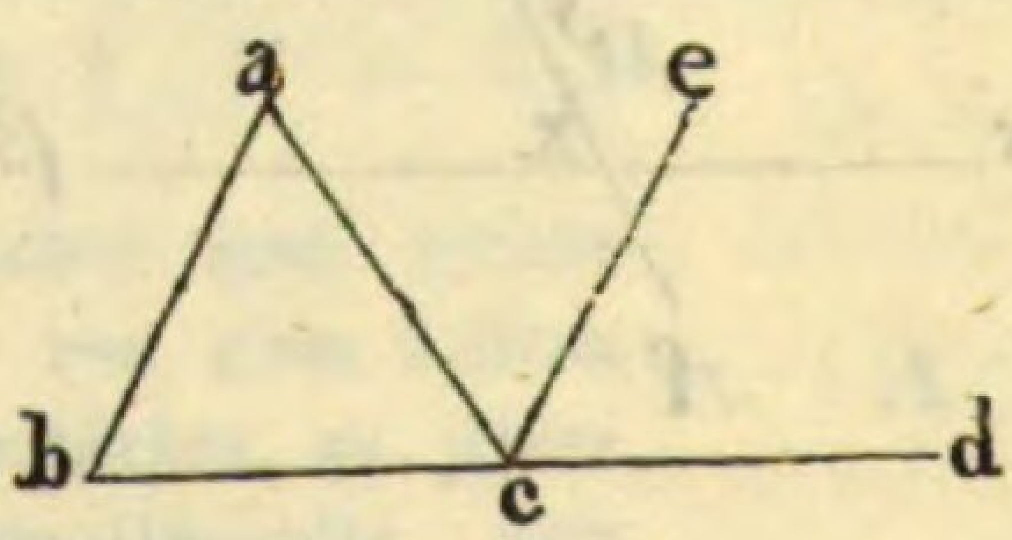
so ist $\beta\gamma$ parallel **cb**. (27.)



Anmerkung. Das praktische Verfahren, um durch einen gegebenen Punkt α eine der **bc** parallele Linie zu ziehen, besteht darin: daß man ein Dreieck **D** an der Linie **cb** anlegt, und an der einen Seite desselben das Lineal **ef**. Dieses wird unverrückt in seiner Lage erhalten und **D** so weit heraufgeschoben, bis die Kante desselben an α liegt. Zieht man nun an dieser Kante die $\beta\gamma$, so ist diese „die Parallele"; denn es ist $\angle\, \beta m f = \angle\, c n f$, da Beide dem Winkel des Dreiecks gleich sind; und die Linien $\beta\gamma$ und **cb** sind also parallel, weil der innere Winkel $\beta m f$ dem, an derselben Seite gegenüber liegenden äußern Winkel **cnf** gleich ist.

I. Satz 32. Lehrsatz.

Wird eine Seite **bc** eines Dreiecks nach **d** verlängert: so ist der dadurch entstehende Außenwinkel **acd** so groß, als die beiden ihm gegenüber liegenden Winkel **a** und **b** des Dreiecks zusammen. Auch sind die drei Winkel **a**, **b** und **acb** eines Dreiecks zusammen zweien rechten Winkeln gleich.



Erster Theil.

Beweis. Durch **c** ziehe die **ce** parallel der **ba** (31.): so ist

$$\angle\, a = \angle\, ace \quad (29.)$$

$$\text{und } \angle\, b = \angle\, ecd \quad ''$$

$$\text{also } \angle\, a + \angle\, b = \underbrace{\angle\, ace + \angle\, ecd}$$

$$\text{oder } \angle\, a + \angle\, b = \angle\, acd,$$ welches das Erste war.

Zweiter Theil.

Da $\angle a + \angle b = \angle acd$
und $\angle acb = \angle acb$

so ist $\angle a + \angle b + \angle acb = \angle acd + \angle acb$.
Nun ist $\angle acd + \angle acb = 2 R$ (13.)
folglich ist auch $\angle a + b + \angle acb = 2 R$.
Die drei Winkel eines Dreiecks sind also zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

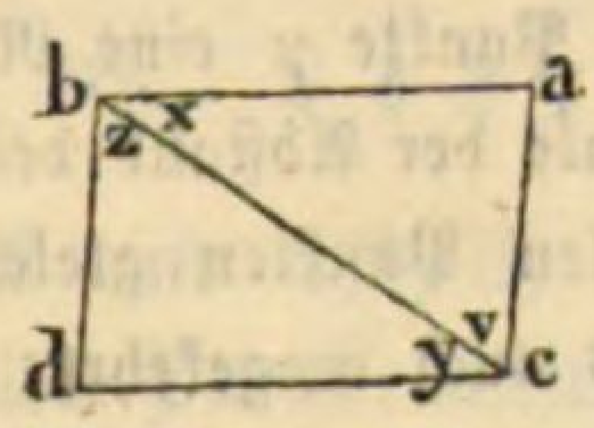
I. Satz 33. Lehrsatz.

Sind zwei Linien **ab** und **cd** gleich und parallel: so sind auch die Linien **ac** und **bd**, welche die Endpunkte derselben an einer und derselben Seite verbinden, ebenfalls gleich und parallel.

Beweis. Da **ab** parallel **dc** (p. h.)
so ist $\angle x = \angle y$. (29.)
Da nun $ab = dc$ (p. h.)
und $bc = cb$

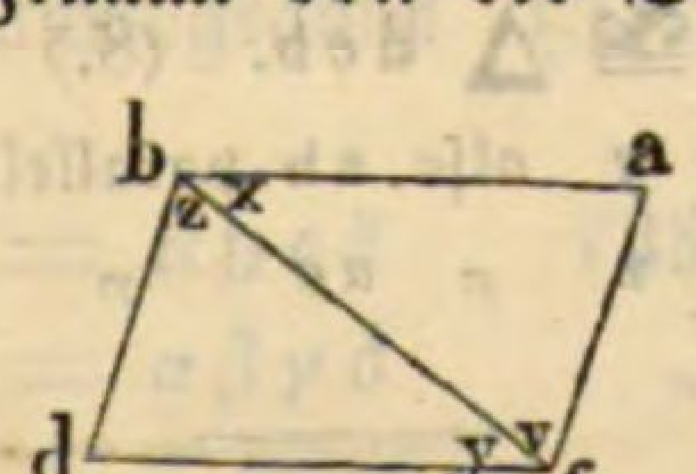
so ist $\triangle abc \cong \triangle dcb$ (4.)
folglich ist $ac = db$ und $\angle v = \angle z$

also auch **bd** parallel **ac**. (27.)



I. Satz 34. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramm **acdb** sind die gegenüber liegenden Seiten sowohl, als die gegenüber liegenden Winkel einander gleich; auch wird das Parallelogramm von der Diagonale **bc** halbirt.



Beweis. (p. h.) ab parallel cd daher $\angle x = \angle y$ (29.)
„ ac „ bd „ $\angle v = \angle z$
Da nun $bc = cb$

so ist auch $\Delta abc \cong \Delta dcb$ (26.)
und folglich ist $ab = cd$
$ac = bd$
und $\angle a = \angle d$.

Und da $\angle x = \angle y$
und $\angle z = \angle v$

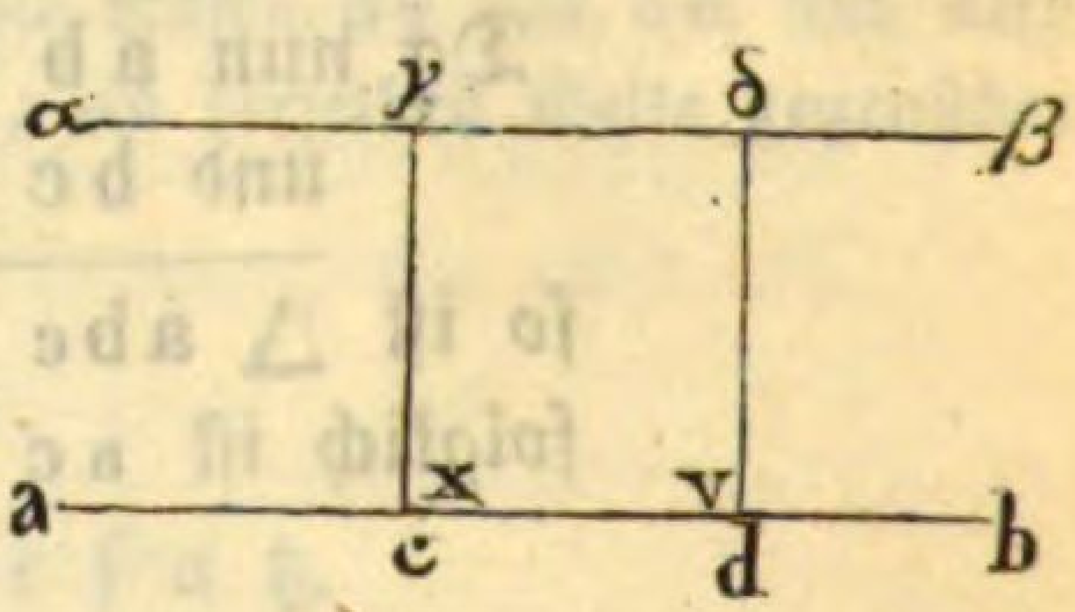
so ist $x + z = y + v$ also $\angle b = \angle c$.

Weil endlich $\Delta abc \cong \Delta cdb$, so ist jedes dieser beiden Dreiecke die Hälfte des Parallelogramms.

Anmerkungen. 1) Ist ab parallel $\alpha\beta$, und man errichtet in zwei beliebigen Punkten c und d der ab die Normalen $c\gamma$ und $d\delta$, welche die $\alpha\beta$ in γ und δ schneiden: so sind diese Normalen gleich groß.

Beweis. Da $c\gamma$ und auch $d\delta$ normal ist auf ab,
so ist $\angle x = R$
und $\angle v = R$

daher $\angle x + \angle v = 2R$
und folglich ist $c\gamma$ parallel $d\delta$. (28.)
Es ist aber auch cd „ $\gamma\delta$ (p. h.)
folglich ist $cd\delta\gamma$ ein Parallelogramm,
und $c\gamma = d\delta$. (34.)

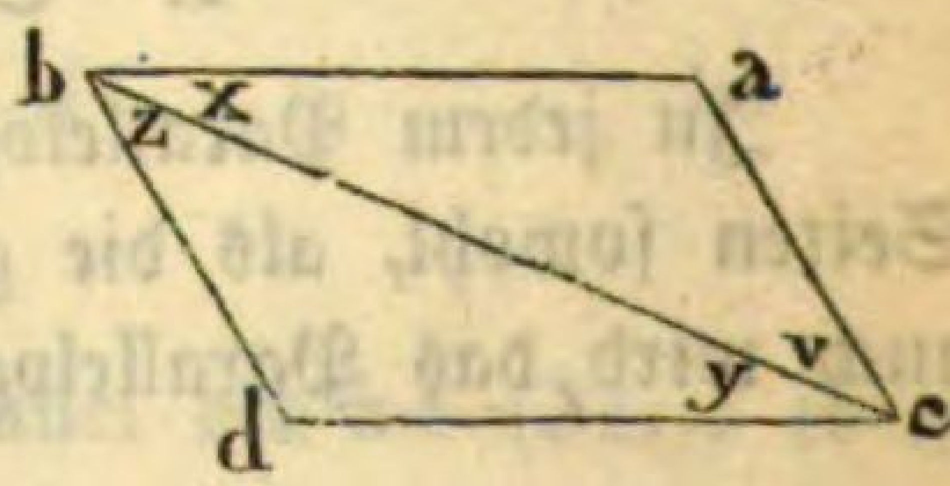


Zusatz. Wird von einem Punkte γ eine Normale γc auf eine Gerade ab gefällt, so ist diese Normale der Abstand des Punktes γ von ab. Parallele Linien stehen also in allen Punkten gleich weit ab von einander. Aus (33.) folgt nun übrigens auch umgekehrt: daß gerade Linien, die überall gleichweit von einander abstehen, parallel sind.

2) Wenn in einem Viereck abdc je zwei gegenüber liegende Seiten gleich groß sind, also $ab = cd$ und $ac = bd$: so sind auch je zwei gegenüber liegende Seiten parallel.

Beweis. Da $ab = dc$ (p. h.)
$ac = db$ „
und $cb = bc$

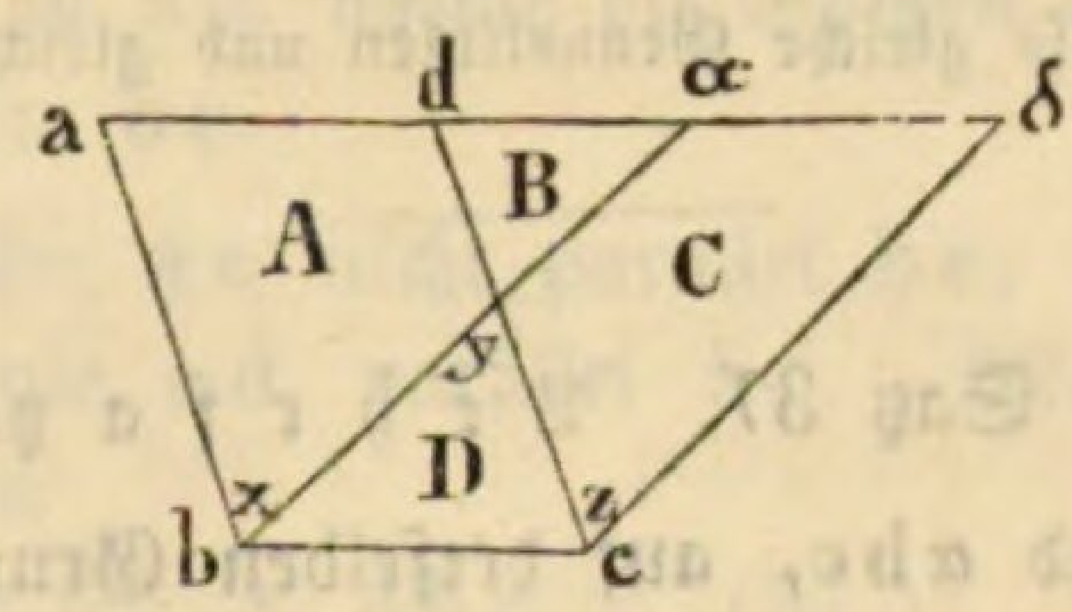
so ist $\Delta abc \cong \Delta dcb$. (8.)



Folglich ist $\angle x = \angle y$ also ab parallel cd (27.)
und $\angle v = \angle z$ „ ac „ bd „

I. Satz 35. Lehrsatz.

Parallelogramme abcd und $\alpha b c \delta$, auf derselben Grundlinie bc, und in einerlei Parallelen $a\delta$ und bc, sind gleich groß.



Beweis. Es ist ab parallel dc, also $\angle x = \angle y$ (29.)

αb „ δc „ $\angle y = \angle z$

daher auch $\angle x = \angle z$.

Da nun $ab = dc$ (34.)

und $\alpha b = \delta c$ „

so folgt $\Delta\, ab\alpha \cong \Delta\, dc\delta$ (4.)

oder $A + B = C + B$

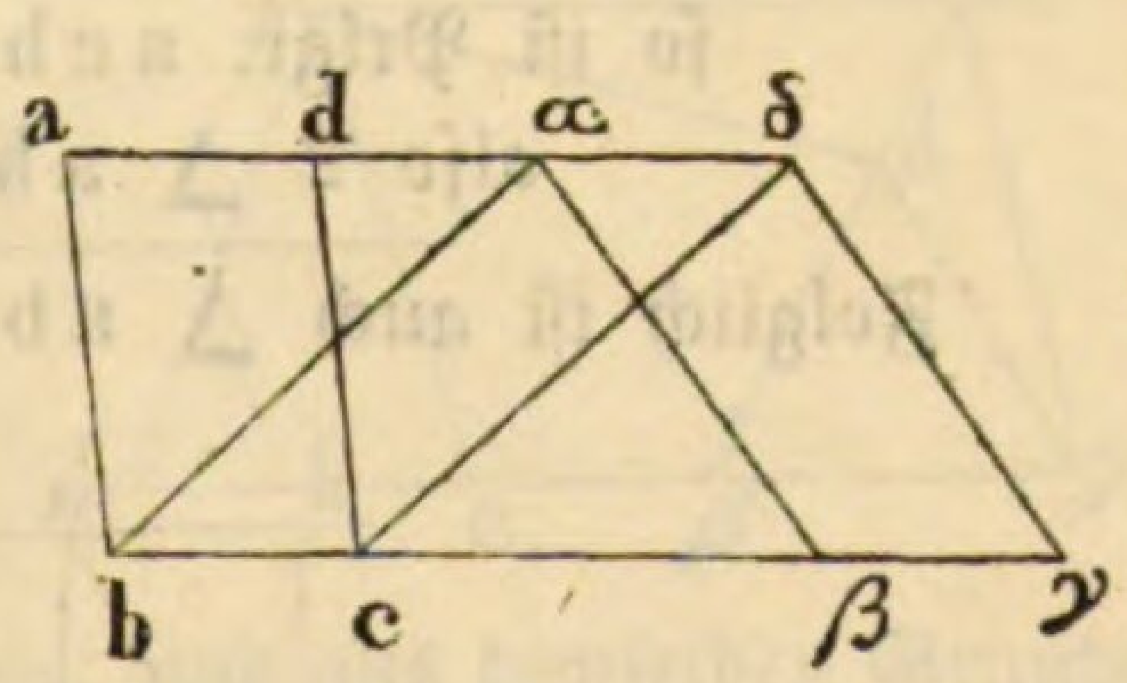
daher auch $A = C$ (G. 3.)

und folglich $A + D = C + D$ (G. 2.)

nämlich es ist $abcd = \alpha bc\delta$.

I. Satz 36. Lehrsatz.

Parallelogramme abcd und $\alpha\beta\gamma\delta$, auf gleichen Grundlinien bc und $\beta\gamma$, und in einerlei Parallellinien $a\delta$ und $b\gamma$ sind gleich groß.



Beweis. Ziehe $b\alpha$ und $c\delta$.

Da $bc = \beta\gamma$ (p. h.)

und $\beta\gamma = \alpha\delta$ (34.)

so ist $bc = \alpha\delta$

aber auch bc parallel $\alpha\delta$ (p. h.)

daher ist $\alpha bc\delta$ ein Parallelogramm (33.)

Hiernach ist nun

$abcd = \alpha bc\delta$ (35.)

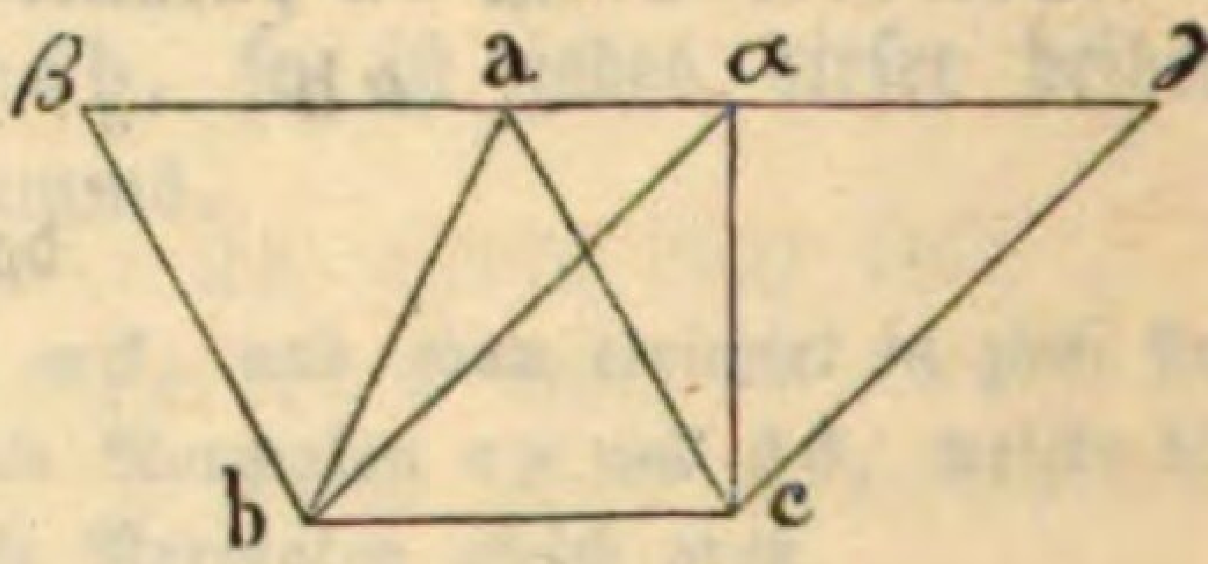
und $\alpha bc\delta = \alpha\beta\gamma\delta$ „

folglich auch $abcd = \alpha\beta\gamma\delta$.

Anmerkung. Wird die eine Seite bc eines Parallelogramms die Grundlinie desselben genannt, so ist der Abstand dieser Linie von der ihr parallelen ad die Höhe des Parallelogramms; da nun Parallelen überall denselben Abstand von einander haben: so folgt, „daß Parallelogramme in einerlei Parallellinien gleiche Höhe haben". Die gleichen Parallelogramme abcd und $\alpha\beta\gamma\delta$ haben also gleiche Grundlinien und gleiche Höhe.

I. Satz 37. Lehrsatz.

Dreiecke abc und αbc, auf derselben Grundlinie bc, und in einerlei Parallellinien aα und bc, sind gleich groß.



Beweis. Verlängere αa zu beiden Seiten, und ziehe durch b die bβ prll. ca (31.)
„ c „ cγ „ bα „
so ist Prlgr. acbβ = Prlgr. αbcγ (35.)
aber acbβ = 2 Δ abc und αbcγ = 2 Δ αbc (34.)

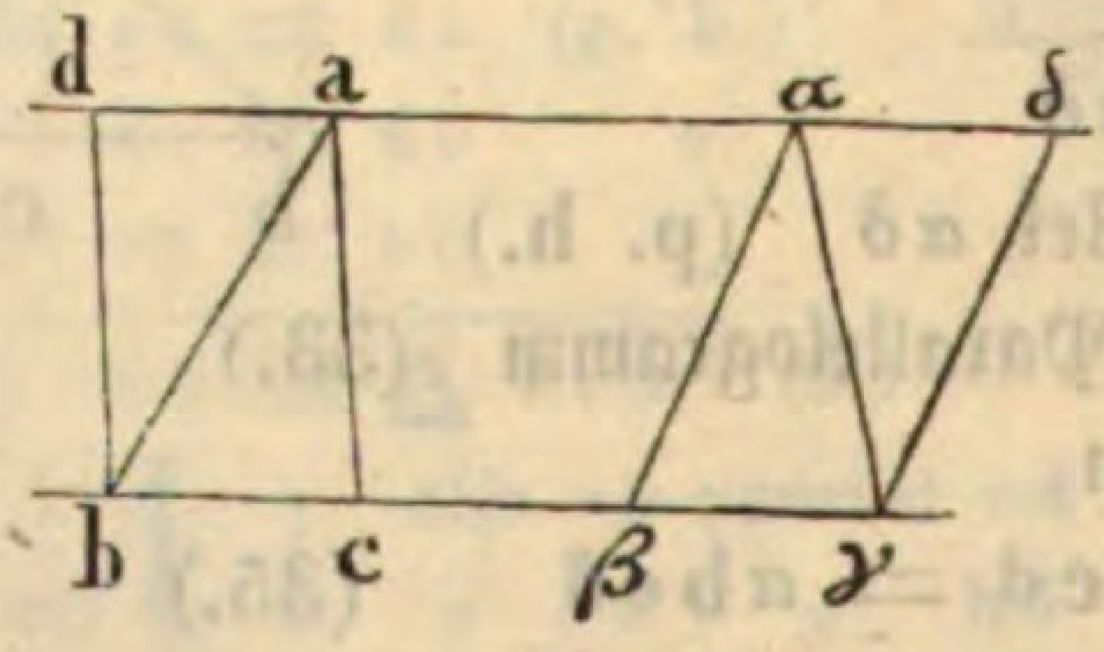
Also ist 2 Δ abc = 2 Δ αbc
und folglich auch Δ abc = Δ αbc. (G. 7.)

I. Satz 38. Lehrsatz.

Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$, auf gleichen Grundlinien bc und $\beta\gamma$, und in einerlei Parallelen aα und bγ, sind einander gleich.

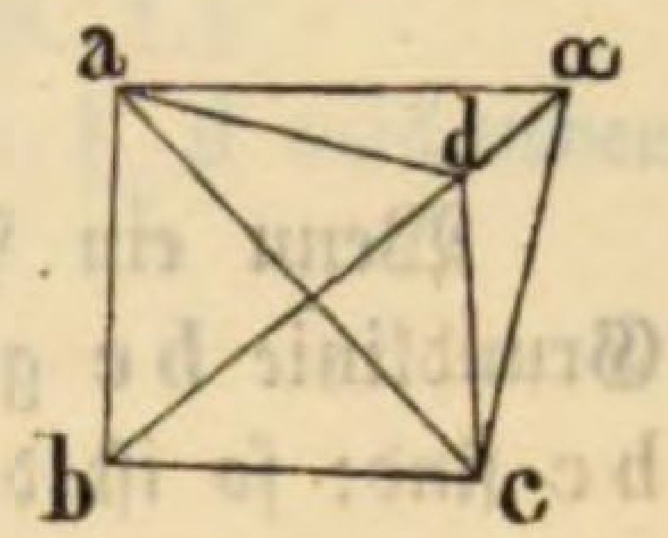
Beweis. Man verlängere aα zu beiden Seiten, und ziehe durch b die bd parallel ca (31.)
„ γ „ $\gamma\delta$ „ $\beta\alpha$ „
so ist Prlgr. acbd = Prlgr. $\alpha\beta\gamma\delta$ (36.)
also 2 Δ abc = 2 Δ $\alpha\beta\gamma$. (34.)

Folglich ist auch Δ abc = Δ $\alpha\beta\gamma$. (G. 7.)



I. Satz 39. Lehrsatz.

Haben zwei Dreiecke abc und αbc die Grundlinie bc gemein, liegen auf einer und derselben Seite dieser Grundlinie, und sind gleich groß: so ist aα, welche die Spitzen a und α der Dreiecke verbindet, parallel der bc.



Beweis. Wäre aα nicht parallel bc, so sey eine andere Linie ad parallel bc. Man ziehe cd, so ist nun

Δ abc = Δ dbc. (37.)
Da aber Δ abc = Δ αbc (p. h.)

so folgt Δ αbc = Δ dbc (G. 1.)
was nicht möglich ist. (G. 9.)

Folglich ist die Annahme, „daß ad parallel bc sey" falsch; und es kann aus diesem Grunde keine andere Linie außer aα parallel bc seyn. Folglich ist aα parallel bc.

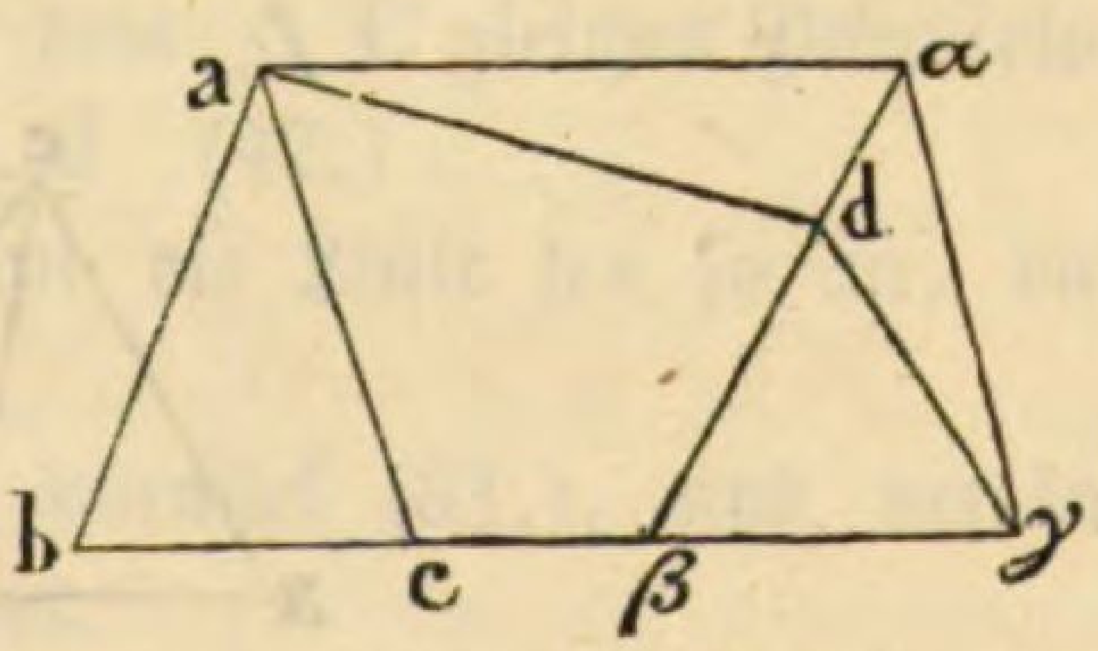
I. Satz 40. Lehrsatz.

Haben zwei Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$, die auf derselben Linie bγ an einerlei Seite derselben liegen, gleiche Grundlinien bc und $\beta\gamma$, und sind diese Dreiecke gleich groß: so liegen ihre Spitzen a und α in einer Parallele aα der bγ, in welcher die Grundlinien der Dreiecke liegen.

Beweis. Wäre die aα nicht parallel der bγ, so sey eine andere Linie ad parallel derselben. Man ziehe dγ so ist nun

Δ abc = Δ d$\beta\gamma$. (38.)
Da nun Δ abc = Δ $\alpha\beta\gamma$ (p. h.)

so ist Δ d$\beta\gamma$ = Δ $\alpha\beta\gamma$
was nicht möglich ist. (G. 9.)



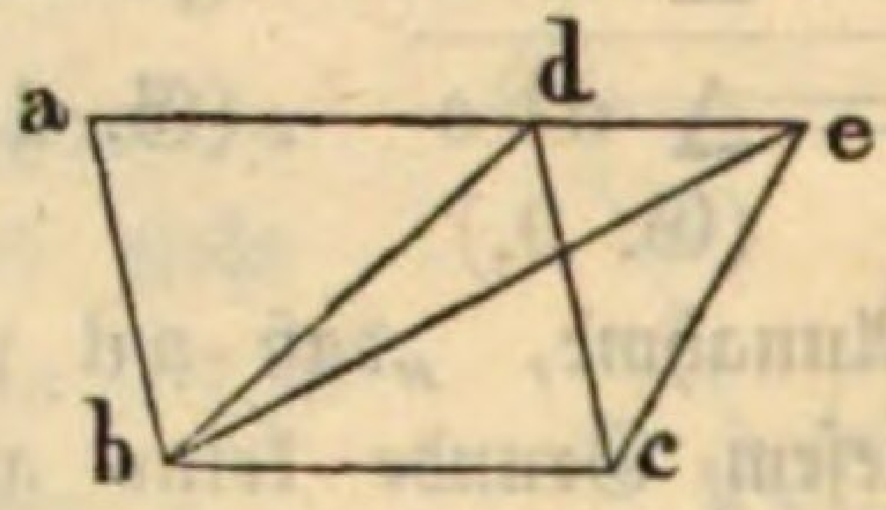
Folglich ist ad nicht parallel der bγ, und aus demselben Grunde auch keine andere Linie außer aα; und es ist daher aα parallel der bγ.

Anmerkung. Wenn bc die Grundlinie eines Dreiecks ist, so ist a „die Spitze" desselben; und der Abstand der Spitze von der Grundlinie wird „die Höhe des Dreiecks" genannt.

Haben also zwei Dreiecke gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, so sind sie gleich groß; und wenn zwei Dreiecke, die gleich groß sind, gleiche Grundlinien haben, so sind ihre Höhen gleich.

II. Satz 41. Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm abcd und ein Dreieck ebc die Grundlinie bc gemein haben, und in einerlei Parallelen ae und bc sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als das Dreieck.



Beweis. Zieht man db, so ist

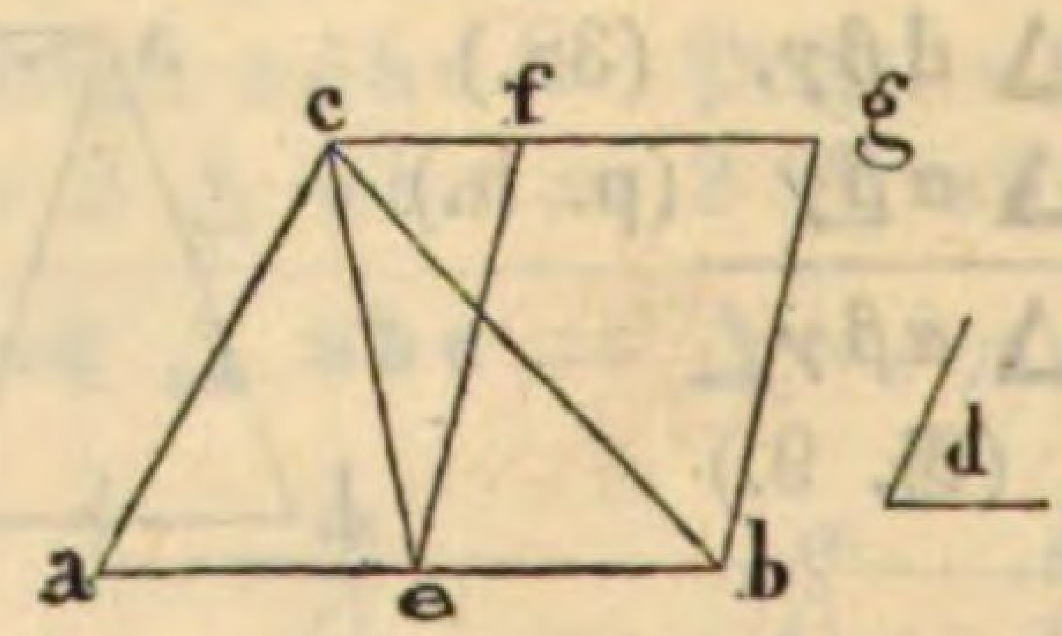
$\triangle$ dbc = $\triangle$ ebc. (37.)

Da nun Prlgr. abcd = 2 $\triangle$dbc (34.)

so ist auch Prlgr. abcd = 2 $\triangle$ebc.

I. Satz 42. Aufgabe.

Unter einem gegebenen Winkel d soll ein Parallelogramm beschrieben werden, das einem gegebenen Dreieck abc gleich ist.



Auflösung. 1) Halbire ab in e (10.), und ziehe ce.

2) Auf be setze an e den ∟ bef = ∟ d (23.)

3) durch c ziehe die cg parallel ab (31.)

und „ b „ „ bg „ ef, „

so ist befg das verlangte Parallelogramm.

$$\begin{array}{llll} \text{Beweis. Da} & ae = eb & & (p.\ c.) \\ \text{so ist} & \Delta\, aec = \Delta\, ebc & & (38.) \\ \text{und daher} & \underbrace{\Delta\, aec + \Delta\, ebc} = 2\,\Delta\, ebc & & \\ \text{Also} & \Delta\, abc = 2\,\Delta\, ebc & & \\ \text{aber auch Prlgr.} & befg = 2\,\Delta\, ebc & & (41.) \\ \hline \text{Folglich ist Prlgr.} & befg = \Delta\, abc & & (\text{G. } 1.) \end{array}$$

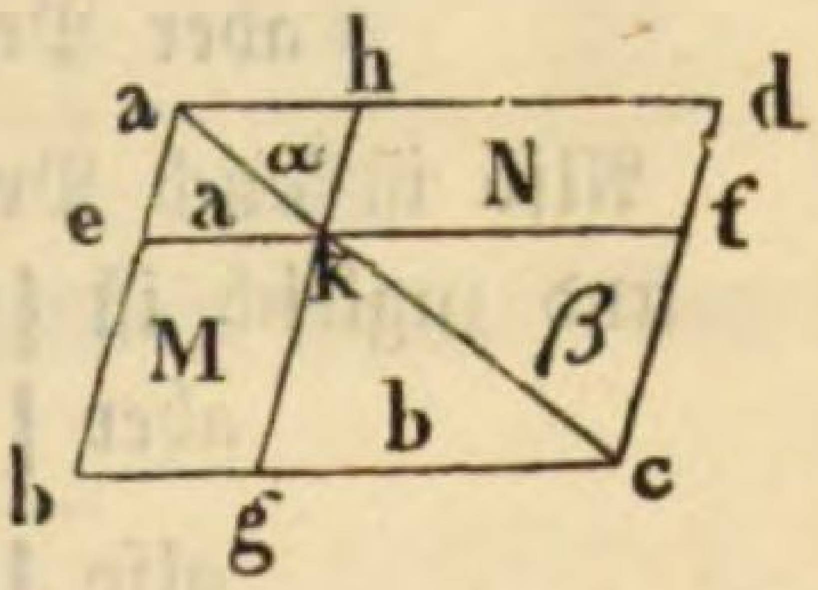
und es ist dieses Prlgr. unter dem Winkel bef = ∟d beschrieben.

I. Satz 43. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramm abcd sind die Ergänzungen bk = M und kd = N der, um die Diagonale ac herum liegenden, Parallelogramme eh und fg gleich groß.

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{llll} & \Delta\, abc = \Delta\, cda & (34.) \\ \text{also} & \underbrace{a + M + b} = \underbrace{\alpha + N + \beta} & \\ \text{Da nun} & a = \alpha & (34.) \\ & b = \beta & \\ \hline \text{so ist} & M = N & (\text{G. } 3.) \end{array}$$



oder Prlgr. bk = Prlgr. kd.

I. Satz 44. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ab soll ein, dem Dreieck C gleiches, Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel d beschrieben werden.

Auflösung. 1) Beschreibe ein dem Δ C gleiches Parallelogramm befg, so daß ∟ ebg = ∟ d (42.)

2) Setze dieses Parallelogramm an die Linie ba so an, daß eb und ba in gerader Linie liegen.

3) Durch a ziehe die ah der ef parallel (31.), und verlängere fg, bis sie dieselbe in h schneidet.

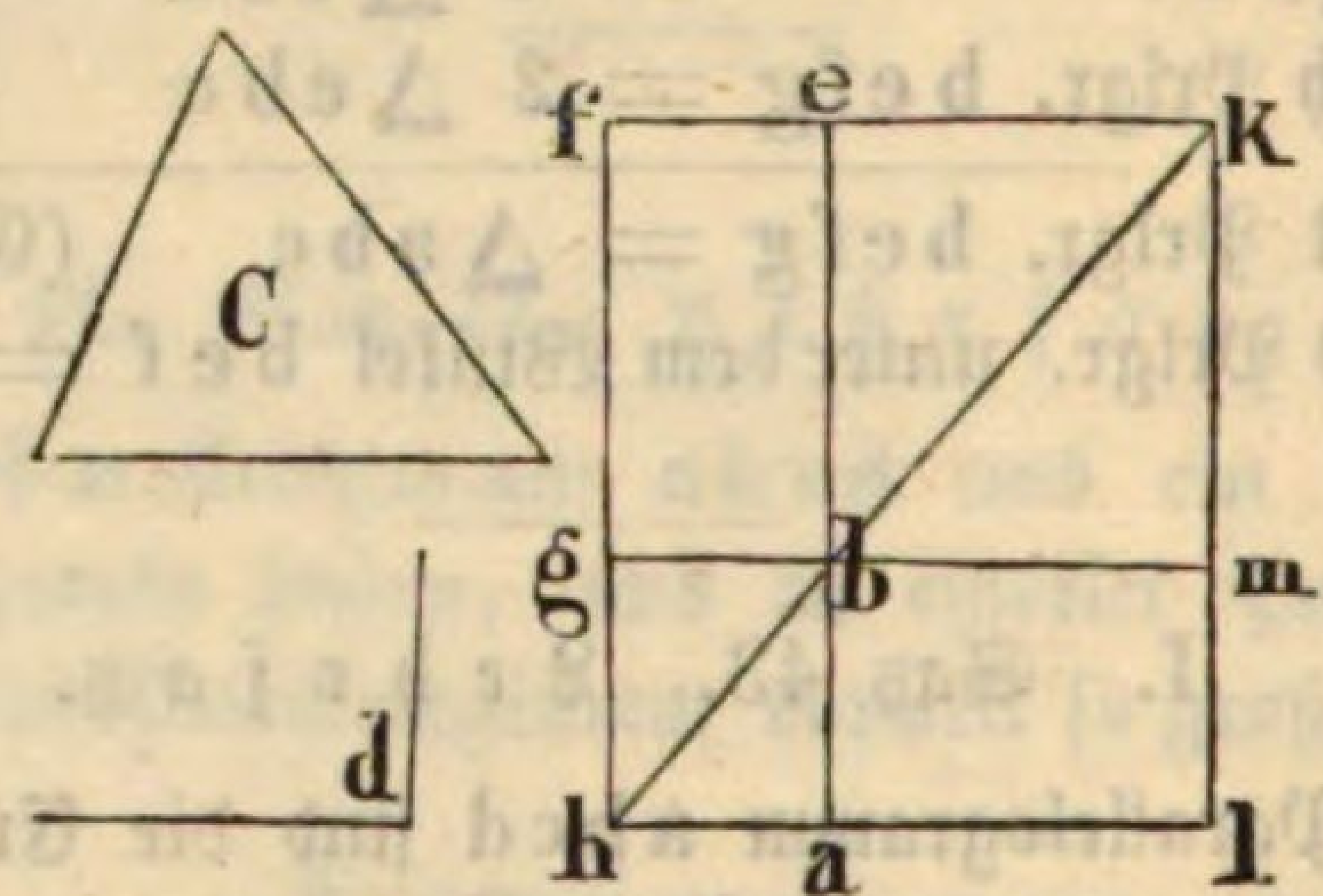
4) Ziehe hb und verlängere dieselbe, bis sie die verlängerte fe in k schneidet, was nothwendig geschehen muß; denn da ha parallel fe, so ist ∟ gha + ∟ gfe = 2 R

und daher ∟ ghb + ∟ gfe < 2 R.

Die hb und fe müssen also, nach b und e zu verlängert, zusammentreffen. (G. 11.)

5) Durch k ziehe die kl parallel der fh, und verlängere ha, bis sie dieselbe in l schneidet.

6) Wird nun gb bis m verlängert, so ist abml das verlangte Parallelogramm.



Beweis. Es ist fklh ein Parallelogramm, von welchem kh die Diagonale ist; und daher

Prlgr. bl = Prlgr. bf (43.)
aber Prlgr. bf = $\triangle$C (p. c.)

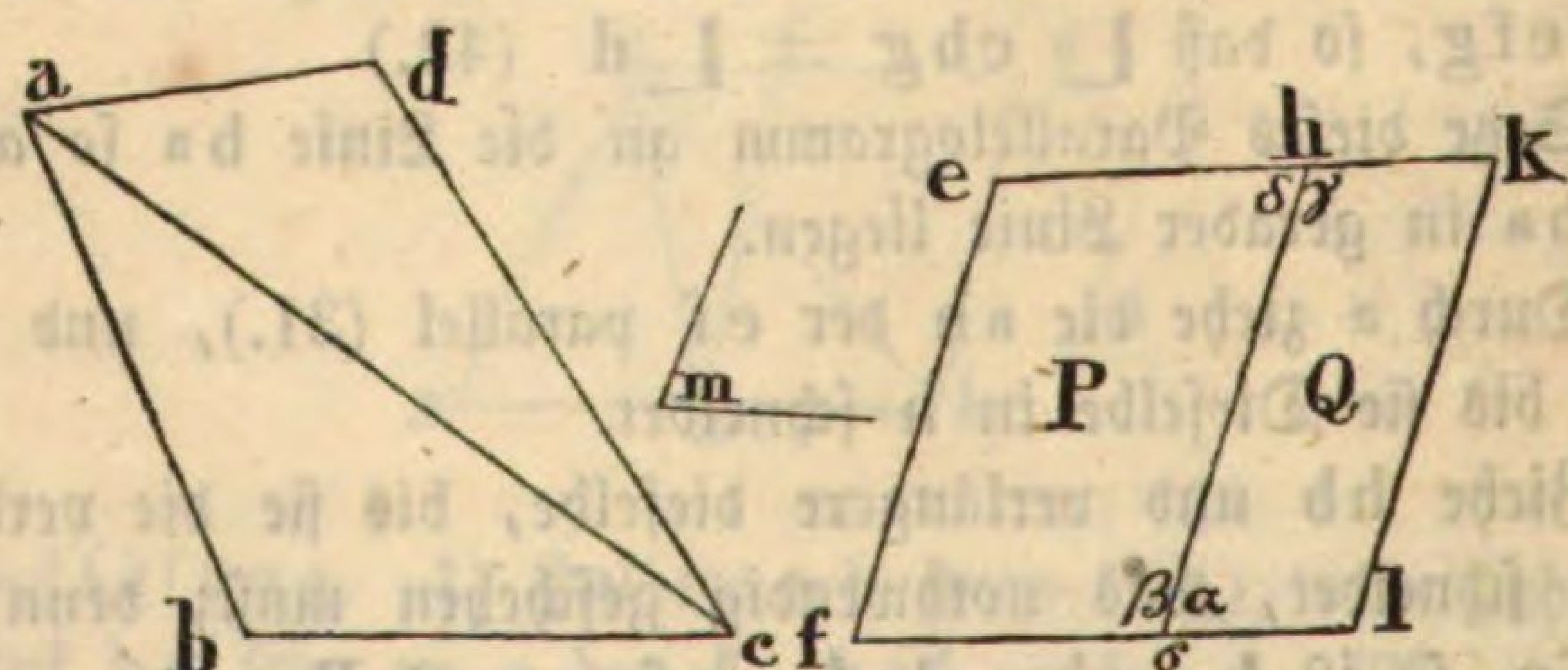
Also ist auch Prlgr. bl = $\triangle$C
und zugleich ist $\llcorner$ mba = $\llcorner$ ebg (15.)
aber $\llcorner$ ebg = $\llcorner$ d (p. c.)

also $\llcorner$ mba = $\llcorner$ d.

Das Parallelogramm bl = $\triangle$C ist also, über der gegebenen Linie ab, unter dem gegebenen Winkel mba = d beschrieben.

I. Satz 45. Aufgabe.

Es soll ein, der geradlinigen Figur abcd gleiches, Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel m beschrieben werden.



Auflösung. 1) Ziehe die Diagonale ac.

2) Beschreibe ein dem $\triangle$abc gleiches Parallelogramm P unter dem Winkel f = $\llcorner$m (42.)

3) Ueber **hg** beschreibe das Parallelogramm $Q = \Delta$ **acd**, unter dem Winkel $\alpha = \angle m$ (44): so ist **eflk** das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da $\angle f = \angle m$ (p. c.)
$\angle \alpha = \angle m$

so ist auch $\angle f = \angle \alpha$
Und weil $\angle \beta = \angle \beta$

so ist $\angle f + \angle \beta = \angle \alpha + \angle \beta$
aber $\angle f + \angle \beta = 2\,R$ (29.)

Also ist auch $\angle \alpha + \angle \beta = 2\,R$
folglich liegt **fg** mit **gl** in gerader Linie (14.)

Da **fl** parallel **eh** (p. c.), so ist $\angle \alpha = \angle \delta$
und $\angle \gamma = \angle \gamma$.

Also $\angle \alpha + \angle \gamma = \angle \delta + \angle \gamma$
aber $\angle \alpha + \angle \gamma = 2\,R$ (29.)

Folglich auch $\angle \delta + \angle \gamma = 2\,R$

und es ist daher **eh** mit **hk** ebenfalls in gerader Linie. Nun ist
hg = und parallel **ef**
und auch **hg** = „ „ **kl**

folglich ist **ef** = und parallel **kl**.

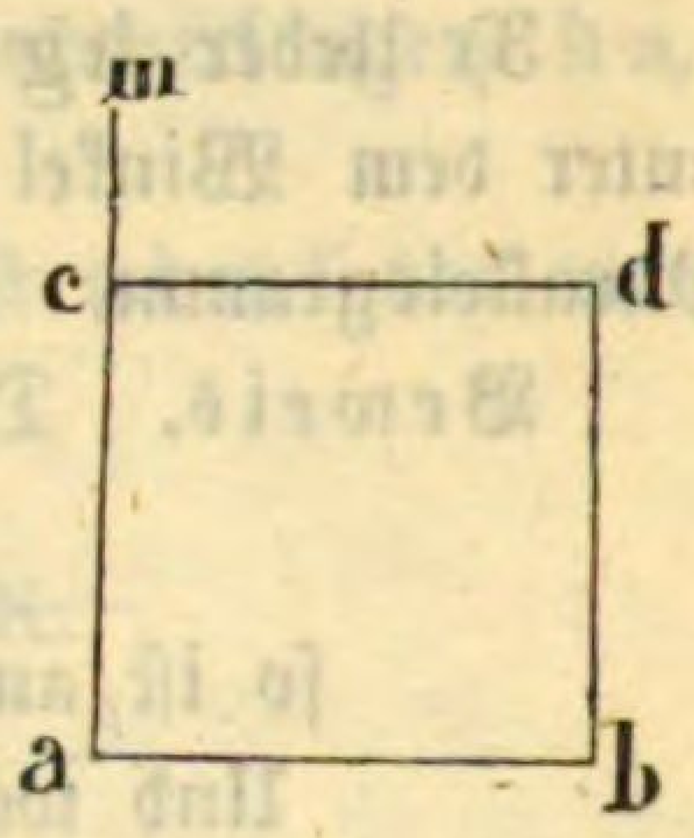
Also ist **eflk** ein Parallelogramm (33.), in welchem $\angle f = \angle m$.

Da nun $P = \Delta$ **abc** und $Q =$ **acd**, so ist das Parallelogramm **eflk** der gegebenen Figur **abcd** gleich.

Anmerkung. Aus Satz 44. geht hervor, „daß jedes Dreieck in ein Parallelogramm verwandelt werden kann, das über einer gegebenen Linie unter einem gegebenen Winkel beschrieben ist"; und aus Satz 45. folgt, „daß, wenn man an der einen Seite **hg** eines Parallelogramms **P** ein anderes **Q** unter dem Winkel $\alpha = \angle f$ ansetzt, **P** und **Q** zusammen ebenfalls ein Parallellogramm bilden". Hieraus folgt: sind mehrere Dreiecke gegeben, so läßt sich immer ein einziges Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel construiren, das allen zusammen gleich ist. Da nun jede geradlinige Figur in Dreiecke zerlegt werden kann: so folgt, „daß es überhaupt möglich ist, ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu construiren, das irgend einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist".

I. Satz 46. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen geraden Linie ab soll ein Quadrat beschrieben werden.



Auflösung. 1) In a errichte auf ab die Normale am (11.)

2) Schneide auf derselben ac = ab (3) ab.

3) Durch c ziehe die cd der ab, und durch b die bd der ac parallel: so ist abdc das verlangte Quadrat.

Beweis. Es ist abdc ein Parallelogramm (p. c.)

also ist ab = cd (34.)

und ac = bd „

aber ac = ab (p. c.)

Folglich ist ab = ac = cd = db.

Das Viereck ist also gleichseitig.

Da cd parallel ab, so ist $\angle a + \angle c = 2R$ (29.)

und da $\angle a = R$, so ist auch $\angle c = R$.

Weil aber abcd ein Parallelogramm, so ist

$\angle a = \angle d$ und $\angle c = \angle b$ (34.)

Folglich ist auch $\angle d = R$ und $\angle b = R$

das Viereck abcd ist also auch rechtwinklig.

Folglich ist abcd gleichseitig und rechtwinklig, und daher ein Quadrat (E. 30.)



Zusatz. Soll an dem Endpuncte a der ab eine Normale am errichtet werden, ohne daß man die ba in der Richtung von ba verlängert (wie zur Anwendung der Construction Satz 11. erforderlich ist): so kann Dieses auf folgende Art geschehen: Man errichte in irgend einem anderen Punkte c der ab die Normale cf, und ziehe mit derselben durch a die Parallele am (31.), so ist Diese die verlangte Normale. Denn es ist, weil am parallel cf

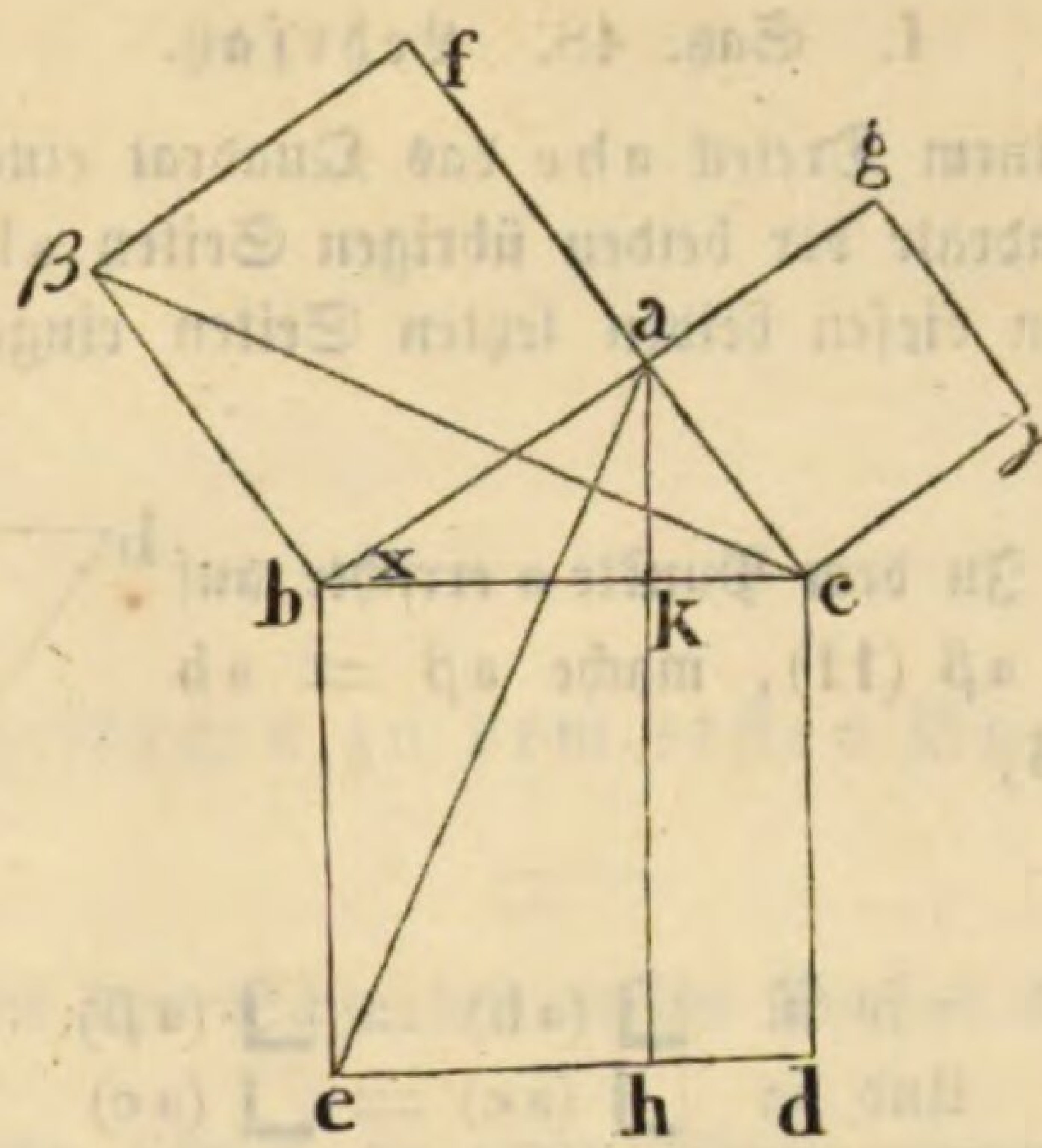
$\angle a + \angle x = 2R$ (29.)

aber $\angle x = R$ (p. c.)

daher auch $\angle a = R$ (G. 3.)

I. Satz 47. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Dreieck abc ist das Quadrat der, dem rechten Winkel bac gegenüber liegenden, Seite bc eben so groß, als die Quadrate der beiden ihn einschließenden Seiten ab und ac zusammen.



Beweis. Beschreibe über die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks a b c die Quadrate:

bcde, abβf und acγg (46.)

so ist $\llcorner$ bac = R (p. h.)

$\llcorner$ baf = R (p. c.)

daher $\llcorner$ bac + $\llcorner$ baf = 2 R.

Also ist ca mit af in gerader Linie (14.), und aus gleichem Grunde ist ba mit ag ebenfalls in gerader Linie.

Ziehe die Linien ae und βc und die ah parallel be, so ist nun

$\llcorner$ βbc = R + x

und $\llcorner$ abe = x + R

folglich $\llcorner$ βbc = $\llcorner$ abe.

Da nun βb = ba (E. 30.)

und bc = be

so ist $\Delta\beta$bc $\cong$ Δabe (4.)

und daher auch 2 $\Delta\beta$bc = 2 Δabe.

Nun ist 2 $\Delta\beta$bc = βbaf und 2 Δabe = behk (41); folglich ist auch βbaf = behk.

Aus gleichen Gründen ist auch, wenn man ad und γb gezogen denkt acγg = cdhk.

Da sonach behk = abβf

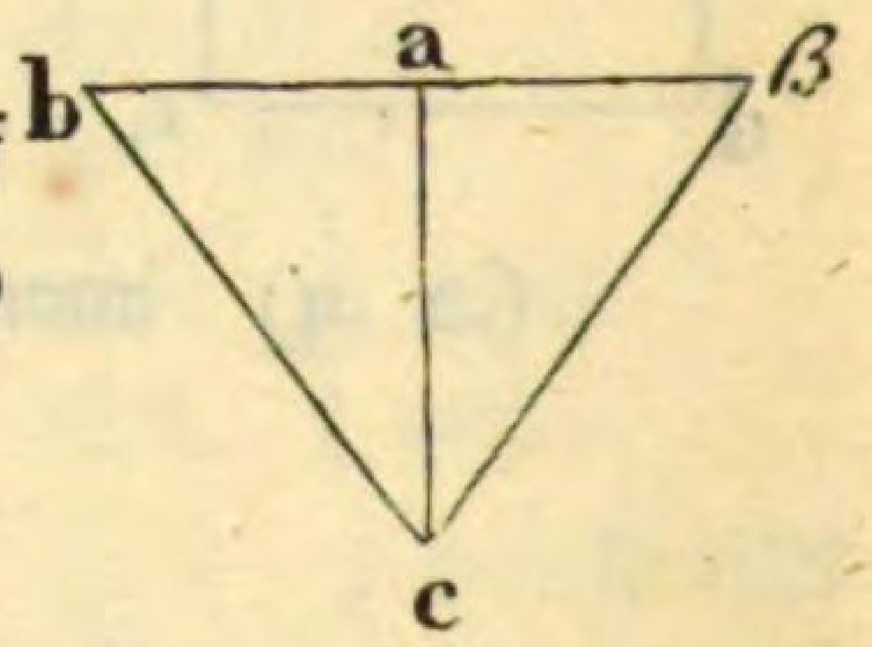
und cdhk = acγg

so ist bcde = abβf + acγg (G. 3.)

nämlich es ist $\square$bc = $\square$ab + $\square$ac.

I. Satz. 48. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck abc das Quadrat einer Seite bc der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten ab und ac gleich ist: so ist der von diesen beiden letzten Seiten eingeschlossene Winkel ein rechter.



Beweis. In dem Punkte a errichte auf ac die Normale $a\beta$ (11), mache $a\beta = ab$ (3) und ziehe $c\beta$,

so ist $\square(ab) = \square(a\beta)$
Und da $\square(ac) = \square(ac)$

$\square(ab) + \square(ac) = \square(a\beta) + \square(ac)$
aber $\square(a\beta) + \square(ac) = \square(c\beta)$ (47.)

folglich auch $\square(ab) + \square(ac) = \square(c\beta)$.
Da aber $\square(ab) + \square(ac) = \square(cb)$ (p. h.)

so ist $\square(cb) = \square(c\beta)$

also $cb = c\beta$.
Da nun $ca = ca$
und $ab = a\beta$ (p. c.)

so ist $\Delta\, abc \cong \Delta\, a\beta c$ (8.)
und daher auch $\llcorner\, bac = \llcorner\, \beta ac$.
Nun ist $\llcorner\, \beta ac = R$ (p. c.)

es ist also auch $\llcorner\, bac = R$
was bewiesen werden sollte.

Anmerkung. In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die, dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite „die Hypotenuse"; und die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, werden „die Katheten" genannt. Daher ist nach Satz 47. in jedem rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Quadrate der beiden Katheten zusammen; und nach Satz 48. folgt nun auch umgekehrt, „wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite so groß ist, als die Quadrate der beiden andern zusammen, so ist die erstere Seite die Hypotenuse, und die beiden andern sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks".

Beilagen zu dem ersten Buche.

I. Uebersicht der Sätze des ersten Buches der Elemente.

Zwei gerade Linien in einer Ebene, genugsam verlängert, treffen entweder auf der einen oder der andern Seite zusammen, oder nicht. In dem erstern Falle bilden sie einen *Winkel*, und in dem andern Falle sind sie *parallel*. Die einfachste ebene Figur, welche aus einem Winkel erzeugt werden kann, ist „das Dreieck“, und die einfachste Figur, welche aus Parallelen sich bilden läßt, ist „das Parallelogramm“. Winkel und Parallelen, und die dadurch bestimmten einfachen Figuren, „das Dreieck und das Parallelogramm“ sind daher die ersten Gegenstände der Geometrie; und die Grundeigenschaften dieser Raumgrößen sind es, mit welchen das erste Buch der Elemente sich beschäftigt.

Die in diesem Buche vorkommenden Sätze sind theils Lehrsätze, durch welche die wesentlichsten Eigenschaften der genannten Raumgrößen bewiesen werden; und theils Aufgaben, durch die gelehrt wird, „wie es möglich ist, die einfachsten Formen zu erzeugen, oder überhaupt die Constructionen auszuführen, die entweder als Vorbereitungen zur Ausführung eines Beweises erforderlich sind, oder welche die erste Grundlage für alle Anwendungen der Geometrie bilden“.

Die Lehrsätze betreffen:

1) *Die Winkel.*

2) *Das Dreieck an und für sich*; und zwar bestimmen dieselben theils a) Eigenschaften des Dreiecks überhaupt, und theils b) Eigenschaften, die nur besonderen Gattungen der Dreiecke zukommen.

3) *Das Verhalten der Dreiecke zu einander*; und zwar a) die *Bedingungen*, unter welchen sie sich decken;

b) das Verhalten derselben zu einander, wenn sie sich nicht decken.

4) Die Parallelen.

5) Das Parallelogramm, und zwar

a) an und für sich, und

b) das Verhalten der Parallelogramme zu einander.

6) Das Verhalten der Parallelogramme zu den Dreiecken.

1. Von den Winkeln.

Zwei zusammentreffende gerade Linien berühren sich entweder in ihren Endpunkten und bilden so „einen einfachen Winkel" oder die eine Linie trifft mit ihrem Endpunkte irgend einen andern Punkt der zweiten Linie, und alsdann entstehen „zwei Nebenwinkel", die zusammen zwei rechte Winkel betragen, wie in dem 13ten Satze bewiesen wird; und es wird sogleich in dem 14ten Satze gezeigt, „daß dieser Satz auch umgekehrt Gültigkeit habe; daß also, wenn zwei Nebenwinkel zusammen zwei rechte Winkel betragen, zwei Schenkel derselben in gerader Linie liegen müssen".

Oder die Linien schneiden sich, und es liegen also Theile einer jeden, zu beiden Seiten der andern; wodurch die Scheitelwinkel gebildet werden, die, nach Satz 15., gleich groß seyn müssen.

2a. Die Lehrsätze von den Dreiecken an und für sich

betreffen das Verhalten der Winkel zu einander:

das Verhalten der Seiten zu den Winkeln, und

das Verhalten der Seiten zu einander.

Dieses Verhalten wird durch die Lehrsätze bestimmt:

1) Der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer, als jeder der beiden inneren gegenüber liegenden. Satz 16.

2) Je zwei Winkel eines Dreiecks sind zusammen kleiner, als zwei rechte Winkel. Satz 17.

3) Die nähere Bestimmung dieser beiden Sätze enthält der Satz 32. In jedem Dreieck ist der Außenwinkel den beiden innern gegenüber liegenden Winkeln zusammen gleich; und alle drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

4) In jedem Dreieck liegt der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüber, Satz 18.; und

5) umgekehrt in jedem Dreieck liegt dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber. Satz 19.

6) Je zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen größer als die dritte. Satz 20.

2b. Besondere Gattungen der Dreiecke.

Die Dreiecke werden (nach den Erklärungen 24., 25. und 26) in Beziehung auf ihre Seiten, unterschieden in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige; und es werden von diesen die gleichschenkligen, welche die gleichseitigen unter sich begreifen, besonders betrachtet. Von denselben wird bewiesen, „daß gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber liegen", in den Sätzen 5. und 6.

In Beziehung auf die Winkel werden (nach den Erklärungen 27., 28. und 29.) die Dreiecke in recht-, stumpf- und spitzwinklige unterschieden; und von der wichtigsten Gattung derselben, von den rechtwinkligen, wird die wesentlichste Eigenschaft derselben angegeben, „daß
das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite so groß ist, als die Quadrate der beiden, den rechten Winkel einschließenden Seiten zusammen", Satz 47.; und es wird Satz 48. nachgewiesen, „daß dieser Satz auch umgekehrt Gültigkeit hat".

3a. Die Bedingungen, unter welchen zwei Dreiecke sich decken,

sind: 1) Wenn sie zwei Seiten, und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich haben. Satz 4.

2) Wenn sie alle drei Seiten gleich haben; daß also in den beiden Dreiecken die erste Seite der ersten, die zweite der zweiten und die dritte Seite der dritten gleich ist. Satz 8.

3) Wenn zwei Winkel des einen Dreiecks, einzeln, zweien Winkeln des andern gleich sind, und eine Seite in beiden Dreiecken gleich groß ist, die in denselben eine gleiche Lage hat; so daß sie entweder in beiden Dreiecken von den gleichen Winkeln eingeschlossen wird, oder demselben Winkel gegenüber liegt. Satz 26.

3b. Das Verhalten zweier Dreiecke zu einander, die sich nicht decken.

Zwei Dreiecke, die sich nicht decken, können dessen ungeachtet gleich groß seyn; und es ist Dieses der Fall,

wenn sie entweder die Grundlinie gemein oder gleich haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, also ihre Höhe gleich ist. (Satz 37. und 38.) Diese Sätze gelten auch umgekehrt; so daß, wenn zwei Dreiecke die Grundlinie gemein oder gleich haben, und gleich groß sind, auch ihre Höhe gleich seyn muß. (Satz 39. u. 40.)

Haben zwei Dreiecke, die sich nicht decken, zwei Seiten gleich, so daß die erste der ersten, und die zweite der zweiten gleich ist, so kann die dritte Seite der dritten nicht gleich seyn (Satz 7.); die dritte Seite ist in dem Dreieck die größere, wo die beiden übrigen Seiten den größeren Winkel einschließen (Satz 24.) und umgekehrt, wo die dritte Seite die größere ist, da schließen die beiden übrigen Seiten den größern Winkel ein (Satz 25).

Haben zwei Dreiecke Eine Seite gemein, so läßt sich für das Verhalten der übrigen Theile nur in dem Falle etwas angeben, wenn das eine dieser Dreiecke ganz innerhalb des andern liegt; und diesen Fall enthält der 21te Satz.

Anmerkung. Für das Verhalten zweier Dreiecke, die sich nicht decken, sind noch folgende Fälle zu berücksichtigen:

1) sie haben die Winkel gleich;
2) sie haben einen Winkel gleich und eine der anliegenden Seiten;
3) sie haben einen Winkel gleich und die demselben gegenüber liegende Seite, und
4) sie haben bloß einen Winkel gleich.

Diese Fälle sind zwar in dem ersten Buche nicht angegeben, sie fehlen aber nicht in den Elementen. Der erste dieser Fälle bildet den 4ten Satz des sechsten Buches; der 2te enthält bloß einen besondern Fall von dem 1sten Satze des sechsten Buches;

der dritte Fall bildet die wichtige Aufgabe des 33sten Satzes in dem dritten Buche, und

der vierte Fall ist durch den 24sten Satz in dem sechsten Buche bestimmt. Diese Sätze sind übrigens mit Recht erst in den späteren Büchern aufgenommen, da sie zu den zusammengesetzten Eigenschaften des Dreiecks gehören, das erste Buch aber nur „mit den Grundeigenschaften desselben" sich beschäftigt.

---

4. Von den Parallelen.

Die Erklärung der Parallelen (E. 35.) enthält bloß negative Merkmale; man erfährt durch dieselbe, „daß es Linien in einer Ebene sind, die nicht zusammentreffen", und daher bietet diese Erklärung direct kein Mittel dar, woraus sich erkennen ließe, „ob

zwei gegebene Linien parallel sind oder nicht". Die Theorie der Parallelen hat hiernach vor allen Dingen die Frage zu beantworten: durch welche Merkmale läßt sich erkennen, „daß zwei gegebene Linien parallel laufen"; diese Merkmale nun werden durch eine dritte gezogene Linie gefunden.

Schneidet diese dritte Linie Beide, so läßt sich aus den Winkeln, unter welchen dieses geschieht, die Frage beantworten (was durch den 27sten und 28sten Satz geschieht).

Schneidet die dritte Linie die beiden Andern aber nicht, während sie mit ihnen in derselben Ebene liegt: so ist sie mit jeder von Beiden parallel (E. 35.), und hieraus folgt, „daß auch die beiden zuerst gegebenen Linien parallel seyn müssen". (Satz 30.)

Die positiven Merkmale paralleler Linien aber (also die Merkmale, welche den Linien zukommen müssen, wenn man weiß, daß sie parallel sind) werden in dem 29sten Satze angegeben.

5[a]. Das Parallelogramm an und für sich.

Auch hier werden blos die beiden Fragen beantwortet: unter welchen Bedingungen ist ein Viereck ein Parallelogramm, und welche Eigenschaften kommen jedem Parallelogramme zu?

„Ein Viereck" ist „ein Parallelogramm", wenn zwei gegenüber liegende Seiten desselben gleich und parallel sind (Satz 33); und in jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel gleich groß, und es wird dasselbe durch die Diagonale halbirt (Satz 34).

5[b]. Das Verhalten der Parallelogramme zu einander.

Die Bedingungen, „unter welchen Dreiecke sich decken", lassen sich auch auf Parallelogramme anwenden, da dasselbe durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird. Die Bedingungen aber, „unter welchen zwei Dreiecke gleich groß sind", hängen umgekehrt von den Bedingungen ab, unter welchen Parallelogramme gleiche Größe haben, die durch den 35sten und 36sten Satz bestimmt werden; nämlich:

Parallelogramme sind gleich groß, wenn sie eine gemeinschaftliche oder gleiche Grundlinie haben, und zwischen denselben Parallelen liegen.

Außerdem sind aber auch die Parallelogramme von gleicher Größe, welche in einem Parallelogramme die Ergänzungen der um die Diagonale herum liegenden bilden (Satz 43).

6. Das Verhalten des Parallelogramms zu dem Dreiecke ist durch den einzigen Satz 41. bestimmt: „daß, wenn beide Figuren die Grundlinie gemein haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, das Parallelogramm doppelt so groß als das Dreieck ist".

Die Aufgaben.

Eine Construction, d. i. die Darstellung eines Begriffes durch Anschauung ist in der Geometrie nur alsdann zulässig, wenn zuvor die Möglichkeit der Ausführung nachgewiesen ist. Die ersten Hülfsmittel hierzu geben die drei Postulate; durch sie wird man berechtigt, „zwei Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden, eine gerade Linie zu verlängern, und um einen gegebenen Mittelpunkt in einem gegebenen Abstande einen Kreis zu beschreiben". Diese Hülfsmittel allein würden nicht weit ausreichen, wenn die Geometrie selbst nicht nach und nach mehrere dergleichen Mittel darböte, welche man durch die vorkommenden Aufgaben erhält. Gleich anfangs werden die Hülfsmittel der Construction, welche die Postulate darbieten, dadurch vermehrt, daß gezeigt wird: wie es möglich ist,

1) „das einfachste Dreieck, das gleichseitige, über einer gegebenen Linie zu beschreiben" (Satz 1.);

2) „eine gegebene begränzte Linie an irgend einen, der Lage nach gegebenen Punkt anzutragen" (Satz 2.);

3) Von einer geraden Linie eine kleinere abzuschneiden" (Satz 3.).

Nachdem die, durch Lösung dieser Aufgaben möglichen Constructionen benutzt sind, um einige wenige Lehrsätze zu beweisen, werden die Hülfsmittel durch neue Aufgaben vermehrt; und es wird nachgewiesen: wie es möglich ist,

4) „einen Winkel" (Satz 9.) und

5) „eine begrenzte gerade Linie zu halbiren"; (Satz 10.)

Unmittelbar hierauf wird nun auch gezeigt:

6) wie in einem gegebenen Punkte einer geraden Linie eine Normale auf derselben errichtet werden kann; wie man an diesem Punkte also eine Linie so ziehen kann, daß dadurch zwei gleiche Nebenwinkel entstehen (Satz 11.) Diese Aufgabe enthält einen besondern Fall der Aufgabe, Satz 9.; indem hier, wie dort, die zu ziehende Linie der gemeinschaftliche Schenkel zweier Winkel von gleicher Größe werden muß. Die Construction des rechten Winkels, die hierdurch gelehrt wird, ist aber

7) auch in der Art ausführbar, „daß der eine Schenkel desselben in einer gegebenen geraden Linie liegt, und der andere durch einen, außerhalb dieser Linie gegebenen Punkt geht"; und Dieses ist die Aufgabe, Satz 12., „von einem, außerhalb einer geraden Linie gegebenen Punkte, eine Normale auf dieselbe zu fällen".

Der besonderen Aufgabe, „über einer gegebenen begrenzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben", folgt nun (nachdem die Bedingungen ermittelt sind, unter welchen es möglich ist) die allgemeinere Aufgabe,

8) „ein Dreieck überhaupt zu beschreiben, wenn die drei Seiten desselben gegeben sind" (Satz 22).

Und es wird nun diese Construction sogleich benutzt, um der bereits gelös'ten besondern Aufgabe, „an einem Punkte einer gegebenen Linie einen rechten Winkel anzusetzen", die ganz allgemeine Aufgabe folgen zu lassen:

9) Auf eine gegebene gerade Linie an einen, in ihr gegebenen Punkt einen Winkel anzusetzen, der irgend einem gegebenen Winkel gleich ist (Satz 23).

Die bisher angeführten Aufgaben betreffen bloß die geraden Linien an und für sich, Winkel und Dreiecke; und es müssen daher nun noch die Construrtionen der Parallelen und der Parallelogramme gelehrt werden. Hierzu dient nun zunächst,

10) die Aufgabe, „durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie einer gegebenen parallel zu ziehen" (Satz 31).

Hierdurch ist zugleich die Construction eines Parallelogramms überhaupt bestimmt; welches erhalten wird, wenn man in jedem der beiden Schenkel eines Winkels einen Punkt annimmt, und durch denselben eine Parallele mit dem andern Schenkel zieht. Es ist aber nicht hinreichend, daß nachgewiesen wird, „wie ein Parallelogramm überhaupt möglich ist": sondern es muß auch (da die Parallelogramme in dem ersten Buche vorzugsweise, mit Rücksicht auf die Gleichheit ihrer Größe, betrachtet werden) gezeigt werden, „wie ein Parallelogramm von bestimmter Größe construirt werden kann", mit Rücksicht auf alle Bedingungen, die sich noch hinzufügen lassen. Daher wird

11) zunächst gezeigt, „wie sich ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel beschreiben läßt, das einem gegebenen Dreieck gleich ist" (Satz 42); und hierauf wird nun

12) die noch näher bestimmte Aufgabe gelös't, „ein Parallelogramm über einer gegebenen geraden Linie unter einem gegebenen Winkel zu beschreiben, das einem gegebenen Dreieck gleich ist" (Satz 44).

„Daß diese Constructionen aber nicht bloß für den Fall ausführbar sind, wenn das zu beschreibende Parallelogramm einem gegebenen Dreieck gleich seyn soll", wird nun

13) durch die Auflösung der Aufgabe bewiesen, „ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu beschreiben, das irgend einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist" (Satz 45).

Durch diese Aufgabe werden die geometrischen Untersuchungen überhaupt bedeutend vereinfacht; denn man kann immer, wenn irgend eine geradlinige Figur ihrer Größe nach in Betracht gezogen werden soll, statt derselben ein ihr gleiches Parallelogramm substituiren; und da dieses Parallelogramm einen beliebig angenommenen Winkel haben kann, so läßt sich dasselbe von der verlangten Größe auch unter einem rechten Winkel beschreiben. Daher bildet das Rechteck den Stellvertreter aller geradlinigen Figuren, insofern nur die Größe derselben berücksichtigt werden soll. Aus diesem Grunde verdienen die Eigenschaften des Rechtecks näher in Betracht gezogen zu werden; und sie bilden daher den ausschließlichen Gegenstand des zweiten Buches der Elemente.

Das einfachste Rechteck ist das gleichseitige, also das Quadrat. Nachdem also die Construction des Parallelogramms überhaupt gelehrt ist, bleibt noch übrig, nachzuweisen, „wie sich auch dasjenige bilden läßt, zu welchem die wenigsten Bestimmungsstücke erforderlich sind." Dieses geschieht endlich

14) durch die Auflösung der Aufgabe, „das Quadrat einer gegebenen geraden Linie zu beschreiben" (Satz 46).

Aus der hier mitgetheilten Uebersicht geht hervor: daß das erste Buch der Elemente „die Grundeigenschaften der Winkel und Dreiecke, der Parallelen und Parallelogramme" vollständig enthält, und es werden alle diese Eigenschaften in 34 Lehrsätzen und 14 Aufgaben vorgetragen; und zwar betreffen von den Lehrsätzen:

3. die Eigenschaften der Winkel;
6. „ des Dreiecks überhaupt an und für sich;
2. „ des gleichschenkligen Dreiecks;
2. „ des rechtwinkligen Dreiecks;

3. die Bedingungen, unter welchen zwei Dreiecke sich decken;
4. die Bedingungen, unter welchen zwei Dreiecke gleich groß sind;
4. das Verhalten zweier Dreiecke zu einander, die entweder zwei oder auch nur Eine Seite gleich haben;
4. die Eigenschaften paralleler Linien;
2. „ des Parallelogramms;
3. die Bedingungen der Gleichheit zweier Parallelogramme;
1. das Verhalten des Parallelogramms zu dem Dreiecke.

Von den Aufgaben enthalten:

3. Anleitung zur Construction und Halbirung gerader Linien;
4. „ „ „ „ „ der Winkel;
2. „ „ „ der Dreiecke;
1. „ „ „ der Parallelen;
3. „ „ „ der Parallelogramme, und
1. „ „ „ des Quadrats.

Alle diese Sätze sind so geordnet, wie sie unmittelbar einer aus dem andern folgen; und es läßt sich daher auch jeder Satz da, wo er steht, mit Hülfe der vorhergehenden, vollständig beweisen.

Anmerkung. Die Anordnung, in welcher Euklid die einzelnen Sätze auf einander folgen läßt, ist von Einigen angefochten und „als unsystematisch“ erklärt worden, weil zusammengehörige Sätze getrennt sind, wie z. B. die Sätze von der Congruenz der Dreiecke; und man hat aus diesem Grunde die euklidische Geometrie „ein künstliches System“ genannt, so daß hiernach im Gegensatze das System ein natürliches seyn würde, in welchem ordnungsmäßig zuerst die Sätze von den Linien, alsdann die von den Winkeln, und hierauf die Sätze von den Dreiecken ungefähr in der Folge vorgetragen werden, wie sie in der obigen Uebersicht zusammen gestellt sind. Bei einer strengen Prüfung findet man sich aber gerade umgekehrt veranlaßt, „ein System der letztern Art ein künstliches zu nennen“, weil hierbei bloß die äußern Merkmale als Eintheilungsgrund benutzt sind, das innere Wesentliche aber ganz unbeachtet bleibt. Nur eine falsch verstandene Logik kann zu einem solchen Mißgriffe verleiten, durch welchen diese sogenannte natürliche Ordnung der Sätze auf Kosten der Gründlichkeit eingeführt wird. Allen Werken, in welchen die Geometrie auf diese Weise behandelt ist, muß der mathematische Geist abgesprochen werden; da in denselben öfters philosophische Erörterungen die Stelle mathematischer Beweise vertreten, und mitunter auch wohl der ganze Beweis eines Satzes bloß darin besteht, daß es heißt: „wie sich leicht einsehen läßt.“

Die natürliche Stelle eines Satzes ist da, wo er als unmittelbare Folge des Vorhergehenden sich ergiebt; und alle Sätze gehören zusammen, die ihrem innern Wesen nach verwandt sind. Diese Ansicht liegt der Anordnung der Sätze zum Grunde, welche in der Geometrie des Euklid befolgt ist.

II. Von den Lehrsätzen.

1) Jeder Lehrsatz enthält „eine Behauptung, deren Richtigkeit bewiesen werden muß"; und es besteht der Beweis darin, daß nachgewiesen wird, „wie die Behauptung eine nothwendige Folge anderer Sätze ist, deren Gültigkeit man bereits anerkannt hat".

2) Man unterscheidet die Beweise in directe und indirecte oder apagogische. Bei dem directen Beweise wird die Richtigkeit der in dem Lehrsatze aufgestellten Behauptung unmittelbar nachgewiesen; es wird also gezeigt, „wie diese geradezu eine Folge anderer Sätze ist", und der apagogische Beweis besteht darin, daß gezeigt wird, „es sey das Gegentheil von Dem, was behauptet wird, unmöglich"; es kömmt hierbei also hauptsächlich darauf an, nachzuweisen, „daß dieses Gegentheil einer anerkannten Wahrheit widerspricht".

3) Bei dem directen Beweise wird entweder die Gültigkeit der Behauptung unmittelbar ganz allgemein bewiesen, oder es werden mehrere Fälle unterschieden, und man beweiset die Gültigkeit für jeden dieser Fälle besonders. Hierbei ist es nothwendig, „daß die verschiedenen angegebenen Fälle erschöpfend sind, daß also, außer den angegebenen, kein anderer Fall denkbar sey"; nur wenn man hiervon überzeugt wird, und jeder der angegebenen Fälle richtig bewiesen ist, muß der Beweis des ganzen Lehrsatzes als vollständig anerkannt werden.

In dem ersten Buche der Elemente sind von folgenden Lehrsätzen directe Beweise in der Art gegeben, daß die Gültigkeit der Behauptung unmittelbar ganz allgemein bewiesen wird: Lehrsatz 4, 5, 8, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 43, 47 und 48.

4) Directe Beweise von der Art, „daß hierbei mehrere Fälle unterschieden werden", findet man in dem ersten Buche nicht.

5) Bei den indirecten Beweisen werden immer zwei sich gegenseitig ausschließende Fälle unterschieden, von welchen also einer nothwendig stattfinden muß; und es werden diese beiden Fälle dadurch erhalten, daß man sagt: die in dem Lehrsatze aufgestellte Behauptung findet entweder statt oder nicht. Der indirecte oder apagogische Beweis besteht nun darin, daß man zeigt: aus der Annahme, „die Behauptung des Lehrsatzes finde nicht statt", folgt ein Widerspruch. Hieraus geht nun hervor, „daß diese Annahme nicht zuläßig sey". Da nun die Behauptung entweder statt finden muß, oder nicht,

und gezeigt ist, „daß das Letztere nicht seyn kann“: so folgt, „daß sie nothwendig statt findet“ — und hiermit ist der Lehrsatz bewiesen.

Der erste Lehrsatz, bei welchem diese Beweisart angewendet wird, ist der 6te. In diesem Satze ist die Behauptung: In jedem Dreieck, das zwei gleiche Winkel hat, sind auch die, diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleich groß. Der Beweis wird nun auf folgende Art geführt:

Voraussetzung. Das Dreieck hat zwei gleiche Winkel.

Nun sind entweder die, diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleich groß, oder nicht.

Nimmt man an, „diese Seiten sind nicht gleich groß“: so folgt hieraus, wie in dem 6ten Satze gezeigt wird, „daß ein Theil eines Dreiecks dem ganzen Dreiecke gleich seyn muß“; und da Dieses nicht seyn kann, so ist auch die Annahme nicht zulässig, „daß die Seiten ungleich sind“. Da nun die Seiten entweder gleich oder ungleich seyn müssen, und das Letztere nicht seyn kann, so sind sie nothwendig gleich groß; und hiermit ist die Richtigkeit der, in dem Lehrsatze aufgestellten Behauptung bewiesen.

In der hier angegebenen Art sind folgende Lehrsätze in dem ersten Buche der Elemente bewiesen. Lehrsatz 6, 7, 14, 27, 29, 39 und 40.

6) Es kommen auch indirecte Beweise vor, bei welchen mehr als zwei Fälle unterschieden werden müssen. Werden hiebei die möglichen Fälle vollständig aufgezählt, und wird von einigen derselben nachgewiesen, „daß sie nicht statt finden können“: so muß Einer der noch übrigen richtig seyn, und es bleibt der einzige wahre Fall übrig, wenn man von allen übrigen nachweis't, „daß keiner derselben möglich ist“. Diese Beweisart kömmt in dem ersten Buche der Elemente nur bei den beiden Sätzen 19 und 25 vor.

Der 19te Satz lautet: In jedem Dreieck liegt dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber. Bei dem Beweise werden nun folgende drei Fälle unterschieden:

1) die den ungleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten sind gleich groß; oder

2) die Seite ist die größere, welche dem kleinern Winkel gegenüber liegt; oder

3) es ist die Seite die größere, die dem größern Winkel gegenüber liegt.

Der 1ste dieser Fälle ist nicht möglich, da er dem 5ten Satze widerspricht.

Der 2te Fall ist ebenfalls nicht möglich, denn er widerspricht dem 18ten Satze.

Es bleibt also nur der 3te Fall übrig; und da einer der 3 angeführten Fälle nothwendig statt finden muß, so ist der 3te Fall der richtige; und es ist daher in einem Dreieck die Seite die größere, welche dem größern Winkel gegenüber liegt — was nach der Aussage des Lehrsatzes bewiesen werden sollte.

7) Die wesentlichsten Schlußformen, die in der Geometrie gebraucht werden, sind folgende:

a) Alles, was von einem Begriffe gilt, hat auch für die Begriffe Gültigkeit, die demselben untergeordnet sind, und die also aus jenem durch das Hinzukommen neuer Merkmale erhalten werden; z. B. da je zwei Winkel eines jeden Dreiecks zusammen kleiner als zwei rechte sind (17.), so gilt Dieses auch von dem rechtwinkligen Dreieck; und hieraus folgt nun, „daß in einem rechtwinkligen Dreiecke der rechte Winkel der größte seyn muß". Da nun in jedem Dreieck dem größern Winkel die größere Seite gegenüber liegt (18.), so ist Dieses bei dem rechtwinkligen Dreieck auch der Fall; und da hier der rechte Winkel der größte ist, so folgt, „daß in einem rechtwinkligen Dreieck die, dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die größte ist".

b) Wo die, einem Dinge zukommende Eigenschaft nicht angetroffen wird, kann auch das Ding, dem diese Eigenschaft zukömmt, nicht vorgefunden werden. Da z. B. ein gleichschenkliges Dreieck zwei gleiche Winkel hat (5.), so folgt: daß, wenn in einem Dreieck nicht zwei Winkel gleich sind, dasselbe auch nicht gleichschenklig seyn kann.

c) Jeder Satz, aus dem etwas Falsches folgt, ist selbst falsch. Da z. B. aus dem Satze: „in einem Dreieck, das zwei gleiche Winkel hat, sind die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten ungleich", folgt „der Theil ist dem Ganzen gleich" (was nicht möglich ist): so ist jener Satz falsch. Die Seiten sind also nicht ungleich; und hieraus folgert man nun (6.): wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, so müssen die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten ebenfalls gleich seyn.

8) Man unterscheidet bei einem Lehrsatze die **Voraussetzungen** und die **Behauptung**; und ein Satz wird **umgekehrt**, wenn man die Behauptung als Voraussetzung annimmt, und eine der Voraussetzungen zur Behauptung macht. So sind z. B. bei dem 13ten Satze die Voraussetzungen:

1) Der Winkel **cba** und **abd** haben den Schenkel **ba** gemein, und

2) Die Schenkel **cb** und **bd** liegen in gerader Linie. Behauptet wird: die Winkel **cba** und **abd** sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.

Soll der Satz umgekehrt werden, so nimmt man diese Behauptung als Voraussetzung an; und behält auch die Voraussetzungen des Lehrsatzes bei, mit Ausschluß einer einzigen, welche die Behauptung wird. Hiernach sind bei der Umkehrung des 13ten Satzes die Voraussetzungen:

1) Die Winkel **cba** und **abd** sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich, und

2) sie haben den Schenkel **ba** gemein.

Die Behauptung lautet: Die Schenkel **cb** und **bd** beider Winkel liegen in gerader Linie.

Die **Richtigkeit** der durch Umkehrung eines Satzes erhaltenen Behauptung kann aus der des Satzes selbst nicht ohne Weiteres angenommen werden; weil ein Satz in seinen Voraussetzungen nicht nothwendig alle die Bedingungen enthält, die bei der Umkehrung desselben berücksichtigt werden müssen. So wird z. B. jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt; es ist aber nicht jedes Viereck, das durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, ein Parallelogramm.

Zu der Folgerung, „daß ein Satz auch umgekehrt Gültigkeit habe", wird man nur alsdann berechtigt, wenn für diese Umkehrung, als für einen neuen Lehrsatz, der Beweis vollständig geführt worden ist. In der Regel bedient man sich hierbei des indirecten Verfahrens (5).

Durch Umkehrung wird öfters ein richtiger Satz nur alsdann erhalten, daß noch Voraussetzungen ausdrücklich hinzugefügt werden, die in dem Satze selbst nicht vorkommen. So ist die Umkehrung des 13ten Satzes in der Form, in der sie oben angegeben worden ist, keineswegs richtig; da von zwei Winkeln, die zusammen zwei rechte Winkel betragen und die einen Schenkel gemein haben, die beiden übrigen Schenkel alsdann nicht eine gerade Linie bilden,

wenn beide Winkel auf derselben Seite des gemeinschaftlichen Schenkels liegen. Der 14te Satz, in welchem die Umkehrung des 13ten Satzes ausgesprochen wird, enthält daher ausdrücklich die Bedingung: „daß diese Nebenwinkel auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels ab liegen".

Einfache Umkehrungen ohne beschränkende Bedingungen enthalten die Sätze: 6, 19, 25, 29 und 48. Umkehrungen, die nur unter ausdrücklich hinzugefügten Bedingungen richtig sind, kommen in den Sätzen vor 14, 39 und 40.

9) Wird ein Satz in der Form umgekehrt, „daß man das Gegentheil der Behauptung als Voraussetzung annimmt, und das Gegentheil einer der Voraussetzungen zur Behauptung macht": so erhält man unter allen Umständen einen richtigen Satz — der also eines besondern Beweises nicht bedarf.

Es ist dieses die unter Nr. 7b. angegebene Schlußform; eine solche Umkehrung wird Contraposition genannt. Von derselben kann man in der Regel mit gutem Erfolge Gebrauch machen bei Beweisen, die indirect zu führen sind, wenn man statt des zu beweisenden Satzes die Contraposition desselben aufstellt. So ist z. B. in dem 27ten Satze zu beweisen, „daß, wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden, und die Wechselwinkel gleich sind, auch die Linien parallel seyn müssen". Stellt man statt dessen — wie in dem Zusatze zu Satz 27 geschehen ist — die Contraposition von diesem Satze also: „Wenn zwei sich schneidende Linien (also zwei nichtparallele Linien) von einer dritten geschnitten werden, so können die Wechselwinkel nicht gleich seyn", als Lehrsatz auf, so läßt die Richtigkeit desselben auch unmittelbar mit Hülfe von Satz 16 sich nachweisen. Wird hierauf dieser Satz wiederum contraponirt, so erhält man den 27sten Satz, der jetzt eines weiteren Beweises nicht bedarf.

Bei dem Beweise des 7ten Satzes wird von der Contraposition des 5ten Satzes Gebrauch gemacht.

Anmerkung. Die hier folgenden Lehrsätze, für welche die Beweise gefunden werden sollen, sind mit fortlaufenden Nummern bezeichnet, um bequemer auf dieselben zurückweisen zu können; und es wird bei dem Anführen eines solchen Lehrsatzes der Nummer desselben noch Lhrs. beigefügt, damit ein solches Citat nicht mit Dem verwechselt werde, wo auf einen Satz der Elemente zurückgewiesen wird. Um den Beweis eines solchen Lehrsatzes leichter auffinden zu können, sind bei jedem die Sätze angegeben, die bei dem Beweise desselben zu benutzen sind.

III. Lehrsätze, die mit Hülfe der Sätze des ersten Buches der Elemente sich beweisen lassen.

Lehrsatz 1. Errichtet man in dem Halbirungspunkte einer Linie eine Normale auf derselben, so steht jeder Punkt dieser Normale von den beiden Endpunkten der Linie gleich weit ab.

Beweis (4).

Lehrsatz 2. Wenn man von einem gleichschenkligen Dreieck die Grundlinie halbirt, und den Halbirungspunkt derselben mit der Spitze des Dreiecks durch eine gerade Linie verbindet: so steht diese Linie normal auf der Grundlinie, und halbirt den Winkel an der Spitze des Dreiecks.

Beweis (5) und (4), oder (8).

Lehrsatz 3. Fället man in einem Dreieck eine Normale von einer Ecke auf die gegenüber liegende Seite, und wird dieselbe in dem Punkte, in welchem sie von der Normale getroffen wird, halbirt: so sind die beiden übrigen Seiten dieses Dreiecks gleich groß.

Beweis (4).

Lehrsatz 4. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck von der Spitze eine Normale auf die Grundlinie fället, so wird durch dieselbe die Grundlinie halbirt.

Beweis (5) und (26).

Lehrsatz 5. Werden über einer und derselben Grundlinie zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke beschrieben, und man verbindet die Spitzen derselben durch eine gerade Linie, und verlängert dieselbe, bis sie die Grundlinie trifft: so werden durch diese Linie die Winkel an den Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke, und auch ihre gemeinschaftliche Grundlinie, halbirt.

Beweis. „Daß der Winkel an der Spitze des einen und des andern Dreiecks halbirt wird", folgt aus (8) und (13); und hieraus folgt nun, „daß auch die gemeinschaftliche Grundlinie halbirt wird" (4).

Lehrsatz 6. Fället man in einem gleichschenkligen Dreiecke eine Normale von der Spitze auf die Grundlinie, verlängert dieselbe über die Grundlinie hinaus, macht die Verlängerung eben so groß als die Normale ist, und verbindet den Endpunkt der verlängerten Linie mit dem einen Endpunkte der Grundlinie des Dreiecks: so ist diese Verbindungslinie dem Schenkel des gegebenen Dreiecks gleich.

Beweis (13 oder 15) und (4).

Lehrsatz 7. Wenn von zwei gleichschenkligen Dreiecken die Schenkel des einen den Schenkeln des andern gleich sind, und die Grundlinie des ersten ist zweimal so groß als die Normale von der Spitze auf die Grundlinie des andern: so sind die beiden Dreiecke gleich groß (ohne sich zu decken), und es ist auch die Grundlinie des andern zweimal so groß, als die Normale von der Spitze auf die Grundlinie in dem ersten Dreieck.

Beweis (Lhrs. 6.) und (Lhrs. 2).

Lehrsatz 8. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck die Normale von der Spitze desselben auf die Grundlinie halb so groß als die Grundlinie ist: so ist in diesem Dreieck der Winkel an der Spitze zweimal so groß, als der Winkel an der Grundlinie.

Beweis (Lhrs. 4) und (5).

Lehrsatz 9. Wird ein Winkel halbirt, und man fället von irgend einem Punkte der Halbirungslinie Normalen auf beide Schenkel dieses Winkels, so sind diese Normalen gleich groß.

Beweis (26).

Lehrsatz 10. Wenn man in einem Dreiecke zwei Winkel halbirt, so schneiden sich die Halbirungslinien in Einem Punkte: so daß die normalen Abstände dieses Punktes von allen drei Seiten des Dreiecks gleich groß sind.

Beweis (Lhrs. 9).

Lehrsatz 11. Sind die Normalen, welche von zwei Spitzen eines Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten gefället werden, gleich groß, so müssen auch diese Seiten gleich seyn und umgekehrt.

Beweis (26).

Lehrsatz 12. Werden von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks Normalen auf die Schenkel desselben gefället: so schneiden diese Normalen sich so, daß die Theile derselben, die an der Grundlinie anliegen, gleich groß sind, und auch die andern beiden Theile sind gleich groß.

Beweis (Lehrs. 11), (26) und (6).

Lehrsatz 13. Ist außerhalb einer geraden Linie ein Punkt gegeben, und man fället von diesem Punkte eine Normale auf die Linie, und verbindet andere Punkte der Linie ebenfalls mit dem außerhalb der Linie gegebenen Punkte: so ist von allen gezogenen Linien die Normale die kürzeste, und von den übrigen ist die Linie die größere, welche die gegebene am weitesten von dem Fußpunkte der Normale trifft.

Beweis (17) und (18).

Lehrsatz 14. Zieht man von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Linie an irgend einen Punkt der Grundlinie: so ist, wenn dieser Punkt zwischen den Endpunkten der Grundlinie liegt, die gezogene Linie kleiner als der Schenkel des Dreiecks; und es ist dieselbe größer als der Schenkel, wenn der Punkt in der Verlängerung der Grundlinie liegt.

Beweis (Lehrs. 13).

Lehrsatz 15. In jedem gleichschenkligen Dreiecke ist der Winkel an der Grundlinie immer kleiner, als ein rechter Winkel.

Beweis (5) und (17).

Lehrsatz 16. Werden von einem Punkte außerhalb eines spitzen Winkels Normalen auf beide Schenkel desselben gefället: so ist die Normale, welche den unteren Schenkel trifft, größer als die Normale auf dem oberen Schenkel.

Beweis (19) und (G. 9).

Lehrsatz 17. Wenn man von einem Punkte des einen Schenkels eines Winkels eine Normale auf den andern Schenkel fället, so trifft diese den Schenkel selbst, wenn der Winkel $< R$ ist; und sie trifft den rückwärts verlängerten Schenkel, wenn der Winkel $> R$ ist.

Beweis (17).

Lehrsatz 18. Theilt man die Grundlinien eines gleichschenkligen Dreiecks ungleich, und verbindet den Theilpunkt mit der Spitze: so bildet diese Linie mit dem größern der beiden Theile der Grundlinie einen spitzen, und mit dem kleinern Theile einen stumpfen Winkel.

Beweis (Lhrs. 4) und (Lhrs. 17).

Lehrsatz 19. Wenn man, innerhalb eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem Endpunkte der ersten Kathete eine Linie an irgend einen Punkt der andern Kathete zieht: so ist diese Linie größer als die erste Kathete, und kleiner als die Hypotenuse des Dreiecks.

Beweis (Lhrs. 13).

Lehrsatz 20. In einem ungleichseitigen Dreieck ist jeder der Winkel, die den kleinern Seiten gegenüber liegen, kleiner als ein rechter.

Beweis (17) und (18).

Lehrsatz 21. Wenn man in einem Dreieck einen Winkel halbirt: so wird durch die Halbirungslinie die gegenüber liegende

Seite so getheilt, daß jeder Abschnitt derselben kleiner ist, als die an demselben anliegende Seite des Dreiecks.

Beweis (16) und (19).

Anmerkung. Mit Hülfe dieses Lehrsatzes läßt sich unmittelbar beweisen, „daß je zwei Seiten eines Dreiecks zusammen größer als die dritte seyn müssen".

Lehrsatz 22. Wenn man, in irgend einem Dreieck, von einer Spitze eine Normale auf die gegenüberliegende Seite fället, so ist diese immer kleiner, als jede der beiden übrigen Seiten des Dreiecks.

Beweis (Lhrs. 13).

Lehrsatz 23. In jedem gleichschenkligen Dreieck ist der Schenkel größer, als die halbe Grundlinie.

Beweis (20).

Lehrsatz 24. Wenn man, in dem Halbirungspunkte der Grundlinie irgend eines Dreiecks, eine Normale auf derselben errichtet, und es schneidet diese die eine der beiden übrigen Seiten zwischen ihren Endpunkten: so ist diese größer als die andere dieser Seiten.

Beweis (20) und (4).

Lehrsatz 25. Fället man in einem Dreieck von der Spitze desselben eine Normale auf die Grundlinie, und wird diese hierdurch in ungleiche Abschnitte getheilt: so ist von den beiden übrigen Seiten diejenige die größere, welche an dem größern Abschnitte anliegt.

Beweis (Lhrs. 24).

Lehrsatz 26. Wird der Halbirungspunkt der einen Seite eines Dreiecks mit der gegenüberliegenden Spitze verbunden, so ist das Zweifache dieser Verbindungslinie kleiner, als die beiden übrigen Seiten des Dreiecks zusammen.

Beweis (20).

Lehrsatz 27. Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner, als die halbe Summe aller drei Seiten desselben.

Beweis (20).

Lehrsatz 28. Beschreibet man innerhalb eines Vierecks ein anderes, so daß Beide zwei nebeneinander liegende Seiten gemein haben, und kömmt kein einspringender Winkel vor: so ist der Umfang des äußern Vierecks größer, als der des innern.

Beweis (21).

Lehrsatz 29. Werden über einer und derselben Grundlinie irgend zwei geradlinige Figuren, die keinen einspringenden Winkel

haben, so beschrieben, daß die eine dieser Figuren innerhalb der andern liegt: so ist der ganze Umfang der äußern Figur größer, als der der innern.

Beweis (20) und (21).

Lehrsatz 30. Verbindet man den Halbirungspunkt der Grundlinie eines Dreiecks mit der gegenüber liegenden Spitze, und es macht die Verbindungslinie mit der Grundlinie des Dreiecks ungleiche Winkel: so ist von den beiden übrigen Seiten desselben diejenige die größere, welche auf der Seite des größern dieser Winkel liegt.

Beweis (24).

Lehrsatz 31. Wird die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks in ungleiche Abschnitte getheilt, und man verbindet den Theilpunkt mit der Spitze des Dreiecks: so wird durch die Verbindungslinie auch der Winkel an der Spitze ungleich getheilt; und es ist der Theil des Winkels der größere, welcher dem größern Abschnitte der Grundlinie gegenüber liegt.

Beweis (25).

Lehrsatz 32. In jedem Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

Beweis (29) und (26).

Lehrsatz 33 Wenn in einem Viereck die Diagonalen sich gegenseitig halbiren, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis (15) (4) und (27).

Lehrsatz 34. Wenn die Schenkel zweier Winkel parallel laufen, so sind die Winkel gleich groß.

Beweis (29).

Lehrsatz 35. Sind die drei Seiten eines Dreiecks den drei Seiten eines andern parallel, so haben beide Dreiecke gleiche Winkel; so daß der erste Winkel dem ersten, der zweite dem zweiten, und der dritte Winkel dem dritten gleich ist.

Beweis (Lhrs. 34).

Lehrsatz 36. Sind zwei Linien parallel, und man nimmt in jeder derselben beliebig einen Punkt an, verbindet diese Punkte und halbirt die Verbindungslinie: so wird jede, durch den Halbirungspunkt gezogene Linie, die beide Parallelen trifft, in diesem Punkte halbirt.

Beweis (15), (29) und (26).

Lehrsatz 37. Wenn zwei Linien normal auf einer dritten stehen, und man verbindet zwei, in diesen Normalen angenommene

Punkte mit einander: so sind die beiden Winkel, welche die Verbindungslinie mit den beiden Normalen auf einer und derselben Seite bildet, zusammen = 2 R.

Beweis (28) und (29).

Lehrsatz 38. Zieht man, durch den Halbirungspunkt der einen Seite eines Dreiecks, Parallelen mit den beiden übrigen Seiten desselben, so schneiden diese von dem Dreiecke zwei congruente Dreiecke ab.

Beweis (29) und (26).

Lehrsatz 39. Wenn ein Viereck zwei gleiche Diagonalen hat, und es schneiden sich dieselben in ungleiche Theile, doch so, daß der eine Abschnitt der einen dem einen Abschnitte der andern gleich ist: so hat dieses Viereck zwei parallele Seiten.

Beweis (15, (5) und (27).

Lehrsatz 40. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel zusammen so groß sind als der dritte, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Beweis (32).

Lehrsatz 41. Die vier Winkel eines Vierecks sind zusammen immer vier rechten Winkeln gleich.

Beweis (32).

Lehrsatz 42. Nimmt man innerhalb eines Winkels einen Punkt an, und fället von demselben Normalen auf beide Schenkel: so ergänzt der Winkel, den diese Normalen einschließen, den gegebenen Winkel zu 2 R.

Beweis (Lhrs. 41).

Lehrsatz 43. Nimmt man außerhalb eines Winkels einen Punkt an und fället von demselben Normalen auf beide Schenkel: so ist der Winkel, den diese Normalen einschließen, dem gegebenen Winkel gleich.

Beweis (15) und (32).

Lehrsatz 44. Wenn die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen auf den Seiten eines andern Dreiecks oder deren Verlängerungen normal stehen: so sind die Winkel des einen Dreiecks, einzeln genommen, den Winkeln des andern Dreiecks, einzeln genommen, gleich.

Beweis (15) und (Lhrs. 42).

Lehrsatz 45. Werden die drei Seiten eines Dreiecks nach einer und derselben Richtung verlängert: so sind die durch diese Verlängerungen und die Seiten des Dreiecks gebildeten drei Außenwinkel zusammen = 4 R.

Beweis (13) und (32).

Lehrsatz 46. Verlängert man die vier Seiten eines Vierecks nach Einer Richtung: so sind die dadurch entstehenden vier Außenwinkel zusammen = 4 **R**.

Beweis (13) und (Lhrs. 41).

Lehrsatz 47. Wenn man die vier Seiten eines Vierecks nach derselben Richtung verlängert, und die dadurch entstehenden Außenwinkel halbirt: so schließen die vier Halbirungslinien ein Viereck ein, in welchen je zwei einander gegenüber liegende Winkel zusammen = 2 **R** sind.

Beweis (13 und (32).

Lehrsatz 48. Fället man von dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks eine Normale auf die Hypotenuse desselben: so ist der Winkel, den diese Normale mit der einen Kathete bildet, eben so groß, als der Winkel, den die andere Kathete mit der Hypotenuse macht.

Beweis (32).

Lehrsatz 49. Haben zwei Dreiecke Eine Seite gemein und eine zweite Seite gleich groß, und ergänzen sich die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zu 2 **R**: so sind die Dreiecke gleich groß.

Beweis (38).

Lehrsatz 50. Wird in einem Viereck die erste Diagonale von der zweiten halbirt, so wird dieses Viereck durch die zweite Diagonale in zwei gleich große Dreiecke zerlegt.

Beweis (Lhrs. 49).

Lehrsatz 51. Haben zwei Dreiecke gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen, so sind diese Dreiecke ungleich; und es ist dasjenige von beiden das größere, welches die größere Höhe hat.

Beweis (40).

Lehrsatz 52. Haben zwei Winkel, die zusammen $<$ 2 **R** sind, einen Schenkel gemein, und man fället von einem Punkte desselben Normalen auf die beiden übrigen Schenkel: so ist die Normale auf der Seite des größern Winkels die größere.

Beweis (Lhrs. 16).

Lehrsatz 53. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, und sind die diese Seiten einschließenden Winkel zusammen $<$ 2 **R**: so ist das Dreieck das größere, in welchem der größere Winkel vorkömmt.

Beweis (Lhrs. 52) und Lhrs. 51).

Lehrsatz 54. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, und sind die diese Seiten einschließenden Winkel zusammen $>$ 2 **R**: so

ist das Dreieck das größere, in welchem der kleinere Winkel vorkömmt.

Beweis (Lhrs. 49) und (Lhrs. 53).

Lehrsatz 55. Wenn man durch die vier Ecken eines Vierecks Parallelen mit den beiden Diagonalen desselben zieht: so schließen diese Parallelen ein Parallelogramm ein, das zweimal so groß ist, als das Viereck.

Beweis (30) und (41).

Lehrsatz 56. Wenn man in einem spitzwinkligen ungleichseitigen Dreieck eine Normale von der einen Ecke auf die gegenüber liegende Seite fället, so wird dasselbe durch diese Normale in zwei ungleiche Theile getheilt; und es ist der Theil der größere, in welchem die größere Seite des Dreiecks vorkömmt.

Beweis (Lhrs. 25) und (38).

Lehrsatz 57. In jedem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck ist der Winkel an der Hypotenuse $= \frac{1}{2}$ **R**; und die Normale von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse ist der Hälfte dieser Linie gleich.

Beweis (5), (32) und (6).

Lehrsatz 58. Wenn ein Viereck zwei gleiche Diagonalen hat, die sich unter einem rechten Winkel schneiden und gegenseitig halbiren, so ist dieses Viereck ein Quadrat.

Beweis (Lhrs. 57).

Lehrsatz 59. Das Quadrat der Diagonale eines Quadrats ist zweimal so groß, als das Quadrat selbst.

Beweis (47).

Lehrsatz 60. In jedem Rechteck ist das Quadrat der Diagonale halb so groß, als die Summe der Quadrate der vier Seiten desselben.

Beweis (47).

Lehrsatz 61. Wenn in einem Viereck die Diagonalen sich unter einem rechten Winkel schneiden: so ist die Summe der Quadrate der vier Abschnitte der beiden Diagonalen halb so groß, als die Summe der Quadrate der vier Seiten des Vierecks.

Beweis (47).

Lehrsatz 62. In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Quadrate der drei Seiten viermal so groß, als das Quadrat der Höhe desselben.

Beweis (Lhrs. 4) und (47).

Lehrsatz 63. Fället man in einem Dreieck eine Normale von der einen Ecke auf die gegenüberliegende Seite: so wird diese immer so in zwei Abschnitte getheilt, daß das Quadrat des einen Abschnittes und das Quadrat der an dem anderen Abschnitte anliegenden Seite, zusammen eben so groß sind, als die Summe der Quadrate des anderen Abschnittes und der an dem ersten Abschnitte anliegenden Seite.

Beweis (47).

Lehrsatz 64. Wenn in einem Viereck die Diagonalen sich unter einem rechten Winkel schneiden, und man beschreibt aus je zwei einander gegenüber liegenden Seiten dieses Vierecks ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem diese Seiten die Katheten sind: so haben die beiden, auf diese Weise construirten, rechtwinkligen Dreiecke gleiche Hypotenusen.

Beweis (47).

Lehrsatz 65. Sind die, von dem Halbirungspunkte der Grundlinie eines Dreiecks auf die beiden übrigen Seiten desselben gefällten Normalen gleich groß, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Beweis (47), (8) und (6).

Lehrsatz 66. Haben zwei Dreiecke die Grundlinie gemein und die beiden übrigen Seiten gleich, und sind beide auf derselben Seite der Grundlinie verzeichnet, ohne sich zu decken: so sind die beiden Theile, welche sie nicht gemein haben, zwei congruente Dreiecke.

Beweis (26).

Lehrsatz 67. Nimmt man in den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks Punkte an, die zwischen den Endpunkten derselben liegen, und verbindet sie durch eine gerade Linie: so ist diese Linie immer kleiner, als die Hypotenuse des Dreiecks.

Beweis (47).

Lehrsatz 68. Haben zwei rechtwinklige Dreiecke die Hypotenuse gleich, ist aber die Kathete A des ersten Dreiecks größer, als die Kathete a des andern: so ist auch der Winkel, welcher in dem ersten Dreieck A gegenüber liegt, größer als der Winkel, der a in dem zweiten Dreieck gegenüber liegt.

Beweis (Lhrs. 67) und (16).

Lehrsatz 69. Sind die, von dem Halbirungspunkte der Grundlinie eines Dreiecks auf die beiden übrigen Seiten des Dreiecks gefällten Normalen ungleich: so ist von diesen Seiten diejenige die größere, welche zu der kleineren Normale gehört.

Beweis (Lhrs. 68) und (19).

Lehrsatz 70. Werden von den Endpunkten der einen Seite eines Dreiecks Normalen auf die beiden übrigen Seiten gefället: so ist die Normale auf die kleinere dieser beiden Seiten größer als die, welche auf die größere Seite gefället ist.

Beweis (18) und (Lhrs. 68).

IV. Von der Theorie der Parallelen.

1) Es läßt sich nicht leicht ein wissenschaftlicher Gegenstand angeben, dessen Begründung auf so viel verschiedene Arten versucht worden wäre, wie Dieses bei der Theorie der Parallelen der Fall ist; und von allen diesen Versuchen muß zugestanden werden, „daß sie ihre schwache Seite haben, und keinesweges den Anforderungen entsprechen, die man mit Recht bei jedem geometrischen Gegenstande machen kann". Nach den mannichfachsten Versuchen kömmt man immer wieder auf die Darstellungsweise des Euklid zurück; und schon Dieses allein giebt den besten Beleg dafür, „daß derselbe auch bei diesem Gegenstande, wie bei allen anderen, den richtigen Weg angegeben hat".

2) Die ganze Theorie der Parallelen besteht (wie auch bereits in der Beilage **I.** bemerkt worden ist) in der Beantwortung der beiden Fragen:

a) woran läßt sich erkennen, daß zwei gegebene Linien parallel sind? und

b) welche Eigenschaften kommen parallelen Linien zu?

Die erste dieser Fragen muß deßhalb in Betracht gezogen werden, weil die Erklärung, welche von den Parallelen gegeben wird:

„parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, und auf keiner Seite zusammentreffen, so weit man sie auch auf beiden Seiten verlängern mag",

nur ein negatives Merkmal eigenthümlich hat; was unmittelbar, um daraus das Parallelseyn der Linien zu erkennen, nicht brauchbar ist.

3) In dem 17ten Satze wird bewiesen, „daß je zwei Winkel eines Dreiecks zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind"; hieraus folgt: wenn zwei Winkel zusammen nicht kleiner sind, als zwei rechte, so können sie auch nicht zu einem Dreieck gehören.

Werden also zwei Linien von einer dritten so geschnitten, daß die beiden inneren auf Einer Seite liegenden Winkel zusammen = 2 **R** sind, so können diese Linien auf dieser Seite nicht zusammentreffen; und da aus dieser Voraussetzung folgt, „daß die beiden inneren, auf der anderen Seite liegenden Winkel ebenfalls zusammen = 2 **R** seyn müssen" (13), so können diese Linien auch auf der anderen Seite nicht zusammentreffen; und es kommen also in diesem Falle den Linien die in der Erklärung der Parallelen angegebenen Merkmale zu, und sie sind daher parallel; wodurch die erste Frage vollständig beantwortet ist. Linien sind parallel, wenn sie von einer dritten geschnitten werden und die beiden inneren auf Einer Seite liegenden Winkel zusammen = 2 **R** sind. Gegen die Strenge der Beweise der Sätze 27 und 28 läßt sich daher durchaus nichts einwenden; und es ergiebt sich hieraus zugleich ein Mittel, „mit einer gegebenen Linie, durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt eine Parallele zu ziehen", eine Aufgabe, die in Satz 31. gelös't wird.

4) Da aus der Richtigkeit eines Satzes die des umgekehrten Satzes nicht nothwendig folgt, so kann auch aus dem bewiesenen Satze: „wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden inneren auf Einer Seite liegenden Winkel zusammen = 2 **R** sind, so sind diese Linien parallel" nicht umgekehrt gefolgert werden, „daß, wenn die Linien parallel sind, und sie von einer dritten geschnitten werden, die beiden inneren, auf einer Seite liegenden Winkel zusammen = 2 **R** seyn müssen". Dieser Satz, durch welchen die oben angegebene zweite Frage beantwortet wird, muß also besonders bewiesen werden.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aber unmittelbar, wenn man den Satz als richtig anerkennt:

„werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, und sind die beiden inneren auf Einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner, als zwei rechte, so müssen diese Linien, genugsam verlängert, auf eben dieser Seite zusammentreffen".

Dieser Satz ist der 11te Grundsatz, und ist der umgekehrte Satz von dem 17ten, wie bei diesem bereits bemerkt worden ist.

5) Dieser Grundsatz ist es, mit dessen Hülfe die oben angegebene zweite Frage von Euklid in dem 29sten Satze beantwortet wird; und der Vorwurf, der deßhalb dem Euklid gemacht wird, besteht darin, „daß der bei dem Beweise benutzte Satz keineswegs als Grundsatz angenommen werden könne, sondern daß dieser Satz

eigentlich ein Lehrsatz sey, und daher besonders bewiesen werden müsse".

6) Es läßt sich zwar nicht läugnen, „daß dieser Satz mehr den Charakter eines Lehrsatzes, als den eines Grundsatzes hat"; doch ist es möglich, denselben auf eine einfachere Form zu bringen, und so die Wahrheit desselben, die ohnehin Niemand bezweifelt, anschaulicher zu machen. So ist der Satz:

„wenn eine Linie **A** auf einer Linie normal steht und die Linie **B** trifft dieselbe unter einem spitzen Winkel, so müssen **A** und **B**, genugsam verlängert, sich schneiden";

bloß ein besonderer Fall von dem 11ten Grundsatze; und es ist dieser einfachere Satz ebenfalls ausreichend, um den 29sten Satz zu beweisen.

Ferner ist der 11te Grundsatz eine nothwendige Folge des Satzes:

„wenn man durch einen, außerhalb einer Linie gegebenen Punkt eine Parallele mit derselben zieht: so ist es nicht möglich, durch eben diesen Punkt noch eine zweite, von derselben verschiedene, Parallele zu ziehen".

Eben so folgt der 11te Grundsatz auch aus dem Satze:

„wenn von zwei parallelen Linien Eine von einer dritten Linie geschnitten wird, so muß die zweite von derselben Linie ebenfalls geschnitten werden".

Nimmt man also einen dieser beiden Sätze als Grundsatz an, so läßt sich mittelst desselben der 11te Grundsatz strenge beweisen.

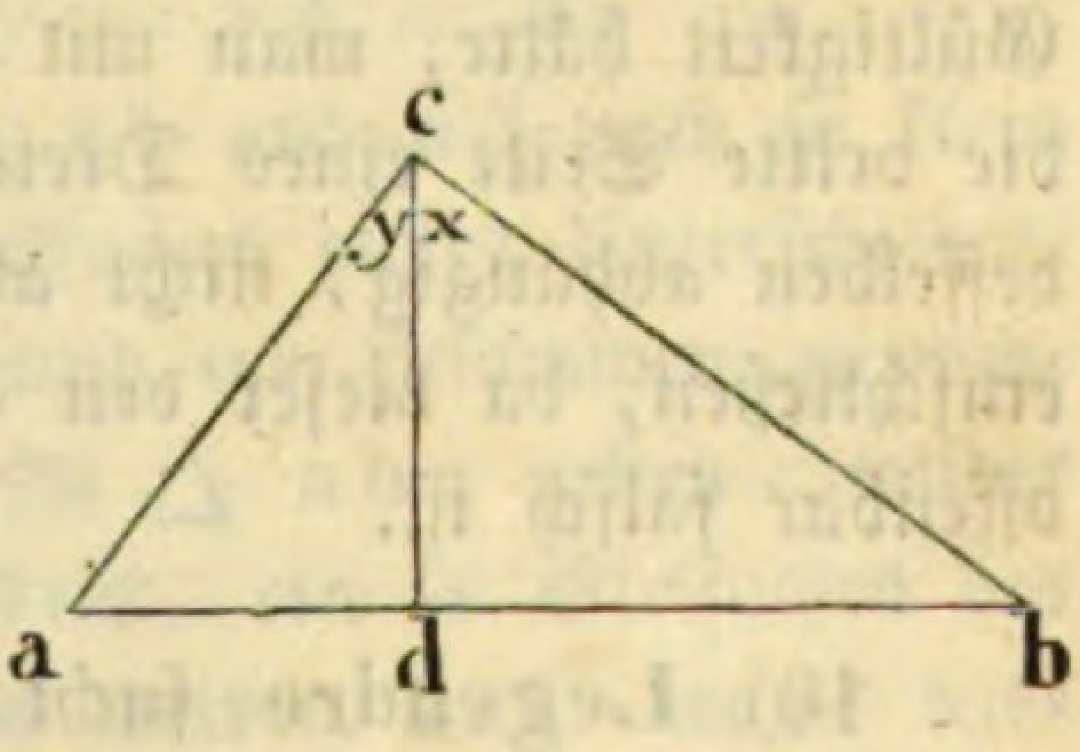
7) Alle die verschiedenen Beweise, welche man von dem 29sten Satze hat, hängen zuletzt von einem Satze ab, der ebenfalls nicht evidenter, als der 11te Grundsatz ist, oder der selbst als eine Folge von diesem sich ergiebt. Nur ist bei diesen Beweisen öfters der Schein gerettet, als wär' er streng', und die schwache Seite desselben ist mehr versteckt als bei dem Euklid; die Beweise sind also bloß erschlichen.

8) Um eine richtige Theorie von den Parallelen zu erhalten, kömmt es darauf an, „einen Satz ohne Beihülfe der Parallelen zu beweisen, den Euklid mit Hülfe derselben beweis't". Gelingt Dieses, so erhält man hierdurch ein neues Hülfsmittel zur Ergänzung der Parallelen-Theorie, durch welches der Zweck sich erreichen lassen muß. Der Satz, welcher hierzu am besten sich eignet, ist der 32ste. Kann man ohne Beihülfe der Parallelen beweisen, „daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen = 2 **R** seyn müssen": so läßt sich als-

dann durch diesen Satz auch leicht beweisen, „daß, wenn zwei Linien parallel sind, und dieselben von einer dritten Linie geschnitten werden, die beiden inneren auf einer Seite liegenden Winkel ebenfalls zusammen = 2 **R** sind".

Die Auffindung eines Beweises von dem 32sten Satze ohne Beihülfe der Parallelen ist auf verschiedene Arten versucht worden, und es verdienen hier einige dieser Versuche näher angegeben zu werden.

9) Crelle versucht, es in der zweiten Anmerkung zu seiner Uebersetzung von „Legendre, die Elemente der Geometrie, Berlin 1822" den Satz, daß alle drei Winkel eines Dreiecks zusammen = 2 **R** seyn müssen", auf folgende Art direkt zu beweisen: Haben zwei Dreiecke eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich, so decken sie sich; folglich ist ein Dreieck bestimmt, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel desselben gegeben sind. Durch diese Stücke ist also auch der dritte Winkel, der Größe nach, gegeben, und muß daher mittelst derselben gefunden werden können. Es kann aber hierbei die Seite gar keinen Einfluß haben, weil Seiten und Winkel ungleichartige Größen sind, und sich daher aus arithmetischen Gründen einsehen läßt, „daß die gegebene Seite als einzige heterogene Größe gar nicht einwirken kann". Folglich ist der dritte Winkel seiner Größe nach bestimmt durch die beiden übrigen Winkel, unabhängig von der Seite, die diese Winkel einschließen. Hieraus folgt nun: haben also zwei Dreiecke zwei Winkel gleich, so daß der erste Winkel dem ersten und der zweite dem zweiten gleich ist: so muß der dritte Winkel in beiden Dreiecken ebenfalls gleich seyn.



Es sey Δ **abc** ein bei **c** rechtwinkliges Dreieck, und **cd** normal auf **ab**, so ist

$\llcorner$ **cdb** = $\llcorner$ **acb** = **R**

und $\llcorner$ **b** = $\llcorner$ **b**.

Also hat Δ **cdb** mit Δ **acb** zwei Winkel gleich, und daher auch den dritten.

$$\begin{aligned} \text{Folglich ist } \angle x &= \angle a \\ \text{und aus gleichen Gründen ist } \angle y &= \angle b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{daher } \angle x + \angle y &= \angle a + \angle b. \\ \text{Da nun } \angle x + \angle y &= \angle acb = R \\ \text{so ist auch } \angle a + \angle b &= R \\ \text{und weil } \angle acb &= R \end{aligned}$$

$$\text{so folgt } \angle a + \angle b + \angle acb = 2R.$$

Die drei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind also zusammen $= 2$ R, und die an der Hypotenuse anliegenden Winkel sind beide zusammen $=$ R.

Nimmt man nun an, „daß Δ acb nicht rechtwinklig sey": so kann man doch immer von der Spitze c des größten Winkels eine Normale cd auf die gegenüber liegende Seite ab ziehen, die nothwendig innerhalb des Dreiecks liegt; und es ist nun, nach dem Bewiesenen, in dem rechtwinkligen Dreieck

$$\begin{aligned} \Delta\, acd \quad . \; . \; . \quad a + y &= R \\ \Delta\, bcd \quad . \; . \; . \quad b + x &= R \end{aligned}$$

$$\text{Folglich ist } a + b + \underbrace{y + x} = 2R$$

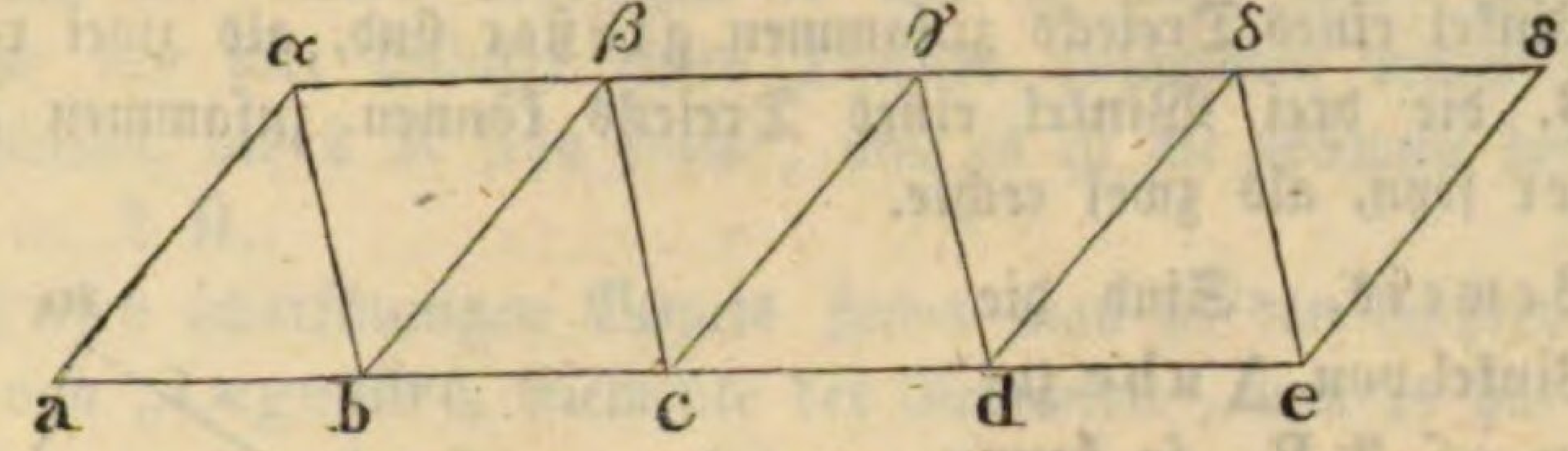
$$\text{und daher } a + b + acb = 2R$$

und es sind also auch in dem Falle, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist, die drei Winkel desselben zusammen $= 2$ R.

Gegen diese ganze Schlußfolge läßt sich nur einwenden: daß man keineswegs zu der Behauptung berechtigt ist, „es sey der dritte Winkel eines Dreiecks bloß abhängig von den beiden übrigen, nicht aber von der Seite, welche diese Winkel einschließen, weil die Seite den Winkeln ungleichartig ist"; da, wenn dieser Satz allgemeine Gültigkeit hätte, man mit demselben Rechte folgern könnte, „es sey die dritte Seite eines Dreiecks nur von den beiden übrigen Seiten desselben abhängig, nicht aber von dem Winkel, den diese Seiten einschließen, da dieser den Seiten ungleichartig ist"; ein Satz, der offenbar falsch ist.

10) **Legendre** sucht den Satz, „daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen $= 2$ **R** seyn müssen", indirect dadurch zu beweisen, daß er beweis't: es können die drei Winkel eines Dreiecks zusammen weder größer noch kleiner seyn als 2 R. Er bildet hieraus folgende beiden Lehrsätze:

A. die drei Winkel eines Dreiecks können zusammen **nicht größer** seyn, als zwei rechte.



Beweis. Sind die drei Winkel von Δ abα zusammen $>$ 2 R, und man verlängert ab, nimmt bc $=$ cd $=$ de $=$ ab, und beschreibt die Dreiecke Δ bcβ $=$ Δ cdγ $=$ Δ deδ $=$ Δ abα, so daß

bβ $=$ cγ $=$ dδ $=$ aα und cβ $=$ dγ $=$ eδ $=$ bα (22.)

so decken sich diese Dreiecke (8.), und es ist in jedem derselben die Summe der drei Winkel $>$ 2 R; es ist also

$\angle\, \beta$bc $= \angle$ a

Da nun seyn soll $\angle$ a $+ \angle$ aαb $+ \angle\, \alpha$ba $>$ 2 R

so ist auch $\angle\, \beta$bc $+ \angle$ aαb $+ \angle\, \alpha$ba $>$ 2 R

und da $\angle\, \beta$bc $+ \angle\, \beta$bα $+ \angle\, \alpha$ba $=$ 2 R (13.)

so folgt $\angle$ aαb $> \angle\, \beta$bα.

Und da aα $= \beta$b (p. c.)

und αb $=$ bα „

so folgt ab $> \alpha\beta$. (24.)

Und aus gleichen Gründen ist bc $> \beta\gamma$

cd $> \gamma\delta$

de $> \delta\varepsilon$.

während zu gleicher Zeit ist ab $=$ bc $=$ cd $=$ de

und $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\varepsilon$

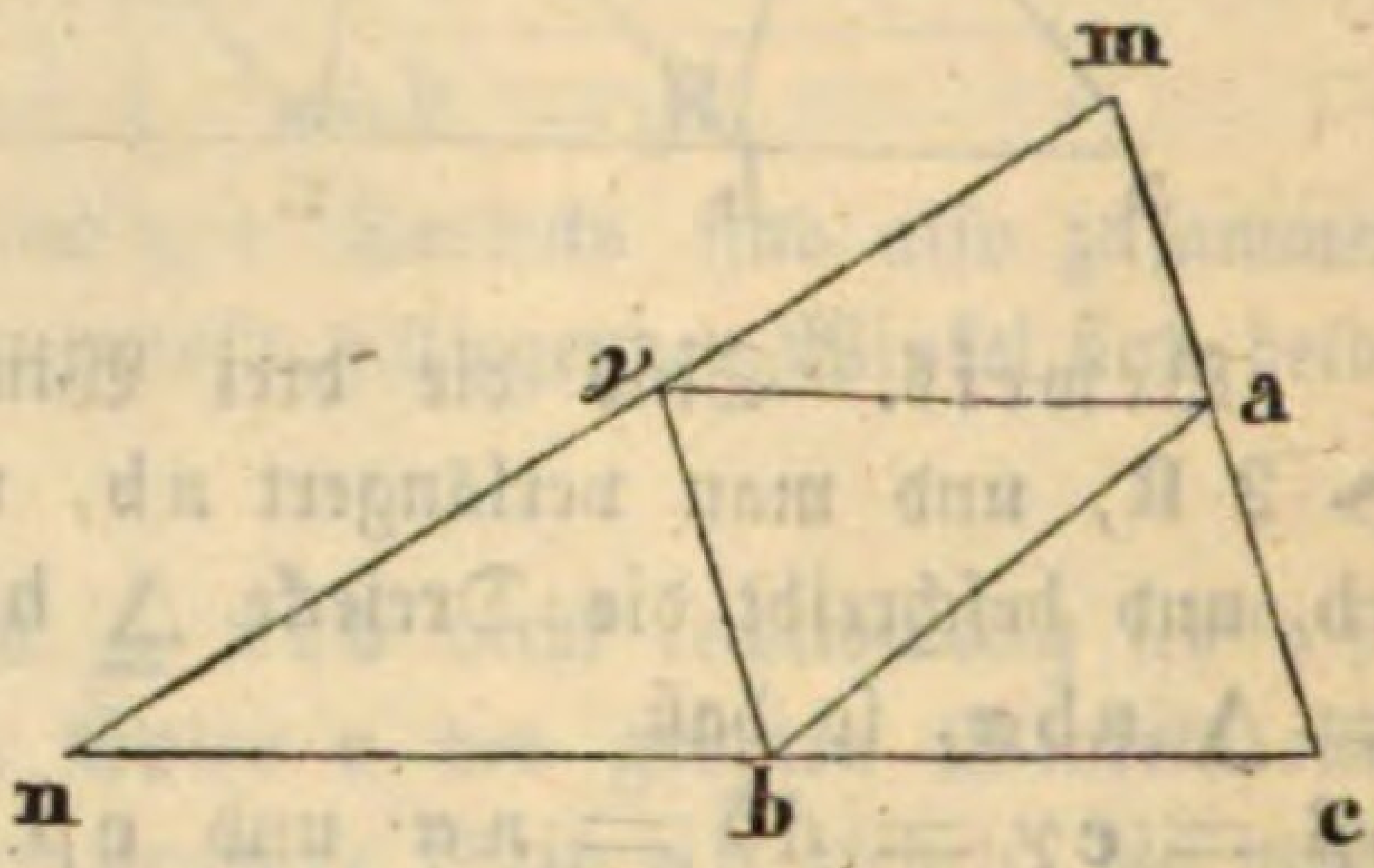
Nun mag der Unterschied zwischen ab und $\alpha\beta$ noch so klein seyn, so giebt es doch immer ein so Vielfaches dieses Unterschiedes, daß dieses Vielfache größer ist, als aα und eε zusammen genommen; und werden eben so viel Dreiecke $\cong$ Δ abα neben einander auf ab und deren Verlängerung verzeichnet, ein so Vielfaches des Unterschiedes von ab $-$ $\alpha\beta$ genommen werden muß, wenn dasselbe mehr als aα $+$ eε betragen soll: so ist alsdann, wenn ae dieses Vielfache beträgt

ae $>$ aα $+ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon$e;

was nicht möglich ist, wie aus (20.) folgt.

Nun ist aber dieses Resultat eine Folge der Annahme, „daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen $>$ 2 R sind"; es kann also Dieses nicht der Fall seyn, und es ist sonach nicht möglich, „daß die drei Winkel eines Dreiecks zusammen größer sind, als zwei rechte."

B. die drei Winkel eines Dreiecks können zusammen nicht kleiner seyn, als zwei rechte.



Beweis. Sind die drei Winkel von Δ abc zusammen $<$ 2 R, so kann man setzen, „es sey die Summe derselben $= 2 R - d$". Beschreibt man nun über ab, $\Delta ab\gamma = \Delta bac$, so daß $a\gamma = bc$ und $b\gamma = ac$: so sind auch in diesem Dreieck die drei Winkel zusammen $= 2 R - d$.

Legt man nun durch γ eine gerade Linie, welche die verlängerten ca und cb in m und n schneidet: so werden hierdurch noch die beiden Dreiecke $a\gamma m$ und $b\gamma n$ gebildet, und es sind die drei Winkel eines jeden dieser Dreiecke höchstens $=$ 2 R. Es sind also die drei Winkel

von $\Delta\ am\gamma$ höchstens $= 2 R$
„ $\Delta\ bn\gamma$ „ $= 2 R$
und die drei Winkel von Δ abc sind $= 2 R - d$
„ „ „ $\Delta\ ab\gamma$ „ $= 2 R - d$.

Die Summe dieser 12 Winkel ist also höchstens $= 8 R - 2 d$.
Da nun die 9 Winkel bei a, b und $\gamma = 3 \times 2 R = 6 R$ (13)

so sind die 3 Winkel von Δ cmn $= 2 R - 2 d$.

Sind also die drei Winkel von Δ abc $= 2 R - d$, so giebt es ein größeres Dreieck, von welchem die drei Winkel zusammen höchstens $= 2 R - 2 d$ sind. Aus gleichen Gründen muß es nun wieder größere Dreiecke geben, wo die Differenz immer zweimal so groß wird; und es lassen sich daher Dreiecke erzeugen, von welchen die Summe der drei Winkel nach und nach ist

$2 R - 2 d$; $2 R - 4 d$; $2 R - 8 d$; $2 R - 16 d$ ꝛc.

So klein aber auch d seyn mag, so giebt es doch ein Vielfaches von d $>$ 2 R; und hieraus folgt, „daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht in der angegebenen Art immer kleiner werden kann". Da nun Dieses aber eine nothwendige

Folge der Annahme ist, „daß die Summe der drei Winkel von Δ abc $<$ 2 R", so ist Dieses nicht möglich.

Aus den beiden Lehrsätzen **A** und **B** folgt also, „daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks zusammen weder größer noch kleiner, als 2 **R** seyn kann", und es ist die Summe derselben daher = 2 **R**.

Diesen scharfsinnigen Beweis findet man in den frühern Ausgaben von „Legendre, Elemente der Geometrie", und es hat Crelle denselben in der bereits angeführten Uebersetzung ebenfalls angegeben.

Daß indessen dieser Beweis ebenfalls nicht streng' ist, geht daraus hervor: daß verlangt wird, „es soll durch γ eine Linie gezogen werden, welche die verlängerte ca und cb trifft", ohne daß gezeigt wird, „es könne der Punkt m in der verlängerten ca so angenommen werden, daß die durch m und γ gezogene Linie nothwendig die verlängerte cb treffen muß"; und hier kömmt man wieder auf den 11ten Grundsatz des Euklid zurück.

Legendre hat selbst dieses Mangelhafte seines Beweises erkannt, und er hat denselben daher bei den späteren Ausgaben seiner Geometrie weggelassen, und hat statt dessen den 11ten Grundsatz des Euklid aufgenommen; wobei er sich darauf beschränkt, „denselben als einen Lehrsatz zu erläutern".

Anmerkung. Ein Mehreres über die Theorie der Parallelen findet man in J. J. J. Hoffmann, Kritik der Parallelen-Theorie, Jena 1807, und einen großen Theil der Schriften, die über Parallelen erschienen sind, findet man angegeben in desselben Verfassers Anmerkungen zu den geometrischen Büchern der Elemente des Euklid, Mainz 1832. Man findet in diesem Werke die Schriften über die Parallelen angeführt Seite 260—265.

V. Von den geometrischen Aufgaben.

Eine Aufgabe (Problem) ist die Forderung, „etwas Unbekanntes aus gegebenen Größen, unter gewissen Bedingungen, zu finden"; und die geometrische Aufgabe insbesondere enthält die Forderung, „eine Construction zu finden, durch welche das Verlangte geleistet wird". In den Aufgaben wird also verlangt: daß man aus gewissen gegebenen Dingen andere zu Stande bringe. Die Angabe des Verfahrens, durch welches das in der Aufgabe

Verlangte erhalten wird, ist **die Auflösung**; der noch ein **Beweis** beigefügt werden muß, durch welchen nachgewiesen wird, „daß das durch die Auflösung Gefundene wirklich das in der Aufgabe Verlangte sey".

Bei einer jeden Aufgabe unterscheidet man das Gegebene von dem Gesuchten; und zeigt nun in der Auflösung, „wie das Letztere aus dem Ersteren sich finden läßt"; und beweis't endlich die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens. Dieses ist der gewöhnliche Gang, der bei den Fundamental-Aufgaben der Geometrie befolgt wird, durch die erst Constructionsmittel für den weiteren Gebrauch beigeschafft werden sollen; wie Dieses bei den 14 Aufgaben des ersten Buches der Elemente der Fall ist.

Bei der Behandlung solcher Aufgaben aber, die nicht zu den Elementen gehören, sondern durch welche der Gebrauch der bereits vorgetragenen Sätze erläutert, und die Urtheilskraft in der Benutzung derselben geübt werden soll, ist ein solches Verfahren nicht ausreichend. Hier ist es erforderlich: daß man nicht nur die Auflösung kennen lerne, sondern auch die Art und Weise, „wie dieselbe gefunden wird". Zu dieser Absicht geht der Auflösung selbst eine Untersuchung voraus, „über den Zusammenhang des in der Aufgabe Gesuchten mit dem Gegebenen"; und diese Vorbereitung zur Auflösung nennt man **die Analysis** der Aufgabe.

Die Analysis besteht darin: daß man das Gesuchte als bereits gefunden annimmt, und zusieht, „woraus es zunächst folgt", hierauf untersucht, „woraus Dieses sich ergiebt", und so immer weiter, bis man auf diese Weise auf etwas kömmt, das unmittelbar gegeben ist, oder als gegeben angesehen werden kann. Bei der Auflösung selbst, die nun in der Angabe der erforderlichen Construction besteht, um das Gesuchte zu erhalten, braucht man nur denselben Weg in umgekehrter Ordnung zu verfolgen, der bei der Analysis nach und nach zurückgelegt worden ist. Die Vorbereitung zu der Analysis besteht darin: daß man eine, den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Figur entwirft, und in derselben zweckmäßige Hülfslinien zieht.

Erläuterungen.

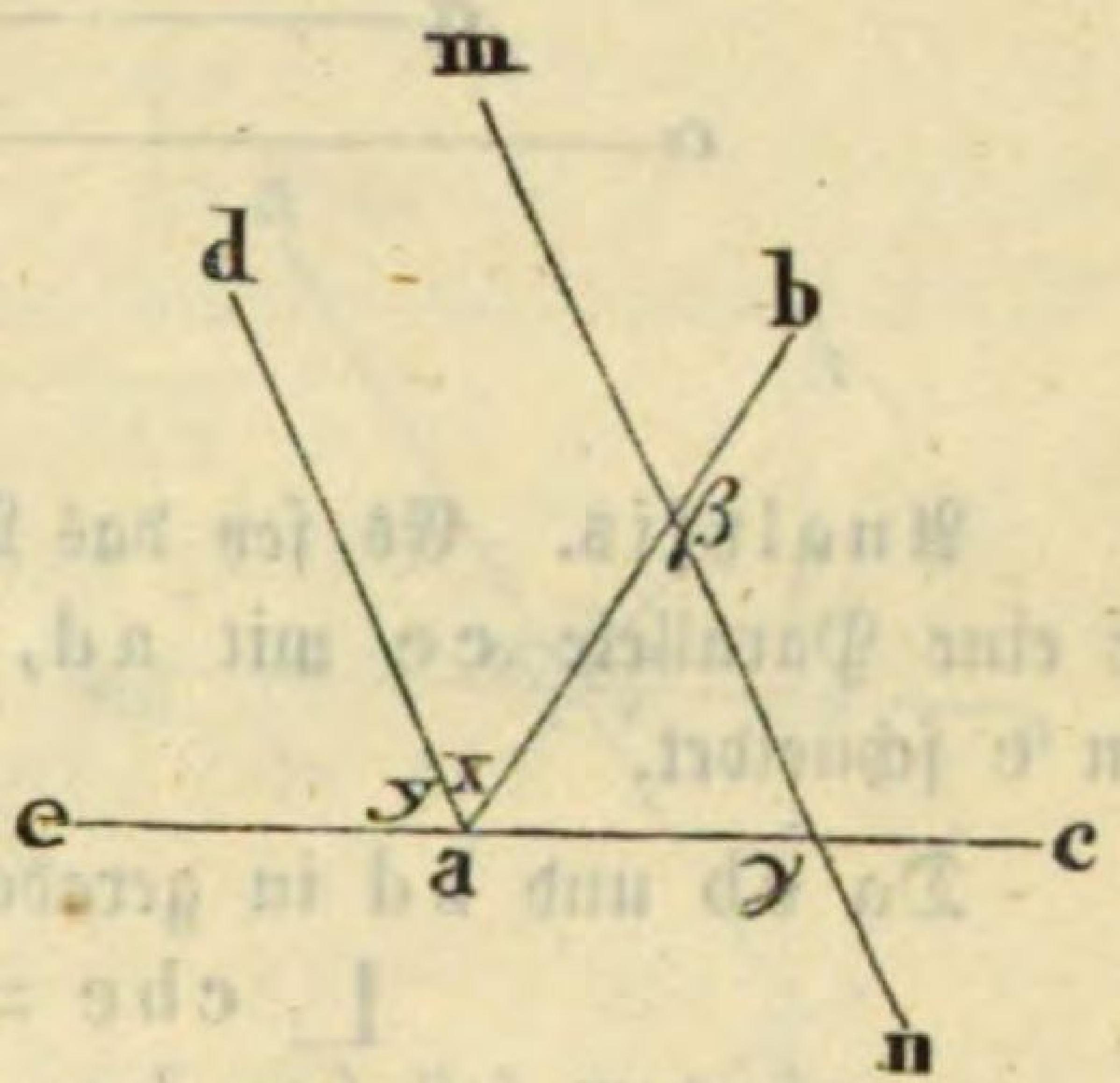
Aufgabe 1. Durch einen gegebenen Punkt soll eine gerade Linie gezogen werden, welche die beiden Schenkel eines gegebenen Winkels unter gleichen Winkeln schneidet.

Gegeben ist der Punkt m und der Winkel bac.

Gesucht wird eine gerade Linie mn, die eine solche Lage hat, daß $\llcorner\, a\beta\gamma = \llcorner\, a\gamma\beta$.

Analysis. Es sey mn die verlangte Linie; man verlängere den einen Schenkel ca nach e, und ziehe durch a die ad parallel mn, so ist

$$\llcorner\, a\beta\gamma = \llcorner\, x \quad (29.)$$
$$\text{und } \llcorner\, a\gamma\beta = \llcorner\, y \quad „$$



Da nun $\llcorner\, a\beta\gamma = \llcorner\, a\gamma\beta$ (p. h.)
so ist auch $\llcorner\, x = \llcorner\, y$
daher $\llcorner$ bae halbirt.

Nun ist $\llcorner$ bae gegeben, also kann ad gefunden werden (9.), und folglich auch die mn parallel ad (31).

Auflösung. Verlängere ca nach e, halbire den Winkel bae durch ad (9.), und ziehe mit der Halbirungslinie ad durch den gegebenen Punkt m eine Parallele mn, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis. Da mn parallel ad, so ist

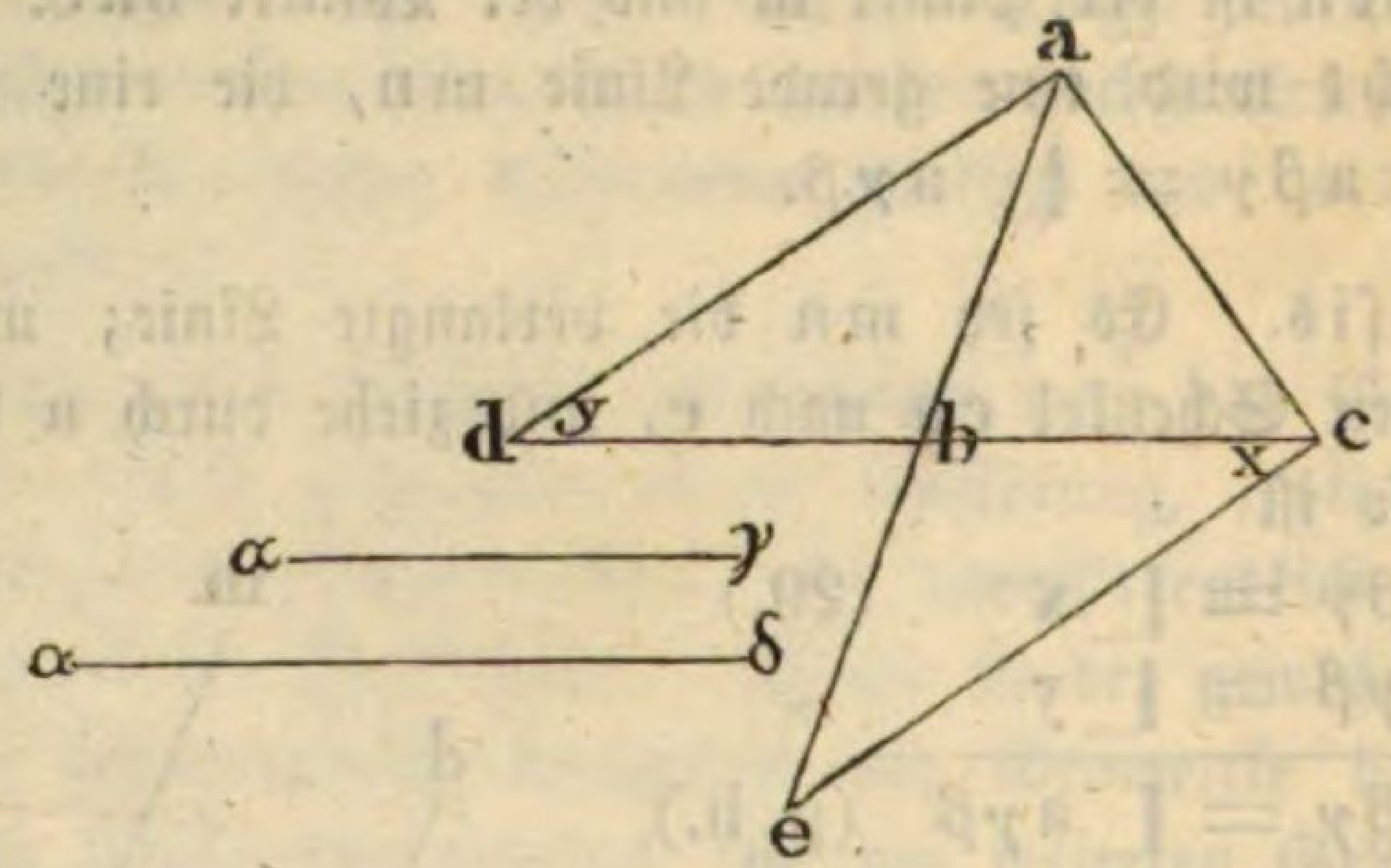
$$\llcorner\, a\beta\gamma = \llcorner\, x \quad (29.)$$
$$\text{und } \llcorner\, a\gamma\beta = \llcorner\, y$$

$$\text{Da nun } \llcorner\, x = \llcorner\, y \quad (\text{p. c.})$$
$$\text{so ist auch } \llcorner\, a\beta\gamma = \llcorner\, a\gamma\beta.$$

Aufgabe 2. Eine Linie ist der Größe und Lage nach gegeben; man soll an dem einen Endpunkte, auf verschiedenen Seiten derselben, zwei der Größe nach gegebene Linien so mit dem einen ihrer Endpunkte anlegen, daß die anderen Endpunkte derselben mit dem andern Endpunkte der, der Lage nach gegebenen, in gerader Linie liegen und gleich weit von demselben abstehen.

Gegeben ist die Linie ab der Größe und Lage nach, und die Linien $\alpha\gamma$ und $\alpha\delta$ der Größe nach.

Man soll an a die ac $= \alpha\gamma$ auf der einen Seite, und die ad $= \alpha\delta$ auf der anderen Seite so anlegen, daß c und d mit b in gerader Linie liegen, und bc $=$ bd ist.



Analysis. Es sey das Verlangte geschehen; man ziehe durch c eine Parallele ce mit ad, und verlängere ab, bis sie dieselbe in e schneidet.

Da cb und bd in gerader Linie seyn sollen, so muß seyn

$$\angle cbe = \angle dba \quad (15.)$$

außerdem soll seyn $bc = bd$

und es ist $\angle x = \angle y$. (p. c.) und (29.)

Es ist also auch $\Delta\, cbe \cong \Delta\, dba$ (26.)

und daher $be = ba$, also ae der Größe und Lage nach gegeben und $ce = da$.

Da nun $da = \alpha\delta$ und $ac = \alpha\gamma$

so sind ce und ca der Größe nach, und folglich das Dreieck aec der Größe und Lage nach gegeben. (22.)

Da nun aber ad parallel ce, so ist auch ad der Lage nach gegeben.

Auflösung. Verlängere ab, mache $be = ab$, beschreibe mit den drei Linien ae, $ac = \alpha\gamma$ und $ec = \alpha\delta$ das Dreieck aec (22.), und ziehe mit ce die ad parallel und mache dieselbe $= \alpha\delta$: so ist das Verlangte geschehen.

Beweis. Ziehe cb und bd, so ist nun

da $ab = be$

und $ad = ce$

und weil ad parallel ce, $\angle dab = \angle ceb$

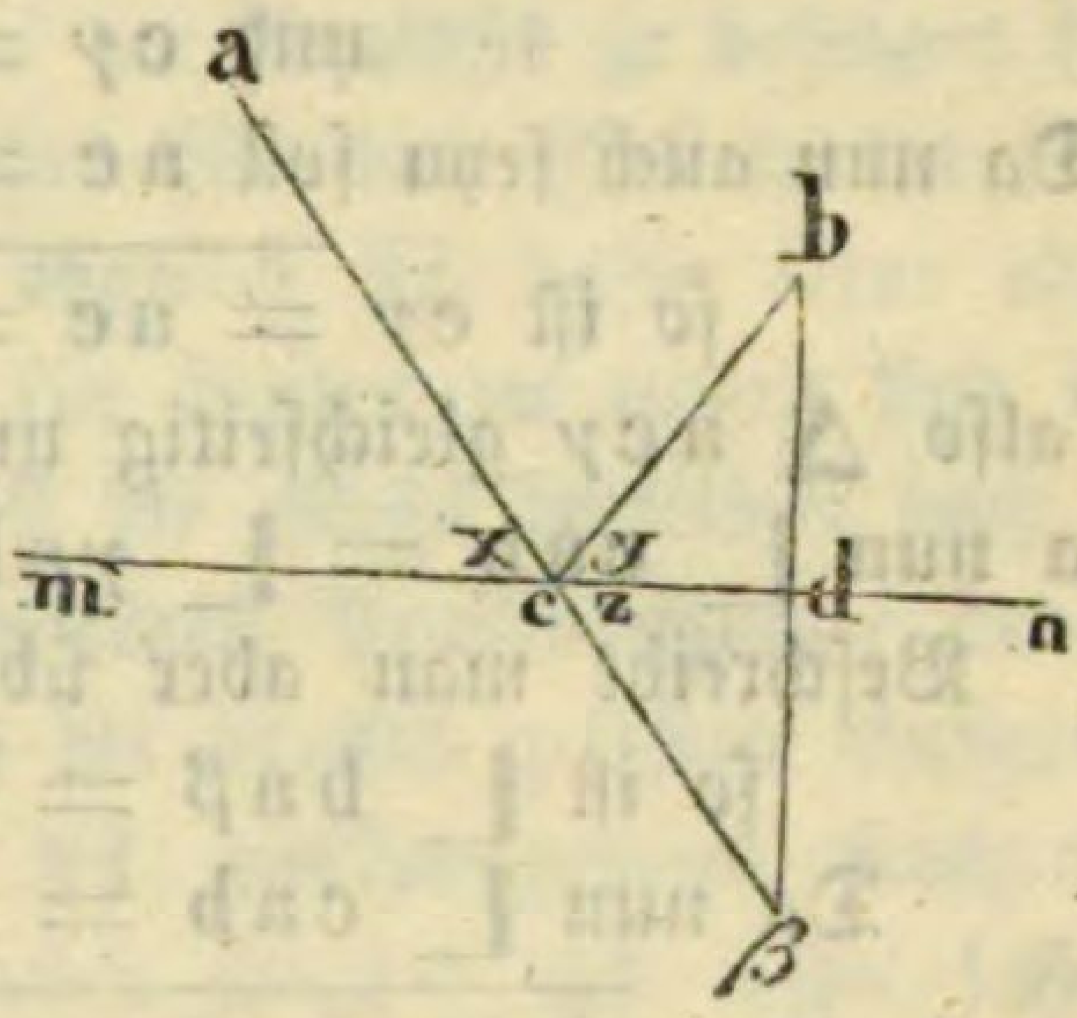
$$\Delta\, dab \cong \Delta\, ceb. \quad (4.)$$

Also ist $bd = bc$ und $\angle abd = \angle ebc$.

Daher stehen d und c gleich weit von b ab, und es ist bd mit bc in gerader Linie (14.); und außerdem ist $ac = \alpha\gamma$ und $ad = \alpha\delta$, wie verlangt wird.

Aufgabe 3. Es sind zwei Punkte gegeben und eine gerade Linie der Lage nach; man soll, an einem zu bestimmenden Punkte dieser Linie, von den beiden gegebenen Punkten Linien ziehen, die mit der gegebenen gleiche Winkel bilden.

Ist mn die gegebene Linie, und sind a und b die beiden Punkte: so soll der Punkt c in mn so bestimmt werden, daß $\angle acm = \angle bcn$, also $\angle x = \angle y$ wird.



Analysis. Ist c der zu bestimmende Punkt und man verlängert ac, so wird

$$\angle x = \angle z \quad (15.)$$

Da nun seyn soll $\angle x = \angle y$

so ist auch $\angle z = \angle y$

wird also $c\beta = cb$ genommen und $b\beta$ gezogen: so ist

$$\triangle dc\beta \cong \triangle dcb \quad (4.)$$

und daher $\angle \beta dc = bdc = R$ und $d\beta = db$.

Da nun b gegeben ist, so kann die Normale bd gefället werden (12.). Folglich ist bd der Größe und Lage nach gegeben, und wegen $d\beta = db$ ist nun auch β der Lage nach gegeben. Da nun a gegeben ist, so ist auch die Linie $a\beta$ gegeben; und folglich auch der Punkt c, in welchem sie die mn schneidet.

Auflösung. Ziehe von b die Normale bd auf mn (12.) verlängere dieselbe, mache $d\beta = db$ und verbinde β mit a durch βa: so schneidet diese die mn in dem gesuchten Punkte c.

Beweis. Es ist $bd = d\beta$ (p. c.)

und $\angle bdc = \angle \beta dc = R$.

Da nun $cd = cd$

so ist $\triangle bcd \cong \triangle \beta cd$ (4.)

also $\angle y = \angle z$.

Da nun $\angle z = \angle x$ (15.)

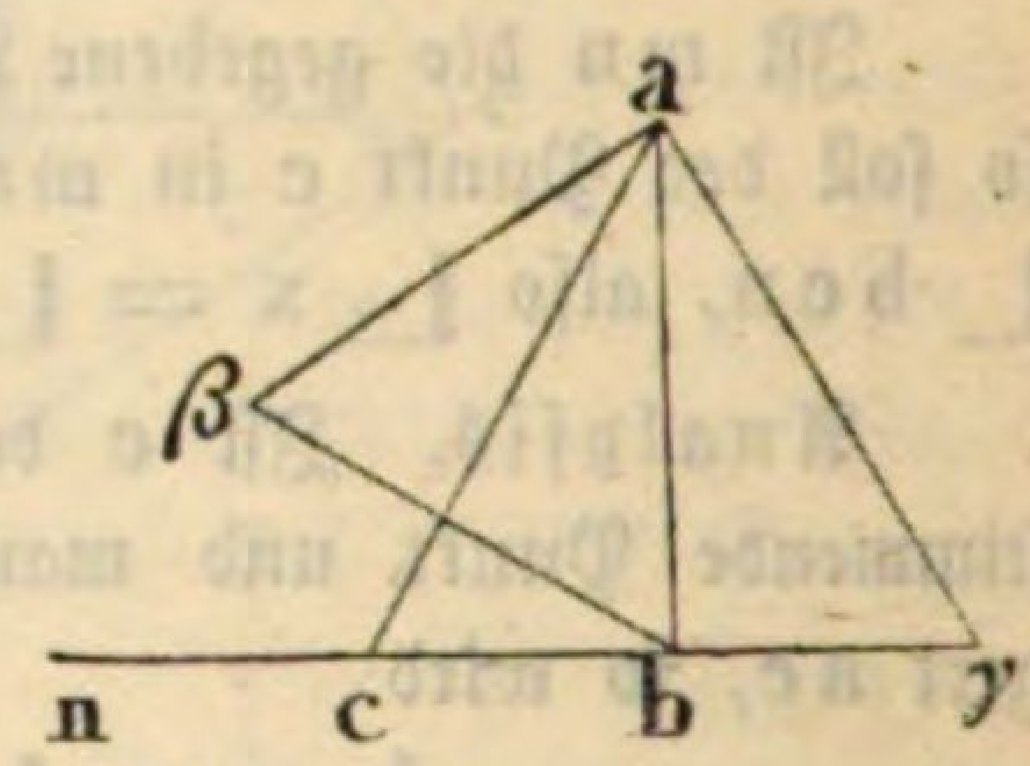
so ist auch $\angle x = \angle y$

wie verlangt wird.

Aufgabe 4. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gegeben; man soll dasselbe so construiren, daß die andere Kathete halb so groß, als die Hypotenuse desselben wird.

Ist ab die gegebene Kathete, so soll nun in dem bei b rechtwinkligen Dreieck abc, die ac zweimal so groß, als cb seyn.

Analysis. Es sey acb das zu construirende rechtwinklige Dreieck; man verlängere cb, mache $b\gamma = bc$ und ziehe $a\gamma$, so ist



(p. c.) $a\gamma = ac$
und $c\gamma = 2\,(cb)$
Da nun auch seyn soll $ac = 2\,(cb)$

so ist $c\gamma = ac = a\gamma$
also $\Delta\ ac\gamma$ gleichseitig und daher $\angle\ ca\gamma = \frac{2}{3}$ R.
Da nun $\angle\ cab = \angle\ \gamma ab$, so ist $\angle\ cab = \frac{1}{3}$ R.

Beschreibt man aber über ab das gleichseitige Dreieck $ab\beta$,
so ist $\angle\ ba\beta = \frac{2}{3}$ R
Da nun $\angle\ cab = \frac{1}{3}$ R

so ist auch $\angle\ ca\beta = \frac{1}{3}$ R (G. 3.)
folglich $\angle\ cab = \angle\ ca\beta$.

Da nun ab gegeben ist, so kann das gleichseitige Dreieck $ab\beta$ construirt werden (1.); und da $\angle\ cab = \angle\ ca\beta$, so ist ac der Lage nach bestimmt (9.); aber auch bc ist der Lage nach gegeben, weil abc = R seyn soll; folglich ist auch der Punkt c gegeben, und daher das verlangte Dreieck abc.

Auflösung. Beschreibe über ab das gleichseitige Dreieck $ab\beta$ (1.), halbire den Winkel $ba\beta$ durch ac (9.) und errichte in b auf ab eine Normale bn (11.), welche die ac in c schneidet, so ist das hierdurch bestimmte rechtwinklige Dreieck abc das verlangte.

Beweis. Verlängere cb, mache $b\gamma = bc$ und ziehe $a\gamma$: so ist $\Delta abc \cong \Delta ab\gamma$, also $\angle c = \angle \gamma$ und $\angle bac = \angle ba\gamma$.
Nun ist $\angle\ bac = \frac{1}{3}$ R (p. c.) also $\angle\ ca\gamma = \frac{2}{3}$ R.
Da nun $\angle\ c + \angle\ \gamma + \angle\ ca\gamma = 2$ R
und $\angle\ ca\gamma = \frac{2}{3}$ R

so ist $\angle\ c + \angle\ \gamma = \frac{4}{3}$ R
und weil $\angle\ c = \angle\ \gamma$

$\angle\ c = \frac{2}{3}$ R.

Hiernach ist $\angle\ c = \angle\ \gamma = \angle\ ca\gamma$, und daher $\Delta\ ac\gamma$ gleichseitig.

$$\begin{aligned} \text{Folglich ist } ca &= c\gamma \\ \text{aber } c\gamma &= 2\ (cb) \quad (p.\ c.) \\ \hline \text{also auch } ca &= 2\ .\ (cb) \end{aligned}$$

wie verlangt wird.

Aus den hier gelösten Aufgaben geht hervor: „wie durch die Analysis die Auflösung gefunden wird", und daß durch die Vorbereitung, und namentlich durch das Ziehen der Hülfslinien das Verfahren bestimmt wird, welches man bei der Analysis zu befolgen hat. Dieses Ziehen der Hülfslinien ist daher für das Finden der Auflösung von großer Wichtigkeit; und obgleich sich dafür keine allgemeinen Regeln angeben lassen, „was für Linien zu ziehen sind und wie sie gezogen werden müssen", so ist die Wahl derselben doch insofern bestimmt: daß hierbei keine anderen Constructionen benutzt werden können, als diejenigen, welche die bereits gelösten Aufgaben darbieten. Da nun die in Beilage VI. vorkommenden Aufgaben sämmtlich mit Hülfe der Sätze des ersten Buches sich lösen lassen: so können zur Vorbereitung der Analysis auch nur die Constructionen benutzt werden, welche die in diesem Buche vorkommenden Aufgaben darbieten.

Bei der Analysis selbst kömmt es darauf an: zu erforschen, „was als bekannt oder gegeben angesehen werden kann, wenn man das Gesuchte als gegeben annimmt", und nun zu untersuchen, „was durch dieses Bekannte ferner gegeben ist, und so fort", bis man auf Etwas kömmt, das wirklich durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben ist. Daher ist es für die geometrische Analysis von Wichtigkeit: sich mit den Bedingungen bekannt zu machen, „unter welchen gewisse Größen als gegeben angesehen werden können". Diese Bedingungen sind für die ganze Geometrie „in Euklid's Data" zusammengestellt; es setzt dieses Werk aber die Elemente voraus, und kann daher nur von Demjenigen verstanden werden, der mit den Elementen der Geometrie vollständig vertraut ist. Doch werden folgende wenige Sätze über diesen Gegenstand, bei der Auflösung der Aufgaben, wesentliche Dienste leisten.

1) Gerade Linien und Winkel sind der Größe nach gegeben, wenn man solche, die ihnen gleich sind, finden kann.

2) Punkte, Linien, Winkel und Figuren sind der Lage nach gegeben, wenn sie immer an demselben Orte sind.

3) Eine gerade Linie ist der Lage nach gegeben, wenn zwei Punkte derselben der Lage nach gegeben sind; und sind diese Punkte ihre Endpunkte, so ist sie auch der Größe nach gegeben.

4) Ist eine gerade Linie der Lage nach gegeben, und auch ein Punkt außerhalb derselben: so ist die Parallele, durch diesen Punkt mit jener Linie, ebenfalls der Lage nach gegeben.

5) Sind zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, so ist auch ihr Durchschnittspunkt der Lage nach gegeben.

6) Sind zwei gerade Linien der Lage nach gegeben: so ist der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, der Größe und der Lage nach gegeben.

7) Ein Kreis ist der Größe nach gegeben, wenn der Radius desselben der Größe nach gegeben ist.

8) Ein Kreis ist der Lage und Größe nach gegeben, wenn sein Mittelpunkt der Lage nach, und sein Radius der Größe nach gegeben ist.

9) Ist ein Kreis der Größe und Lage nach gegeben, und eine gerade Linie der Lage nach, die zum Theil in dem Kreise liegt: so sind die Durchschnittspunkte Beider der Lage nach gegeben.

10) Sind zwei Kreise der Größe und Lage nach gegeben, die zum Theil in und zum Theil außer einander liegen: so sind die Durchschnittspunkte Beider der Lage nach gegeben.

11) Von einem Dreieck sagt man, „es ist der Größe und der Art nach gegeben", wenn ein demselben congruentes Dreieck verzeichnet werden kann.

12) Daher ist ein gleichseitiges Dreieck der Größe und der Art nach gegeben, wenn die Seite desselben der Größe nach gegeben ist.

13) Ein Dreieck überhaupt ist der Größe und der Art nach gegeben, wenn die drei Seiten desselben der Größe nach gegeben sind.

14) Ist von einem Dreieck Eine Seite der Größe und Lage nach, und der Scheitel des gegenüber liegenden Winkels der Lage nach gegeben: so ist das Dreieck selbst der Art, Größe und Lage nach gegeben.

15) Ein Dreieck ist der Art, Größe und Lage nach gegeben, wenn die Scheitel der drei Winkel desselben der Lage nach gegeben sind.

Den Raum, in welchem ein den Bedingungen einer Aufgabe Genüge leistender Punkt liegen muß, nennt man den geometrischen Ort dieses Punktes. Hieraus folgt:

16) der geometrische Ort eines Punktes ist gegeben, wenn die Linie der Lage nach gegeben ist, in der er liegen muß.

Kennt man also den geometrischen Ort eines Punktes, und läßt sich noch ein zweiter geometrischer Ort für eben diesen Punkt finden: so ist hierdurch der Punkt selbst der Lage nach bestimmt. Da es nun bei der Auflösung der Aufgaben immer darauf ankömmt, „die Lage gewisser Punkte kennen zu lernen": so wird sich die Auflösung auch in vielen Fällen darauf zurück führen lassen, „einen geometrischen Ort eines solchen Punktes auf zwei verschiedene Arten zu bestimmen".

Erläuterungen.

Aufgabe 5. In der einen Seite eines gegebenen Dreiecks ist ein Punkt gegeben; man soll von demselben aus eine Linie durch das Dreieck so ziehen, daß dasselbe dadurch in zwei gleiche Theile getheilt wird.

Gegeben ist das Dreieck **abc**, und der Punkt **d** in der einen Seite **a b** desselben.

Gesucht wird die Lage der Linie **dx**, durch welche das Dreieck so getheilt wird, daß die Theile **dax** und **dbcx** gleich groß sind.

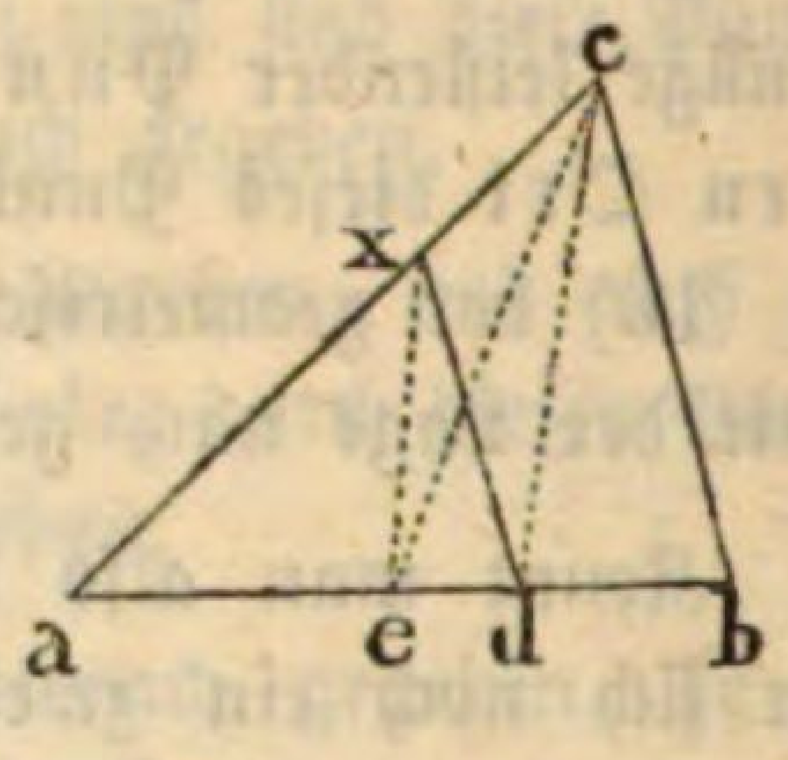
Analysis. Es sey **x** der gesuchte Punkt; man ziehe **cd**, und mit derselben durch **x** die Parallele **xe** (31.) und ziehe **ce**.

Es ist **cd** der Größe und Lage nach gegeben; ist also der Punkt **x** gegeben, so ist auch die Parallele **xe** mit **cd**, der Lage nach gegeben, und daher auch der Punkt **e**, in welchem sie die **ab** schneidet, und folglich das Dreieck **cde**.

Nun ist $\Delta\ cdx = \Delta\ cde$ (37.)
und $\Delta\ bcd = \Delta\ bcd$

folglich ist $dbcx = \Delta\ bce$. (G. 2.)
Da nun seyn soll $dbcx = \frac{1}{2}\Delta\ abc$
so ist auch $\Delta\ bce = \frac{1}{2}\Delta\ abc$.
Und weil $\Delta\ ace + \Delta\ bce = \Delta\ abc$

so ist auch $\Delta\ ace = \frac{1}{2}\Delta\ abc$ (G. 3.)
also $\Delta\ ace = \Delta\ bce$
was nur der Fall seyn kann, wenn $ae = eb$ ist.



Da nun **ab** gegeben ist, so ist auch der Halbirungspunkt **e** derselben gegeben; folglich kennt man die Lage der **ex**, die der **cd** parallel seyn soll, und diese Linie ist ein geometrischer Ort des Punktes **x**; aber auch **ac** ist ein geometrischer Ort desselben, folglich ist der Punkt **x** der Lage nach gegeben.

Auflösung. Halbire **ab** in **e** (10), ziehe **cd**, und mit derselben durch **e** eine Parallele: so schneidet Diese die **ac** in **x** so, daß, wenn man **dx** zieht, das Dreieck durch diese Linie halbirt wird.

Beweis. Da $ae = eb$ (p. c.)

so ist $\Delta\, aec = \Delta\, bec$ (37.)

und daher $\Delta\, bec = \frac{1}{2}\, \Delta\, abc.$

Und weil $\Delta\, bec = \Delta\, bcd + \Delta\, dce$

so ist auch $\Delta\, bcd + \Delta\, dce = \frac{1}{2}\, \Delta\, abc$

aber $\Delta\, dce = \Delta\, dcx.$ (37.)

Folglich ist $\underbrace{\Delta\, bcd + \Delta\, dcx} = \frac{1}{2}\, \Delta\, abc$

also $bdxc = \frac{1}{2}\, \Delta\, abc.$

Aufgabe 6. Zwei Linien sind der Lage nach gegeben; man soll zwischen denselben einen Punkt von der Lage finden, daß die Normalen von diesem Punkte, auf die der Lage nach gegebenen Linien, zweien der Größe nach gegebenen Linien gleich seyen.

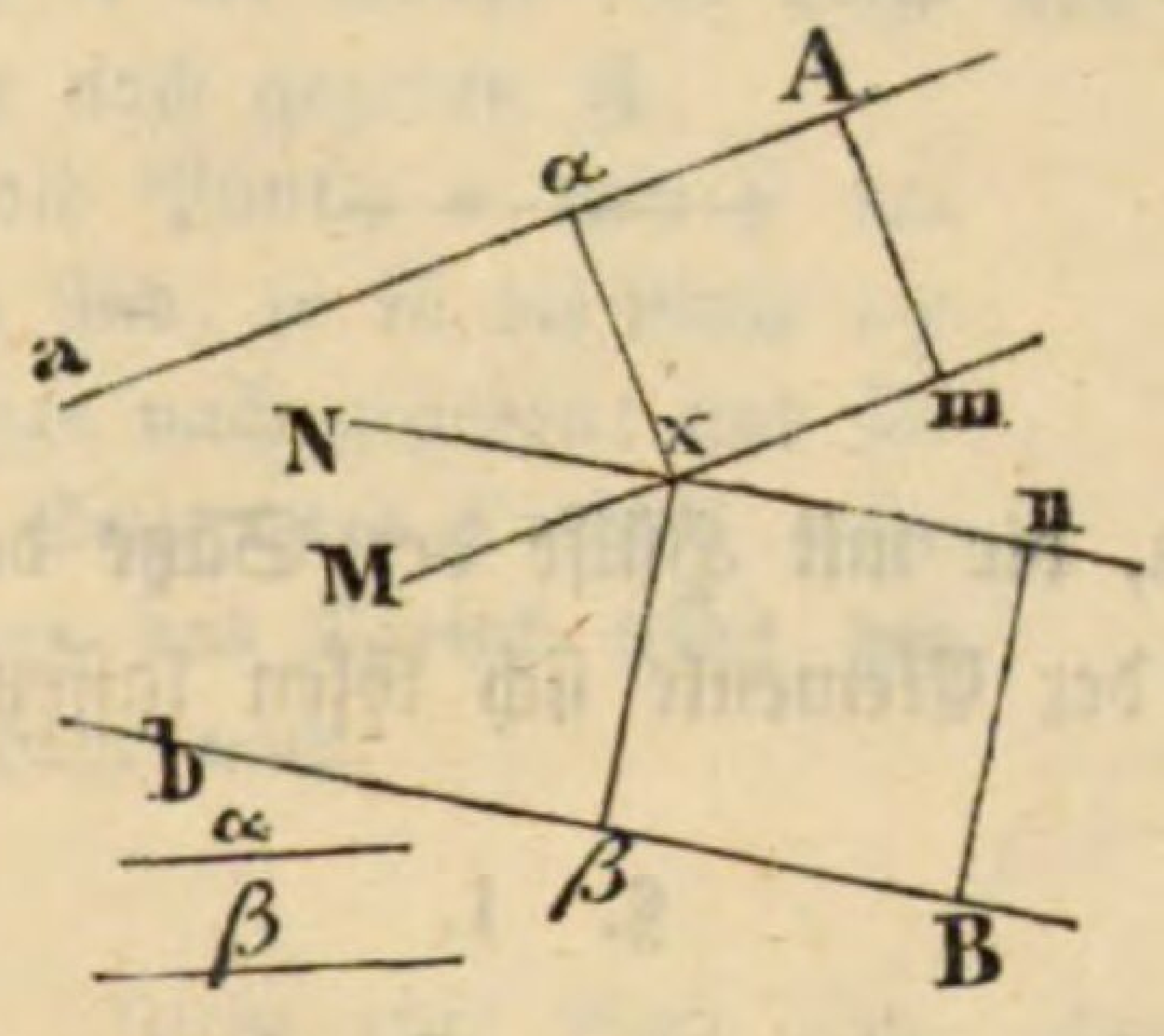
Gegeben sind die Linien **aA** und **bB** der Lage nach, α und β der Größe nach.

Der zu bestimmende Punkt **x** soll die Eigenschaft haben, „daß, wenn man von demselben die Normalen $x\alpha$ und $x\beta$ zieht, $x\alpha = \alpha$ und $x\beta = \beta$ sey".

Analysis. Durch den zu bestimmenden Punkt **x** ziehe die **xm** und **xn** parallel mit **aA** und **bB**, so sind diese Linien der Lage nach gegeben, sobald **x** der Lage nach gegeben ist; nimmt man nun **A** und **B** beliebig in **aA** und **bB** an, und zieht die Normalen **Am** und **Bn**: so ist

$$Am = \alpha x \text{ und } Bn = \beta x. \quad (34.)$$

Da nun $\alpha x = \alpha$ und $\beta x = \beta$ gegeben sind, so sind auch die Linien Am und Bn ebenfalls gegeben. Nimmt man also die Punkte A und B als gegeben an, so sind m und n ebenfalls gegeben; und daher die Parallelen mM und nN der Lage nach, die durch diese Punkte mit aA und bB gezogen werden können. Nun ist mM ein geometrischer Ort des gesuchten Punktes x, und eben so auch nN, folglich ist die Lage dieses Punktes gegeben.



Auflösung. In irgend einem Punkte A der aA errichte die Normale Am $= \alpha$, und in einem Punkte B der bB die Normale Bn $= \beta$; ziehe durch m die mM der aA, und durch n die nN der bB parallel: so schneiden beide Parallelen sich in dem gesuchten Punkte x.

Beweis. Von x fälle die Normalen $x\alpha$ und $x\beta$ auf aA und bB, so ist $x\alpha$ parallel mA (28.)
aber auch xm „ aA (p. c.)

daher $x\alpha = $ mA. (34.)
Da nun mA $= \alpha$ (p. c.)

so ist $x\alpha = \alpha$
und aus gleichen Gründen ist auch $x\beta = \beta$.

Anmerkung. Die geometrische Analysis hat für das Auflösen der Aufgaben den besonderen Vortheil, „daß man durch dieselbe sogleich die Beschränkungen kennen lernt, unter welchen die Auflösung möglich ist", und es werden diese Beschränkungen gewöhnlich unter der Benennung Determination besonders angegeben. So ergiebt sich z. B. für die Aufgabe 2. die Determination, „es müssen die Linien $\alpha\gamma$ und $\alpha\delta$ zusammen größer seyn, als die zwiefache ab", wenn eine Auflösung möglich seyn soll; und für Aufgabe 6. erhält man die Determination, „die Linien aA und bB dürfen nicht parallel laufen, wenn eine Auflösung sich soll ausführen lassen".

Enthält die Aufgabe einen Widerspruch, so lernt man diesen ebenfalls durch die Analysis kennen; die in einem solchen Falle endlich zu einem Satze führt, der einer ausgemachten Wahrheit widerspricht. Auch wenn die Aufgabe verschiedene Auflösungen zuläßt (so daß also verschiedene Resultate den Bedingungen derselben entsprechen), lassen sich dieselben sämmtlich durch die Analysis auffinden.

Ist die Aufgabe aber von der Art, „daß bei derselben verschiedene Fälle unterschieden werden können“: so muß für jeden dieser Fälle die Analysis besonders vorgenommen werden.

VI. Aufgaben, die mit Hülfe der Sätze des ersten Buches der Elemente sich lösen lassen.

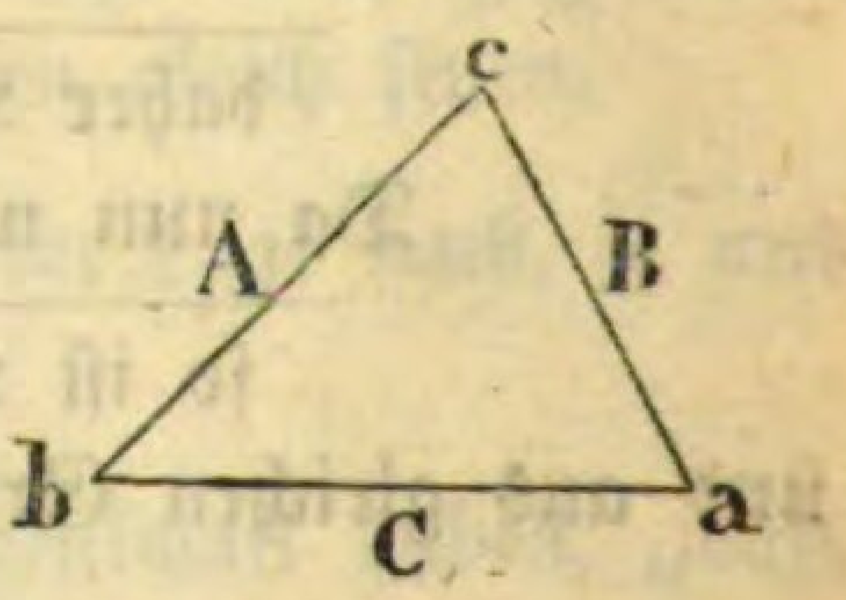
§. 1.

Einfache Construction der Dreiecke aus gegebenen Seiten und Winkeln.

Die drei Seiten eines Dreiecks sollen in der Folge durch die Buchstaben **A**, **B** und **C** bezeichnet werden, und die Winkel durch **a**, **b** und **c**; so daß

a den Winkel bedeutet, der der Seite **A** gegenüber liegt,
b „ „ „ „ „ „ **B** „ „
c „ „ „ „ „ „ **C** „ „

Und um hierbei auch zugleich die Lage genau zu berücksichtigen, soll, wie in der beistehenden Figur, **C** die Grundlinie bedeuten, **A** die Seite, welche links an derselben anliegt, und **B** die rechts an der Grundlinie anliegende Seite.



Aufgabe 1. Von einem Dreieck sind zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben ist **A**, **C** und **b**.

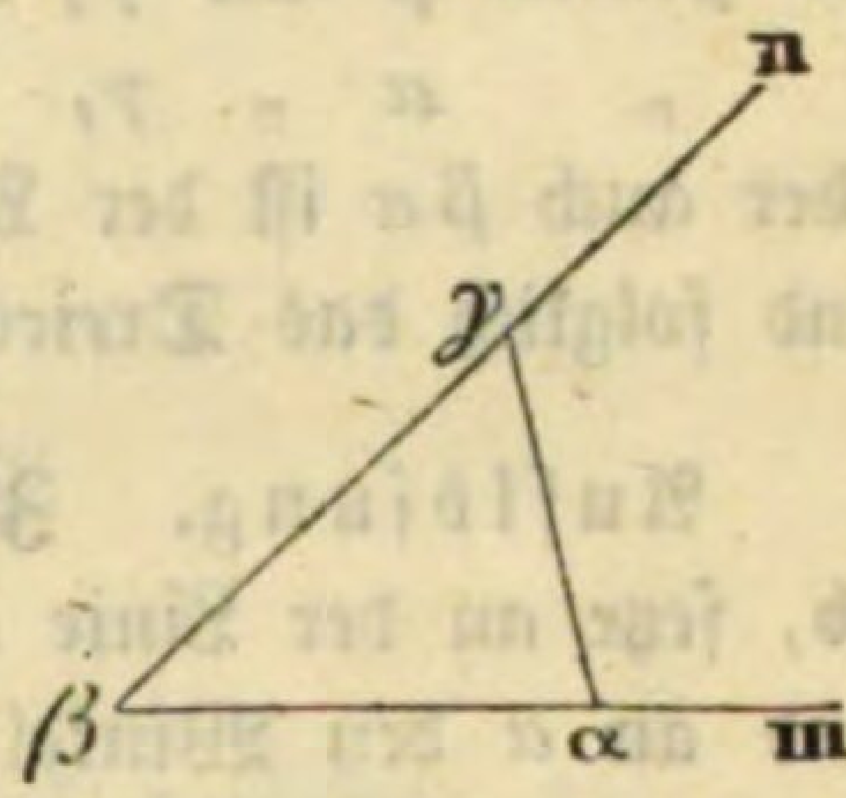
Gesucht wird das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

Analysis. Es sei $\alpha\beta\gamma$ das zu construirende Dreieck, also βm die Grundlinie der Lage nach.

Da C gegeben ist, so kann man auf βm das Stück $\beta\alpha = C$ abschneiden (3); und es ist hierdurch C der Größe und Lage nach gegeben, und daher der Punkt α der Lage nach.

Da $\angle$ b gegeben ist, so kann man an dem Punkte β der $\alpha\beta$ einen Winkel $\beta = \angle$ b ansetzen (23.); und es ist sonach βn, also auch A, der Lage nach gegeben. Nun ist aber A auch der Größe nach gegeben; also kann man auf βn die $\beta\gamma = A$ abschneiden (3.), wodurch nun auch A der Größe und Lage nach, und folglich der Punkt γ der Lage nach gegeben ist.

Da sonach die Punkte α und γ der Lage nach gegeben sind, so ist die Linie $\alpha\gamma$ der Größe und Lage nach gegeben; und somit sind alle drei Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gegeben, und daher das Dreieck selbst der Art, Größe und Lage nach.



Auflösung. Ziehe eine Linie βm, schneide auf derselben $\beta\alpha = C$ ab, setze an β den Winkel $\alpha\beta n = b$ an (23), schneide auf βn die $\beta\gamma = A$ ab, und verbinde γ mit α: so ist $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Da $\beta\alpha = C$, $\beta\gamma = A$ und $\angle\beta = \angle b$ (p. c.), so enthält das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die drei gegebenen Stücke ihrer gegenseitigen Lage nach; und die Bedingungen der Aufgabe sind also durch dasselbe erfüllt.

Aufgabe 2. Von einem Dreieck sind zwei Winkel und die, von denselben eingeschlossene Seite gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

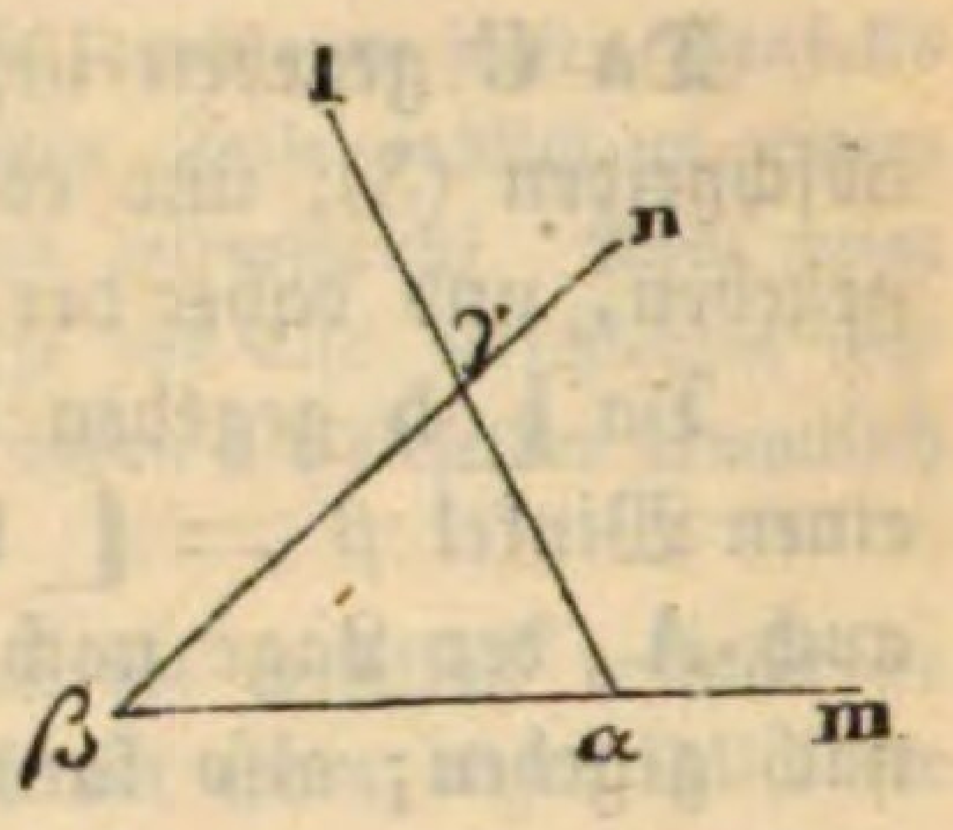
Gegeben C, a und b.

Gesucht wird das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

Analysis. Es sei $\alpha\beta\gamma$ das zu construirende Dreieck, und also βm der Lage nach gegeben.

Da C gegeben ist, so kann man auf βm die $\beta\alpha = C$ abschneiden; und es ist daher $\beta\alpha$ der Größe und Lage nach gegeben.

Da $\beta\alpha$ und auch der Punkt β gegeben ist, so kann man an diesen Punkt einen Winkel $\alpha\beta n = b$ ansetzen (23.); also ist βn der Lage nach gegeben. Eben so kann man auf $\alpha\beta$ an α einen Winkel $\beta\alpha l = a$ ansetzen, und es ist also auch die αl der Lage nach gegeben.



Da sonach βn und αl der Lage nach gegeben sind, so ist der Durchschnittspunkt γ dieser Linien der Lage nach gegeben.

Es sind also der Lage nach gegeben:

die Punkte β und γ, also die Linie $\beta\gamma$ auch der Größe nach;
„ α „ γ, „ „ „ $\alpha\gamma$ „ „ „ „
aber auch $\beta\alpha$ ist der Lage und Größe nach gegeben;
und folglich das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, der Art, Größe und Lage nach.

Auflösung. Ziehe βm, schneide auf derselben $\beta\alpha = C$ ab, setze an der Linie $\alpha\beta$ in dem Punkte β den Winkel $\alpha\beta n = b$, und an α den Winkel $\beta\alpha l = a$: so schneiden sich die Schenkel βn und αl in der Spitze γ des verlangten Dreiecks.

Beweis. Da $\beta\alpha = C$, $\angle \beta = \angle b$ und $\angle \beta\alpha\gamma = a$: so enthält das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die gegebenen Stücke in der gehörigen Lage, und es entspricht daher dasselbe den Bedingungen der Aufgabe.

Determination. Es muß seyn $b + a < 2R$ (17), wenn eine Auflösung der Aufgabe möglich seyn soll.

Aufgabe 3. Von einem Dreieck ist gegeben eine Seite, der ihr gegenüber liegende, und einer der anliegenden Winkel: es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben C, c und b.

Gesucht wird das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

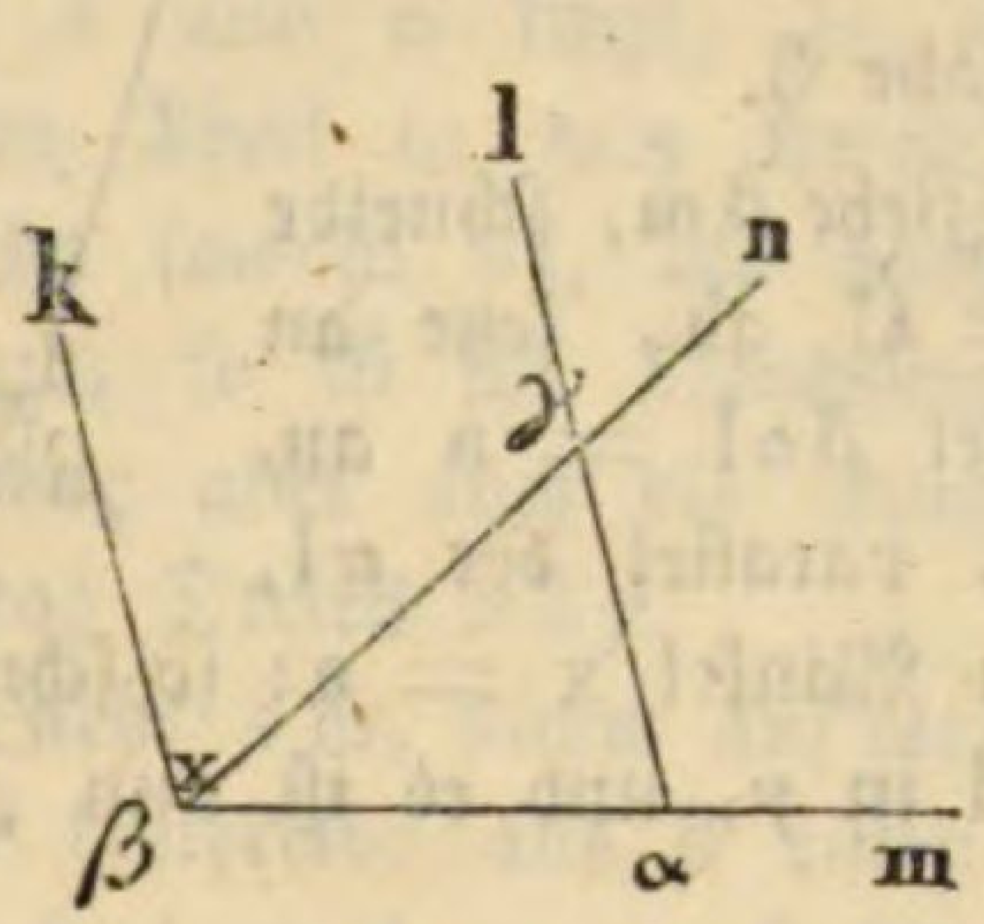
Analysis. Es sey $\alpha\beta\gamma$ das zu construirende Dreieck; man ziehe βk der $\alpha\gamma$ parallel.

Es ist $\beta\alpha = C$ der Größe und Lage nach gegeben, und der Winkel b der Größe nach; man kann also an $\alpha\beta$ in β den Winkel $\alpha\beta n = b$ ansetzen, folglich ist βn der Lage nach gegeben.

Da βk parallel αl, so ist $\angle x = \angle \gamma$.

Nun ist $\angle \gamma = \angle c$ gegeben; man kann also $\angle x = \angle c$ in β an βn ansetzen, und es ist daher βk der Lage nach gegeben.

Da nun auch der Punkt α der Lage nach gegeben ist, so ist die Parallele αl mit βk ebenfalls der Lage nach gegeben. Aber auch βn ist der Lage nach gegeben, und folglich der Durchschnittspunkt γ; und daher $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ der Größe und Lage nach. Folglich Δ $\alpha\gamma\beta$ der Art, Größe und Lage nach.



Auflösung. Ziehe βm; schneide auf derselben $\beta\alpha = C$ ab, setze an $\alpha\beta$ in β den Winkel $\alpha\beta n = b$, und hierauf an βn in β den Winkel $n\beta k = x = c$. Mit βk ziehe durch α die Parallele αl, so schneidet diese die βn in der Spitze γ des zu construirenden Dreiecks.

Beweis. Es ist $\beta\alpha = C$
und $\llcorner\, \alpha\beta\gamma = \llcorner\, b$ (p. c.)
und $\llcorner\, \alpha\gamma\beta = \llcorner\, x$ (29.)
aber $\llcorner\, x = \llcorner\, c$ (p. c.)
und daher $\llcorner\, \alpha\gamma\beta = \llcorner\, c$.

Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ enthält also die gegebenen Stücke in der gehörigen Lage, und entspricht daher den Bedingungen der Aufgabe.

Determination. Es muß seyn $c + a < 2\,R$ (17.), wenn eine Auflösung der Aufgabe möglich seyn soll.

Aufgabe 4. Zwei Seiten eines Dreiecks sind gegeben, und der, der einen Seite gegenüber liegende Winkel; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben A, C und a.

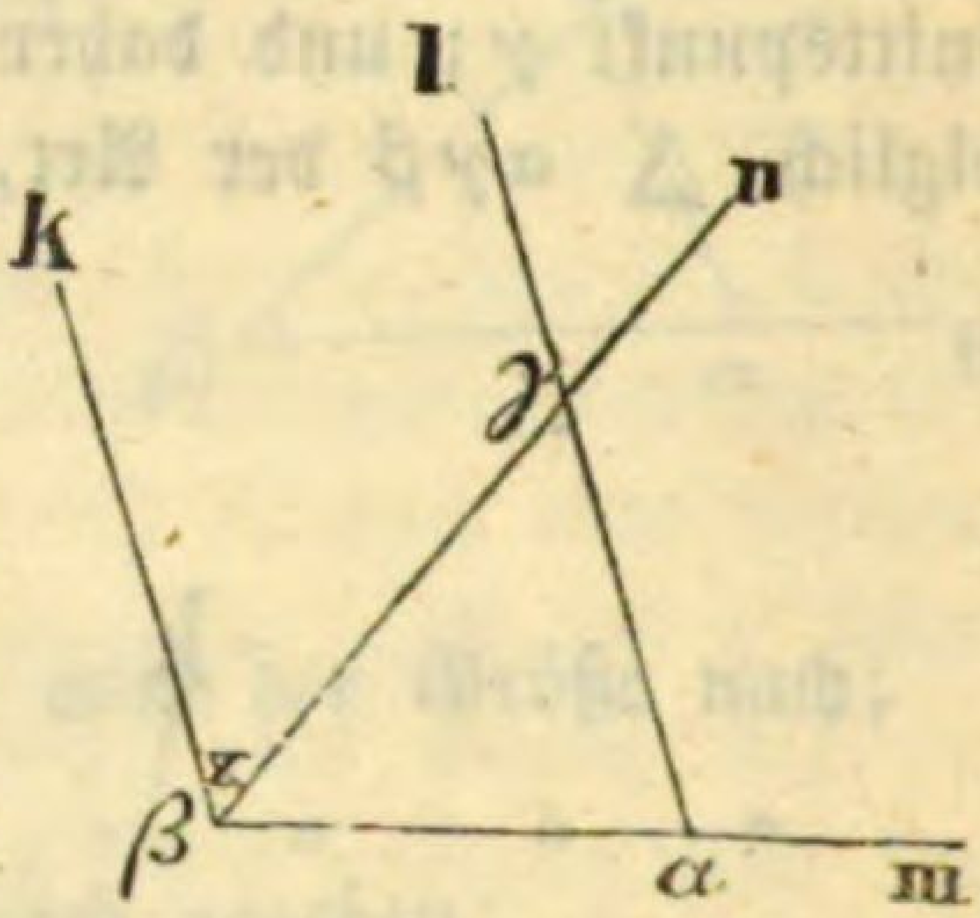
Gesucht das zu construirende Dreieck.

Es ist entweder 1) $A = C$, oder 2) $A > C$, oder 3) $A < C$.

Erster Fall. $A = C$.

Analysis. Da seyn soll $A = C$, so ist auch $a = c$. (5.)

Nun ist a gegeben, also auch c; aber auch C ist gegeben, also C, a und c; und folglich ist das Dreieck bestimmt, wie bei Aufgabe 3.



Auflösung. Ziehe βm, schneide auf derselben $\beta\alpha = C$ ab, setze an $\beta\alpha$ in α den Winkel $\beta\alpha l = a$ an, ziehe durch β die βk parallel der αl, und an βk in β den Winkel $x = a$: so schneidet der Schenkel βn dieses Winkels die αl in γ, und es ist nun $\Delta\,\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Da αl parallel βk

so ist $\angle\,\beta\gamma\alpha = \angle\,x$ (29.)

aber $\angle\,x = \angle\,a$ (p. c.)

daher $\angle\,\beta\gamma\alpha = \angle\,a = \angle\,\beta\alpha\gamma$

und folglich $\beta\gamma = \beta\alpha$. (6.)

Da nun $\beta\alpha = C$ und $A = C$ seyn soll,

so ist $\beta\gamma = A$

überdies ist $\angle\,\beta\alpha\gamma = a$.

Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ enthält also die gegebenen Stücke in der entsprechenden Lage.

Determination. Da $A = C$, so ist auch $a = c$,

aber $a + c < 2\,R$ (17.)

folglich auch $2\,a < 2\,R$

und daher $a < R$.

Es muß also der gegebene Winkel a ein spitzer seyn, wenn die Aufgabe keinen Widerspruch enthalten soll.

Zweiter Fall. $A > C$.

Analysis. Es sey $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck, also βm die Lage der Grundlinie. Aus β beschreibe mit $\beta\gamma = A$ einen Kreis, der die βm in n schneidet.

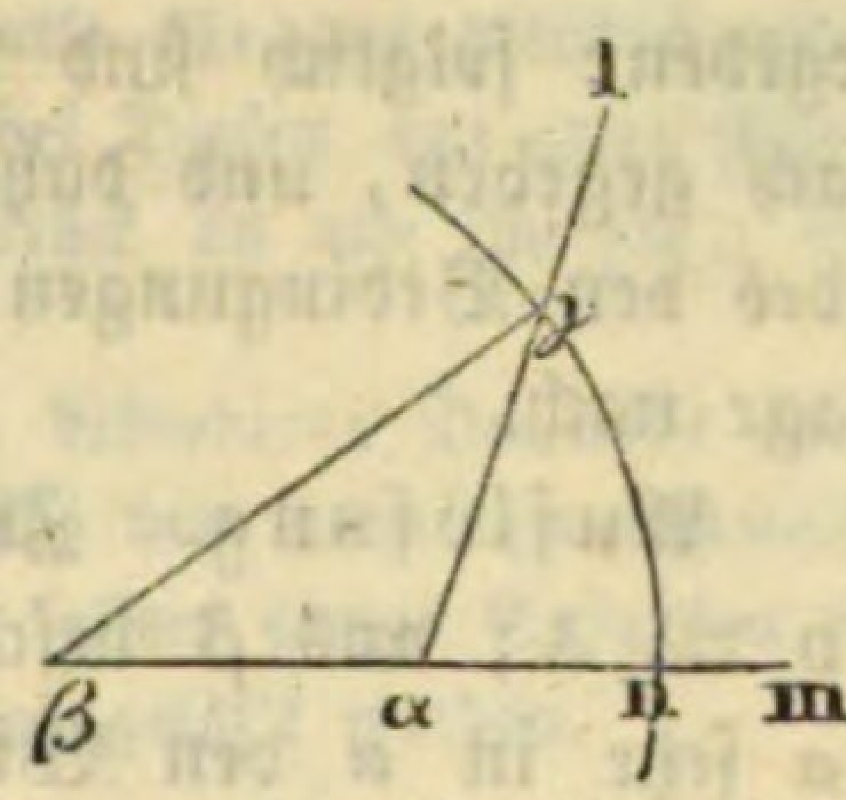
Da $\beta\gamma > \beta\alpha$ (p. h.)

und $\beta n = \beta\gamma$ (E. 15.)

so ist auch $\beta n > \beta\alpha$

also liegt n in der Verlängerung von $\beta\alpha$.

Nun ist $\llcorner\ \beta\alpha\gamma = a$ gegeben, daher auch αl der Lage nach; und da der Mittelpunkt β und der Radius $\beta\gamma = A$ des beschriebenen Kreises gegeben sind, so ist die Kreislinie der Größe und Lage nach gegeben.



Da α zwischen β und n liegt, so liegt die Linie αl zum Theil in dem Kreise, und schneidet denselben folglich; und da sowohl αl, als auch die Kreislinie ihrer Lage nach gegeben sind, so ist ihr Durchschnittspunkt γ ebenfalls der Lage nach gegeben; aber auch die Punkte α und β sind gegeben, folglich auch das Dreieck $\alpha\beta\gamma$.

Auflösung. Ziehe βm, nimm auf derselben $\beta\alpha = C$ und $\beta n = A$. Mit βn beschreibe aus β einen Kreis, und an $\beta\alpha$ setze in α den Winkel $\beta\alpha l = \llcorner\ a$ an, so schneidet der Schenkel αl die Kreislinie in γ. Wird nun β mit γ verbunden, so ist $\Delta\,\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

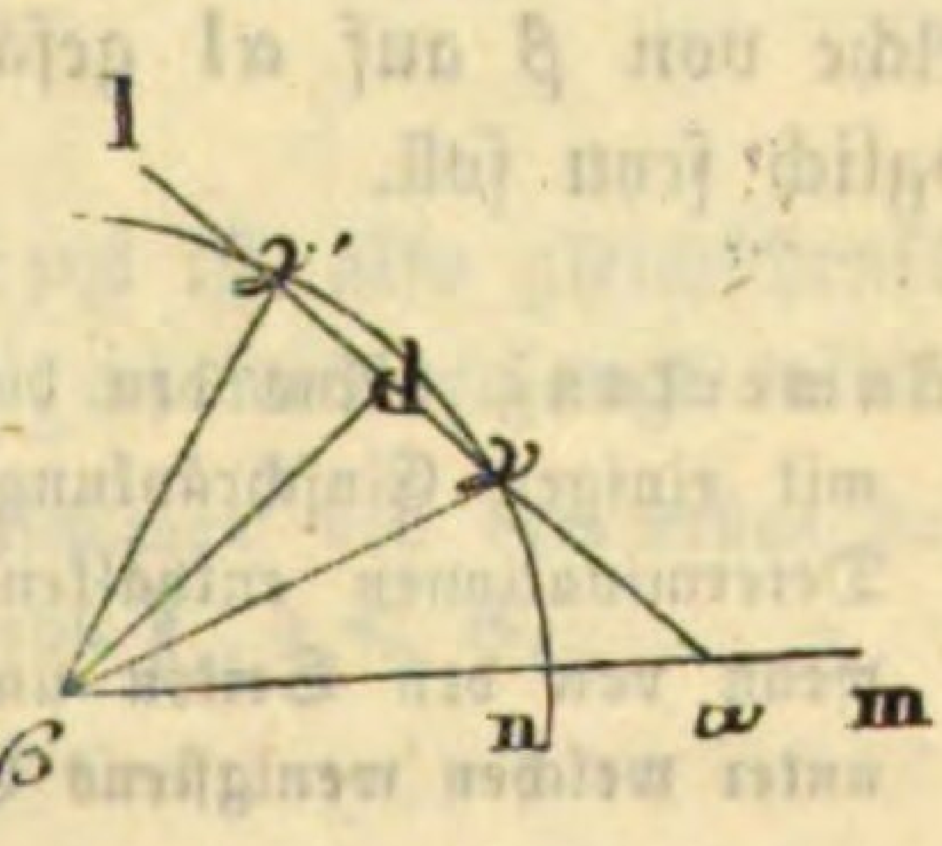
Beweis. Es ist $\beta\gamma = \beta n$ (E. 15.)
aber $\beta n = A$ (p. c.)
also auch $\beta\gamma = A$.
Da nun $\beta\alpha = C$ (p. c.)
und $\llcorner\ \beta\alpha\gamma = \llcorner\ a$ „
so enthält das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die gegebenen Stücke in der vorgeschriebenen Lage.

Dritter Fall. $A < C$.

Analysis. Es sey $\Delta\,\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck, also βm die Lage der Grundlinie C. Aus β beschreibe mit $\beta\gamma = A$ einen Kreis, der die βm in n schneide.

Da $A < C$, also $\beta\gamma < \beta\alpha$ (p. h.)
und $\beta n = \beta\gamma$ (E. 15.)
so ist auch $\beta n < \beta\alpha$

also liegt n zwischen β und α. Trifft also αl den Kreis in γ, so kann die Verlängerung von $\alpha\gamma$ innerhalb des Kreises liegen, und denselben daher noch ein zweites Mal in γ' schneiden.



Nun ist $\llcorner\ \beta\alpha l = a$ gegeben, also αl der Lage nach; aber die Kreislinie $n\gamma\gamma'$ ist der Größe und Lage nach

gegeben: folglich sind die Durchschnittspunkte γ und γ' der Lage nach gegeben, und daher die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\beta\gamma'$; von welchen jedes den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Art, Größe und Lage nach.

Auflösung. Ziehe βm, nimm auf derselben $\beta\alpha = C$ und $\beta n = A$; aus β beschreibe mit $\beta n = A$ einen Kreis, und an $\beta\alpha$ setze in α den Winkel $\beta\alpha l = \llcorner a$. Die Punkte γ und γ', wo αl und die Kreislinie sich schneiden, verbinde mit β: so entspricht jedes der beiden Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\beta\gamma'$ den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis. Da $\beta\gamma = \beta\gamma' = \beta n$ (E. 15.)
und $\beta n = A$

so ist auch $\beta\gamma = \beta\gamma' = A$.
Ferner ist $\beta\alpha = C$
und $\llcorner \beta\alpha l = \llcorner a$.

Die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\beta\gamma'$ enthalten also beide die gegebenen Stücke in der vorgeschriebenen Lage; und es ist also, durch jedes dieser beiden Dreiecke, die Aufgabe gelös't.

Determination. Da seyn soll $A < C$
also $\beta\gamma < \beta\alpha$
so muß auch seyn $\llcorner \beta\alpha\gamma < \llcorner \beta\gamma\alpha$
also $\llcorner a < \llcorner c$.

Folglich ist 1) erforderlich, daß $\llcorner a < R$ sey, wenn die Aufgabe nicht unmöglich seyn soll (17.)

Aus β fälle die Normale βd auf αl (12.)
so ist $\llcorner \beta d\gamma = R$
aber $\llcorner \beta d\gamma + \llcorner \beta\gamma d < 2 R$ (17.)

folglich ist $\llcorner \beta\gamma d < R$
und daher $\llcorner \beta d\gamma > \llcorner \beta\gamma d$.
Es ist also auch $\beta\gamma > \beta d$ (19.)
oder $A > \beta d$.

Die Seite A darf also 2) nicht kleiner seyn, als die Normale, welche von β auf αl gefällt werden kann, wenn eine Auflösung möglich seyn soll.

Anmerkung. Aus den bisher gelös'ten vier Aufgaben geht hervor: daß mit einigen Einschränkungen (welche die, den Auflösungen beigefügten Determinationen enthalten) ein Dreieck immer construirt werden kann, wenn von den Seiten und Winkeln desselben drei Stücke gegeben sind, unter welchen wenigstens Eine Seite sich befindet. Dieses gilt natürlich

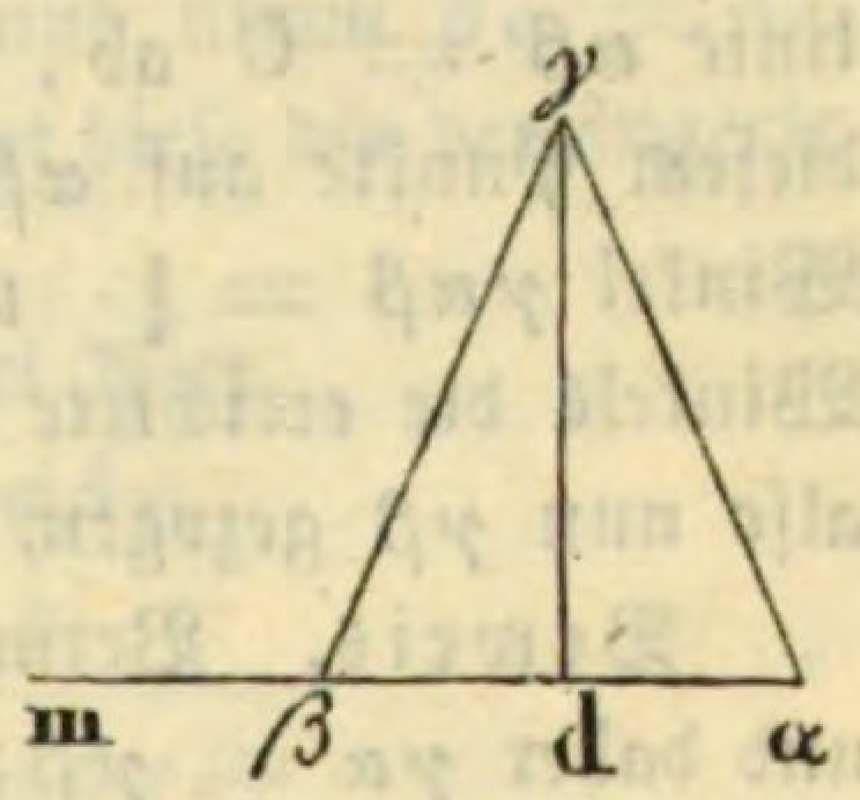
auch für besondere Gattungen der Dreiecke, also für das gleichschenklige und für das rechtwinklige Dreieck; nur „daß bei Diesen nur zwei Stücke gegeben zu seyn brauchen", weil ein drittes Stück an und für sich, oder durch die beiden gegebenen, bestimmt ist.

Die obigen Auflösungen lassen sich bei diesen besonderen Dreiecken ebenfalls anwenden; doch lassen sich für einzelne Fälle hier auch eigenthümliche Auflösungen angeben, und aus diesem Grunde sollen einige Aufgaben der Art, die öfters gebraucht werden, noch besonders gelös't werden.

Aufgabe 5. Von einem gleichschenkligen Dreiecke ist der Schenkel gegeben, und der an der Grundlinie anliegende Winkel; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben $A = B$ und $\llcorner\, a$. Gesucht wird das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

Analysis. Es sey $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck; man fälle die Normale γd auf die Grundlinie $\alpha\beta$.



Da $\gamma\alpha = \gamma\beta$
und daher auch $\llcorner\, \alpha = \llcorner\, \beta$
und $\llcorner\, \gamma d\alpha = \llcorner\, \gamma d\beta = R$

so ist $\Delta\, \gamma d\alpha \cong \Delta\, \gamma d\beta$
folglich $d\alpha = d\beta$.

Da $\gamma\alpha = A$ und $\llcorner\, \alpha = a$ gegeben sind, so ist auch die Normale γd gegeben, und daher auch αd; und weil $\alpha d = d\beta$, so ist auch $\alpha\beta$ ebenfalls gegeben, und hierdurch das zu construirende Dreieck $\alpha\beta\gamma$.

Auflösung. Ziehe eine Linie αm, setze an derselben in dem Punkte α den Winkel $m\alpha\gamma = \llcorner\, a$ an; nimm $\alpha\gamma = A$, von γ fälle die Normale γd auf αm, nimm $d\beta = d\alpha$, und verbinde β mit γ.

Beweis. Da $\gamma d = \gamma d$
$\llcorner\, \gamma d\alpha = \llcorner\, \gamma d\beta = R$ (p. c.)
$d\alpha = d\beta$

so ist $\Delta\gamma d\alpha \cong \Delta\gamma d\beta$

und daher $\gamma\alpha = \gamma\beta$. Das Dreieck $\alpha\gamma\beta$ ist also gleichschenklig, und dabei $\gamma\alpha = A$ und $\llcorner\, \gamma\alpha m = \llcorner\, a$, wie verlangt wird.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist nicht verschieden von dem ersten Falle, Aufgabe 4., und es muß daher auch hier seyn $\llcorner\, a < R$.

Aufgabe 6. Von einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie gegeben, und der an derselben anliegende Winkel; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben C und $\angle a = \angle b$. Gesucht wird das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

Analysis. Ist, wie bei Aufgabe 5., $\alpha\beta\gamma$ das gleichschenklige Dreieck, $\alpha\beta$ die Grundlinie desselben, und man fället die Normale γd, so ist $\alpha d = d\beta$. Nun ist $\alpha\beta$ gegeben, also auch der Punkt d, und daher die Normale $d\gamma$ der Lage nach; da aber $\angle \alpha = \angle a$ gegeben ist, so ist der Schenkel $\alpha\gamma$ dieses Winkels ebenfalls der Lage nach gegeben, und daher der Durchschnittspunkt γ; und folglich ist das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ gegeben.

Auflösung. Ziehe αm, schneide auf derselben die Grundlinie $\alpha\beta = C$ ab, halbire dieselbe in d (10) und errichte in diesem Punkte auf $\alpha\beta$ eine Normale (11). In α setze an $\alpha\beta$ den Winkel $\gamma\alpha\beta = \angle a$ (23.): so schneidet der Schenkel $\alpha\gamma$ dieses Winkels die errichtete Normale in der Spitze γ des Dreiecks. Wird also nun $\gamma\beta$ gezogen, so ist $\Delta\ \alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction ist $\Delta \alpha d\gamma \cong \Delta \beta d\gamma$, und daher $\gamma\alpha = \gamma\beta$; folglich ist $\Delta \alpha\beta\gamma$ gleichschenklig. Außerdem ist $\alpha\beta = C$ und $\angle \beta\alpha\gamma = \angle a$, wie es seyn soll.

Determination. Da $\alpha\gamma$ und die Normale $d\gamma$ in γ sich schneiden sollen, so muß seyn $\angle a < R$. (17.)

Aufgabe 7. Von einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C und $\angle c$, und das Dreieck soll gleichschenklig seyn. Gesucht das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

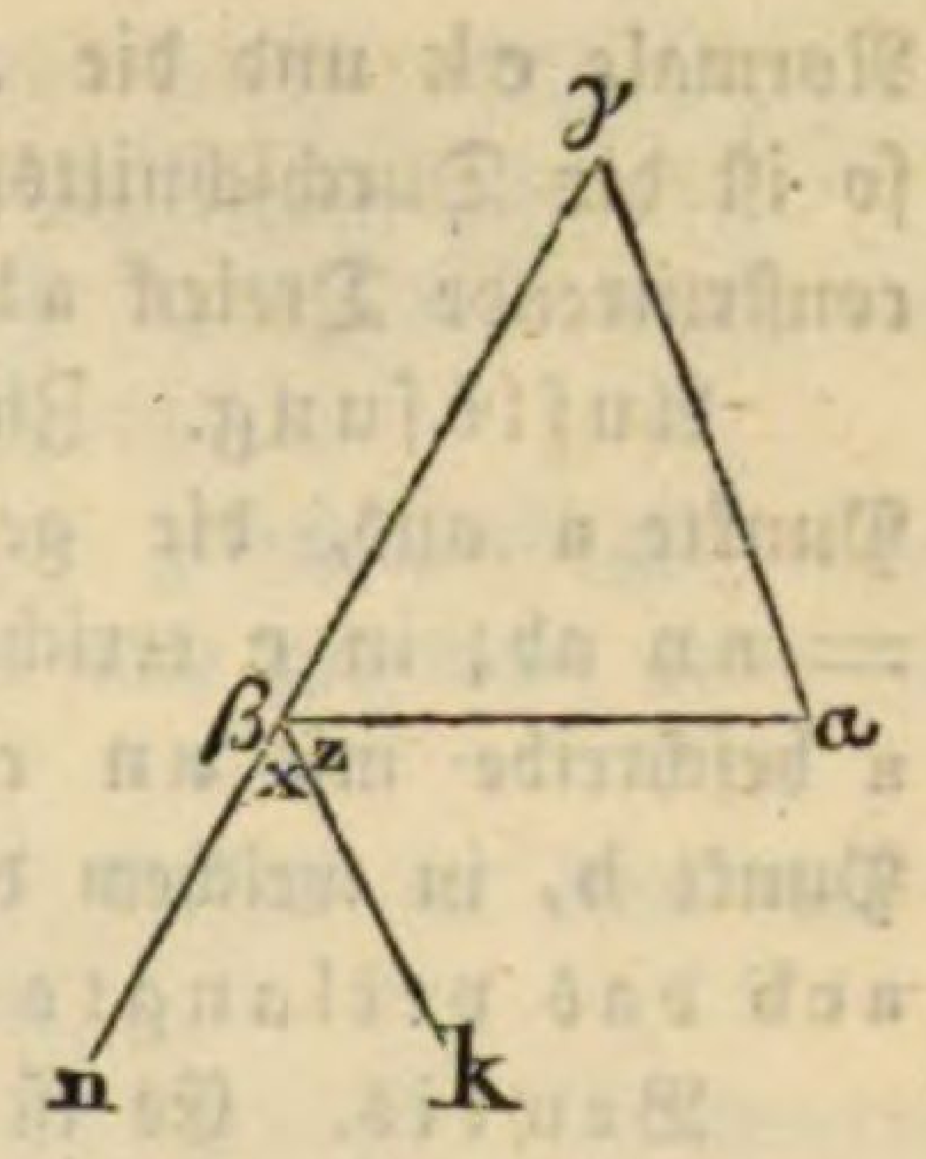
Analysis. Es sey $\Delta\ \alpha\beta\gamma$ das zu construirende Dreieck; man verlängere den Schenkel $\gamma\beta$ nach n, und ziehe durch β die βk parallel $\gamma\alpha$: so ist

$$(29)\quad \angle x = \angle \alpha\gamma\beta = \angle c \text{ gegeben.}$$

Wird also βn als „der Lage nach gegeben" angenommen, so ist βk ebenfalls der Lage nach gegeben.

Ferner ist $\angle z = \angle \alpha$ (29.)
und weil $\angle \alpha = \angle \alpha\beta\gamma$ seyn muß (5.)
so ist auch $\angle z = \angle \alpha\beta\gamma$.

und daher $\angle\, k\beta\gamma$ halbirt durch $\beta\alpha$, folglich ist $\beta\alpha$ der Lage nach gegeben. Und da $\beta\alpha = C$ seyn soll, so ist diese Linie auch der Größe nach gegeben, und daher der Punkt α der Lage nach; und folglich auch die Parallele $\alpha\gamma$ mit βk. Da nun $n\beta$ der Lage nach gegeben seyn soll, so ist der Punkt γ ebenfalls der Lage nach gegeben, und dadurch das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ bestimmt.



Auflösung. Ziehe die Linie $n\gamma$; und in irgend einem Punkte β derselben; setze an $n\beta$ den Winkel $n\beta k = \angle\, x = \angle\, c$. (23.)

Den Winkel $k\beta\gamma$ halbire durch $\beta\alpha$ (9.) und nimm $\beta\alpha = C$. Durch α ziehe $\alpha\gamma$ parallel der βk: so schneidet diese die verlängerte $n\beta$ in der Spitze γ des gesuchten Dreiecks.

Beweis. Da $\angle\, k\beta\gamma$ durch $\beta\alpha$ halbirt wird,

so ist $\angle\, z = \angle\, \alpha\beta\gamma$

und da $\alpha\gamma$ parallel βk, so ist $\angle\, z = \angle\, \alpha$.

Folglich $\angle\, \alpha = \angle\, \alpha\beta\gamma$

und daher $\gamma\beta = \gamma\alpha$ (6.)

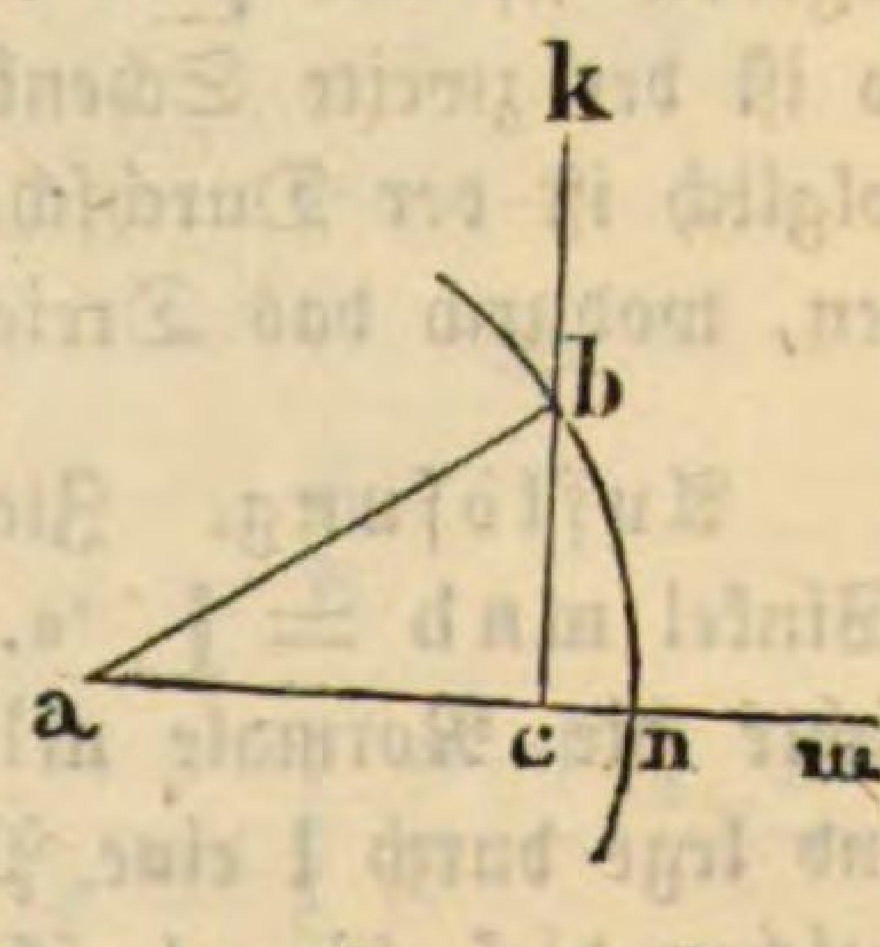
das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist also gleichschenklig. Außerdem aber ist $\angle\, \alpha\beta\gamma = \angle\, x = \angle\, c$ und $\beta\alpha = C$.

Aufgabe 8. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und die eine Kathete gegeben; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben der rechte Winkel c, die Hypotenuse ab und die Kathete ac.

Gesucht das Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

Analysis. Es sey am die eine Kathete der Lage nach, und a der Anfangspunkt derselben; man beschreibe aus a mit ab einen Kreis, der die am in n schneidet, so ist an gegeben; und da auch der Punkt a gegeben ist, so ist die Kreislinie, von welcher nb ein Bogen seyn soll, der Größe und Lage nach gegeben. Da a gegeben ist und die Kathete ac, so ist auch c der Lage nach gegeben, und daher die Normale ck ebenfalls. Da nun sonach die



Normale ck und die Kreislinie nb der Lage nach gegeben sind: so ist der Durchschnittspunkt b ebenfalls gegeben, und somit das zu construirende Dreieck abc.

Auflösung. Ziehe am; schneide auf derselben, von dem Punkte a aus, die gegebene Kathete = ac und die Hypotenuse = an ab; in c errichte auf am die Normale ck (11.), und aus a beschreibe mit an einen Kreisbogen, und verbinde endlich den Punkt b, in welchem derselbe die Normale schneidet, mit a: so ist acb das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist ac die gegebene Kathete, ∟ acb = R, und ab = an die gegebene Hypotenuse; das Dreieck entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Determination. Es muß die Hypotenuse ab größer seyn, als die Kathete ac.

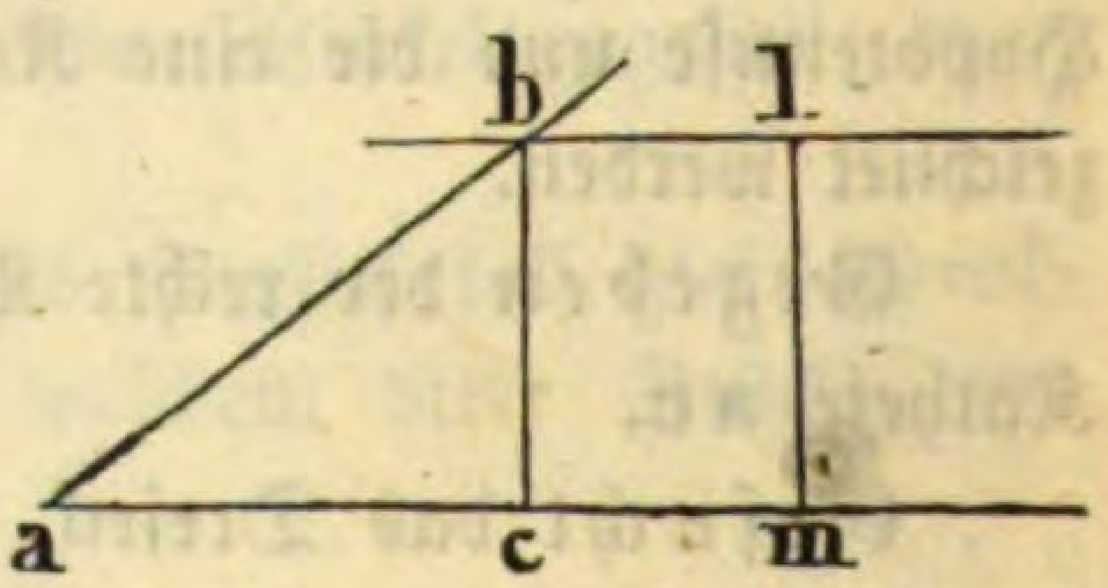
Aufgabe 9. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben die Kathete bc und der Winkel a.

Gesucht das rechtwinklige Dreieck, in welchem diese Stücke vorkommen.

Analysis. Es sey abc das zu construirende Dreieck, und am die unbekannte Kathete der Lage nach. Durch b ziehe eine Parallele mit am, und in irgend einem Punkte m der am errichte die Normale ml: so ist

ml = bc (34).



Wird also m „als gegeben" angenommen, so ist auch l, und daher lb parallel am, der Lage nach gegeben. Da aber am der Lage nach gegeben ist, und ∟ a der Größe nach: so ist der zweite Schenkel ab desselben der Lage nach gegeben; und folglich ist der Durchschnittspunkt b ebenfalls der Lage nach gegeben, wodurch das Dreieck bestimmt ist.

Auflösung. Ziehe am, und lege an diese Linie in a den Winkel mab = ∟ a. In irgend einem Punkte m der am errichte die Normale ml, nimm ml der gegebenen Kathete gleich, und lege durch l eine Parallele mit ma; von dem Punkte b, in welchem diese die ab schneidet, fälle die Normale bc auf am (12): so ist abc das verlangte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck abc ist bei c rechtwinklig, $\angle$ bac $= \angle$ a, und die Kathete bc $=$ lm der gegebenen gleich.

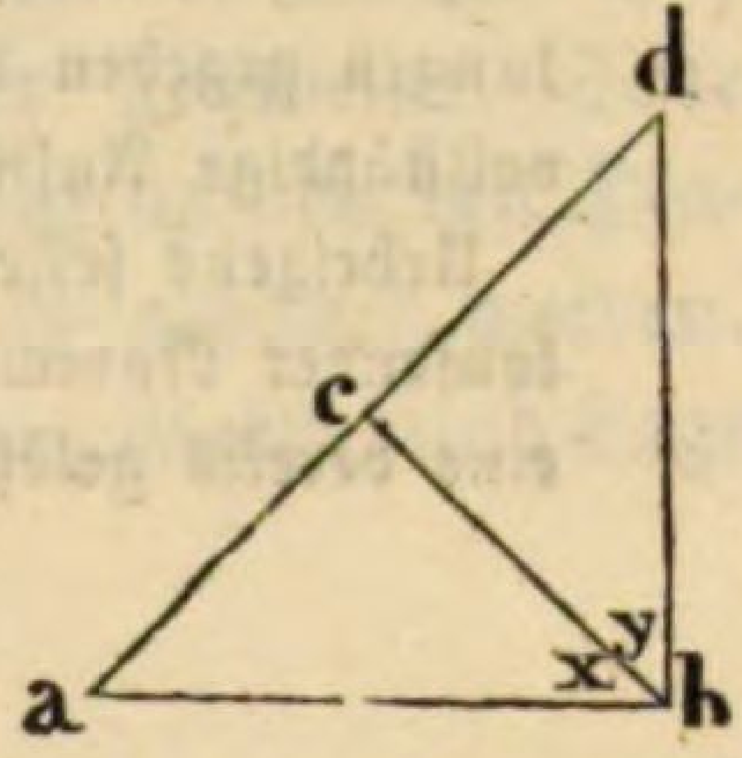
Determination. Es muß seyn $\angle$ a $<$ R, wenn die Normale cb von ab soll geschnitten werden (17.).

Aufgabe 10. Die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks ist der Größe und Lage nach gegeben; man soll dasselbe verzeichnen.

Gegeben die Hypotenuse ab; und es soll in dem bei c rechtwinkligen Dreieck acb seyn ca $=$ cb.

Analysis. Es sey acb das verlangte Dreieck. Verlängere ac, mache cd $=$ ac und ziehe db: so ist Δacb $\cong \Delta$dcb (4.);

daher $\angle$ x $= \angle$ y
und ba $=$ bd.



Da nun seyn soll ca $=$ cb
so ist $\angle$ x $= \angle$ a

folglich ist auch $\angle$ y $= \angle$ a
und daher $\angle$ x $+ \angle$ y $= \angle$ x $+ \angle$ a.
Weil aber $\angle$ x $+ \angle$ a $+ \angle$ acb $=$ 2 R
und $\angle$ acb $=$ R

so ist $\angle$ x $+ \angle$ a $=$ R
und daher auch $\angle$ x $+ \angle$ y $=$ abd $=$ R.

Es ist also $\angle$ abd $=$ R gegeben; aber ab $=$ bd ebenfalls gegeben; folglich ist Δ abd gegeben, und daher die Normale bc, die von b auf ad gefället werden kann; und folglich ist das Dreieck abc gegeben.

Auflösung. In b errichte auf ab die Normale bd $=$ ba, ziehe ad, und fälle auf dieselbe von b aus die Normale bc: so ist Δbca das verlangte Dreieck.

Beweis. Da bd $=$ ba, so ist $\angle$ d $= \angle$ a (6.)
aber $\angle$ a $+ \angle$ d $+ \angle$ abd $=$ 2 R (32.)

also auch 2 . $\angle$ a $+ \angle$ abd $=$ 2 R.
Und da $\angle$ abd $=$ R (p. c.)

so ist 2 . $\angle$ a $=$ R
aber auch $\angle$ a $+ \angle$ x $=$ R.

Folglich ist 2 . $\angle$ a $= \angle$ a $+ \angle$ x

und $\angle$ a $= \angle$ x

folglich ist cb $=$ ca; und daher das rechtwinkliche Dreieck acb, von welchem ab die Hypotenuse ist, gleichschenklig.

Anmerkung. Die den einzelnen Büchern der Elemente angehängten Aufgaben sollen dazu dienen, um dem Anfänger Gelegenheit zu geben, „den Gebrauch der verschiedenen Sätze der Elemente näher kennen zu lernen". Dieser Zweck würde aber nur unvollständig erreicht werden, wenn man jeder Aufgabe besonders die Auflösung vollständig beifügen wollte. Das Selbstfinden der Auflösung ist es vorzugsweise, wodurch die Urtheilskraft geübt, und eine hinreichende Fertigkeit in der Benutzung der verschiedenen Sätze der Geometrie erlangt wird. Daher wird in der Folge nur von den schwierigern und wichtigern Aufgaben die Auflösung vollständig angegeben. Der Beweis ist überall weggelassen oder doch nur angedeutet, wo dieser aus der gegebenen Auflösung unmittelbar gefunden werden kann. Wo aus der Analysis die Auflösung sogleich sich ergiebt, ist auch diese weggelassen; und bei Aufgaben, die bereits gelös'ten nahe verwandt sind und durch ein ähnliches Verfahren sich lösen lassen, wird dieses Verfahren bloß angedeutet. Doch werden jedenfalls für die Auflösung solche Andeutungen gegeben werden, daß es dem Anfänger dadurch möglich wird, „die vollständige Auflösung ohne fremde Beihülfe aufzufinden."

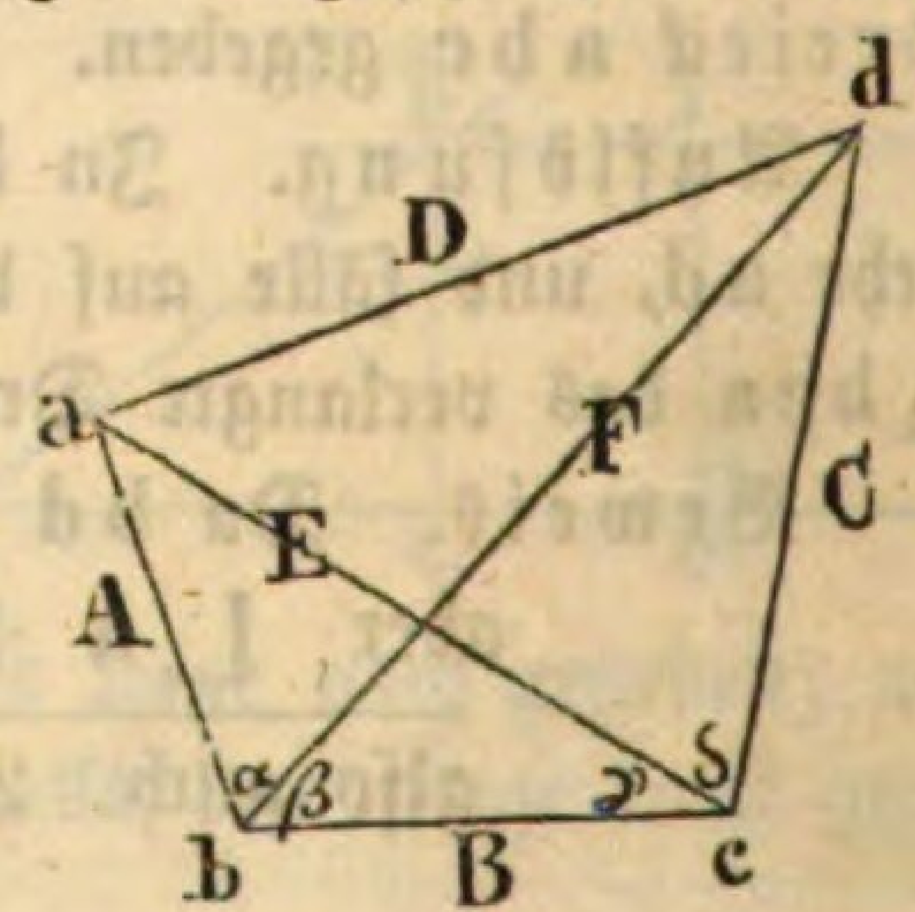
Uebrigens sollen alle in den Beilagen vorkommenden Aufgaben mit fortlaufender Nummer bezeichnet werden, um dadurch das Zurückweisen auf eine bereits gelös'te Aufgabe zu erleichtern.

---

§. 2.

Construction geradliniger Figuren.

Bei den hier vorkommenden Figuren werden die Seiten und Diagonalen mit den großen Buchstaben des Alphabets bezeichnet; und die Winkel, welche von Seiten der Figur eingeschlossen werden, durch die kleinen Buchstaben, welche an den Ecken der Figur angegeben sind. Hiernach ist die Seite ab = A, bc = B, cd = C, und da = D. Die Diagonale ac = E und bd = F. Ferner ist ∟dab = a, ∟abc = b, ∟bcd = c und ∟cda = d. Die Winkel, welche Seiten und Diagonalen der Figur bilden, werden durch die zwischen den Schenkeln derselben stehenden Buchstaben bezeichnet; und es ist daher ∟abd = α, ∟dbc = β, und daher ∟b = $\alpha + \beta$ 2c.



Aufgabe 11. Die vier Seiten und die eine Diagonale eines Vierecks sind der Größe nach gegeben; und es ist auch die Ordnung vorgeschrieben, „in welcher die Seiten nebeneinander liegen sollen"; es soll die zweite Diagonale desselben gefunden werden.

Gegeben A, B, C, D und E.

Gesucht F.

Analysis. Wird ac = E auch der Lage nach als gegeben angenommen: so ist nun
durch A, B und E, △acb, und daher der Punkt b gegeben;
„ C, D „ E, △acd, „ „ „ „ d „ .
Folglich sind von der gesuchten Diagonale F die Endpunkte b und d der Lage nach gegeben, und daher die Diagonale selbst der Größe und der Lage nach.

Determination. Es muß seyn $A + B > E$, und auch $C + D > E$ (20.)

Aufgabe 12. Von einem Viereck ist Eine Seite der Größe und Lage nach gegeben; und die zwei Winkel sind der Größe nach gegeben, welche die beiden Diagonalen mit der gegebenen Seite bilden, und die beiden Winkel, welche an jenen anliegend von den Diagonalen und zwei unbekannten Seiten des Vierecks gebildet werden. Es sollen die drei übrigen Seiten des Vierecks der Größe und Lage nach gefunden werden.

Gegeben B, β, γ, α und δ.

Gesucht A, C und D.

Analysis.

Da α und β gegeben sind, so ist auch $\alpha + \beta = b$ gegeben;
und da γ und δ . . . . $\gamma + \delta = c$.

Es ist also gegeben

B der Größe und Lage nach

b und γ c und β

der Größe nach

daher △abc △dcb

der Art, Größe und Lage nach (Aufg. 2.)

folglich die Punkte a d

der Lage nach,

und daher die gesuchten Linien A, C und D der Größe und Lage nach.

Determination. Es muß seyn

$\alpha + \beta + \gamma < 2\,R$, und auch $\beta + \gamma + \delta < 2\,R$ (17.)

Aufgabe 13. Von einem Viereck sind drei Seiten gegeben, der von zwei dieser Seiten eingeschlossene Winkel, und der Winkel, den die dritte Seite mit der Diagonale macht, welche die Endpunkte der beiden übrigen Seiten verbindet. Es soll das Viereck verzeichnet werden.

Gegeben. A, B, C, $\angle b$ und $\angle \delta$.

Gesucht das Viereck, in welchem diese Stücke in der angegebenen Ordnung vorkommen.

Analysis. Nimmt man B auch der Lage nach als gegeben an: so ist, da $\angle b$ und A der Größe nach gegeben sind, $\triangle cba$ gegeben; und daher der Punkt a der Lage nach, und folglich E der Größe und Lage nach. Nun ist aber auch $\angle \delta$ und C der Größe nach gegeben; also ist $\triangle acd$ gegeben, und daher auch der Punkt d der Lage nach. Da nun also die Punkte a und d der Lage nach gefunden werden, und die Punkte b und c der Lage nach gegeben sind: so ist das Viereck abcd hierdurch der Größe, Art und Lage nach gegeben.

Anmerkung. Bei den Aufgaben 11., 12. und 13., so wie bei den folgenden, ist es zweckmäßig, „die gegebenen Stücke mit Rücksicht auf die, in der Determination angegebenen Beschränkungen wirklich zu verzeichnen, und aus denselben die Figur zu construiren“, so daß man hierbei eine vollständig gegebene Figur als Schema benutzt.

Aufgabe 14. Von einem Viereck sind gegeben „zwei neben einander liegende Winkel, von welchen jeder > oder = R ist; die beiden Diagonalen, und eine Seite, die an einem der gegebenen Winkel anliegt, aber nicht von beiden eingeschlossen ist“; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben $\angle b$, $\angle c$, E, F und A.

Gesucht das Viereck, in welchem diese Stücke in der angegebenen Ordnung vorkommen.

Analysis. Da A, E und $\angle b$ gegeben sind, so läßt sich das Dreieck abc construiren (Aufg. 4.); und es ist alsdann B der Größe und Lage nach gegeben. Hierdurch kennt man aber nun B, F und $\angle c$ von dem Dreieck bcd, welches also ebenfalls construirt werden kann — wodurch die Lage der Punkte a und d bestimmt ist.

Determination. Da $\angle b \geqq R$ seyn soll, so muß $E > A$ seyn; und aus gleichem Grunde, weil $\angle c \geqq R$, muß auch seyn $F > B$. Da nun aber auch $E > B$, so folgt: daß die Aufgabe immer bestimmt ist, wenn

$$E > A \text{ und } F \gtreqqless E \text{ ist.}$$

Aufgabe 15. Von einem Viereck sind zwei einander gegenüber liegende Winkel gegeben; die Diagonale, welche die beiden übrigen Winkel verbindet; und die Winkel, in welche der eine dieser

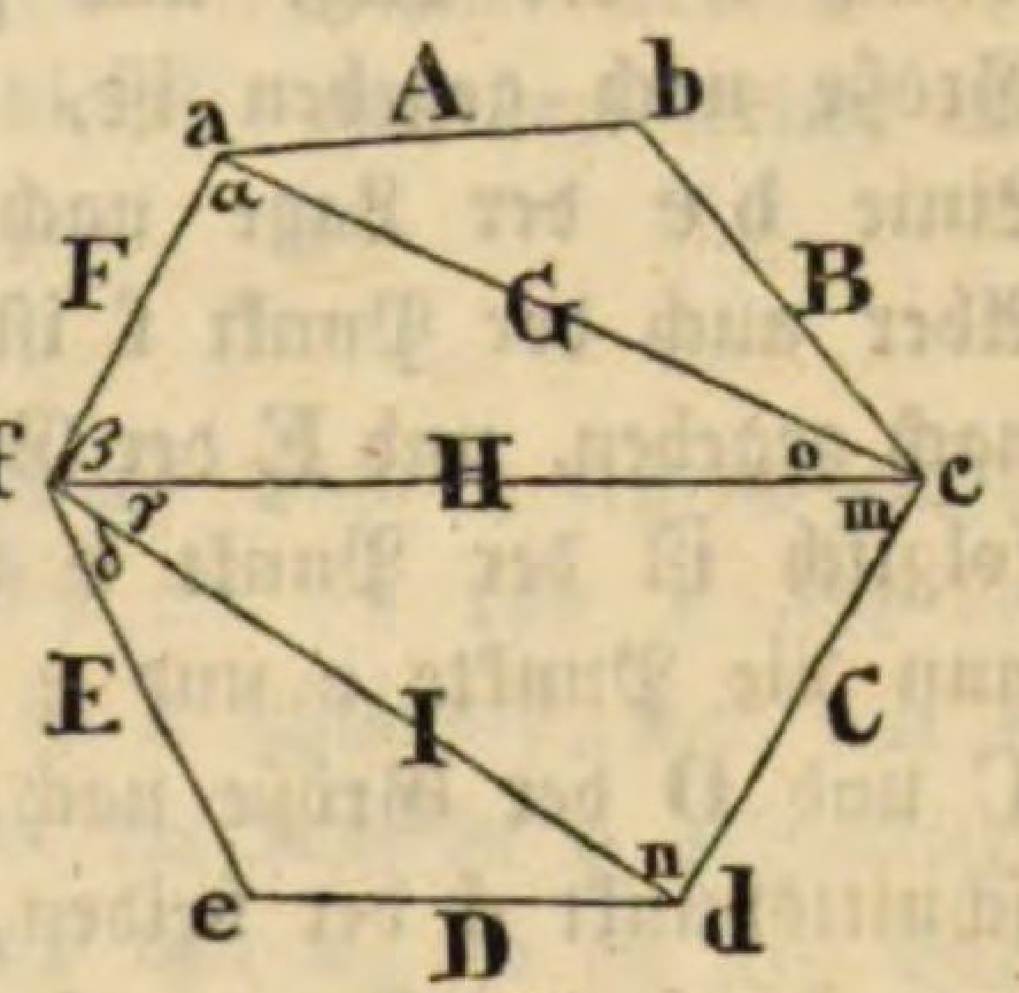
beiden verbundenen Winkel durch diese Diagonale getheilt wird. Es soll das Viereck verzeichnet werden.

Gegeben ∟ b, ∟ d, E, ∟ γ und ∟ δ.

Gesucht das Viereck, in welchem diese Größen vorkommen.

Analysis. Durch E, ∟ b und ∟ γ ist △ acb, und durch E ∟ d und ∟ δ das △ acd bestimmt (Aufg. 3.). Folglich sind die Punkte b und d der Lage nach gegeben; aber auch a und c, weil E gegeben ist; folglich ist das Viereck bestimmt.

Determination. Es muß seyn $b + \gamma < 2$ R, und auch $d + \delta < 2$ R.



Aufgabe 16. Von dem Sechseck abcdef sind gegeben die Seiten A und B, die Diagonalen G und H, und die Winkel o, m, γ, δ und e; es soll die Figur verzeichnet werden.

Determination. Es muß seyn $m + \gamma < 2$ R, und $\delta + e < 2$ R.

Aufgabe 17. Von dem Sechseck abcdef sind gegeben die Seiten A, B und D, und die Winkel b, α, β, γ, δ und m; es soll die Figur verzeichnet werden.

Determination. Nachdem das Fünfeck abcdf construirt ist, und man in f an J den Winkel δ angesetzt hat, muß D größer seyn als die Normale, welche von d auf fe gefället werden kann; und ist nun $D \geqq J$, so kann das Sechseck nur auf eine einzige Art ergänzt werden, und es läßt dasselbe auf zwei verschiedene Arten sich ergänzen, wenn $D < J$ ist. (Aufg. 3.)

Aufgabe 18. Von dem Sechseck abcdef sind gegeben die Seiten A, B und D, die Diagonale H, und die Winkel b, α, γ, δ und n; es soll die Figur verzeichnet werden.

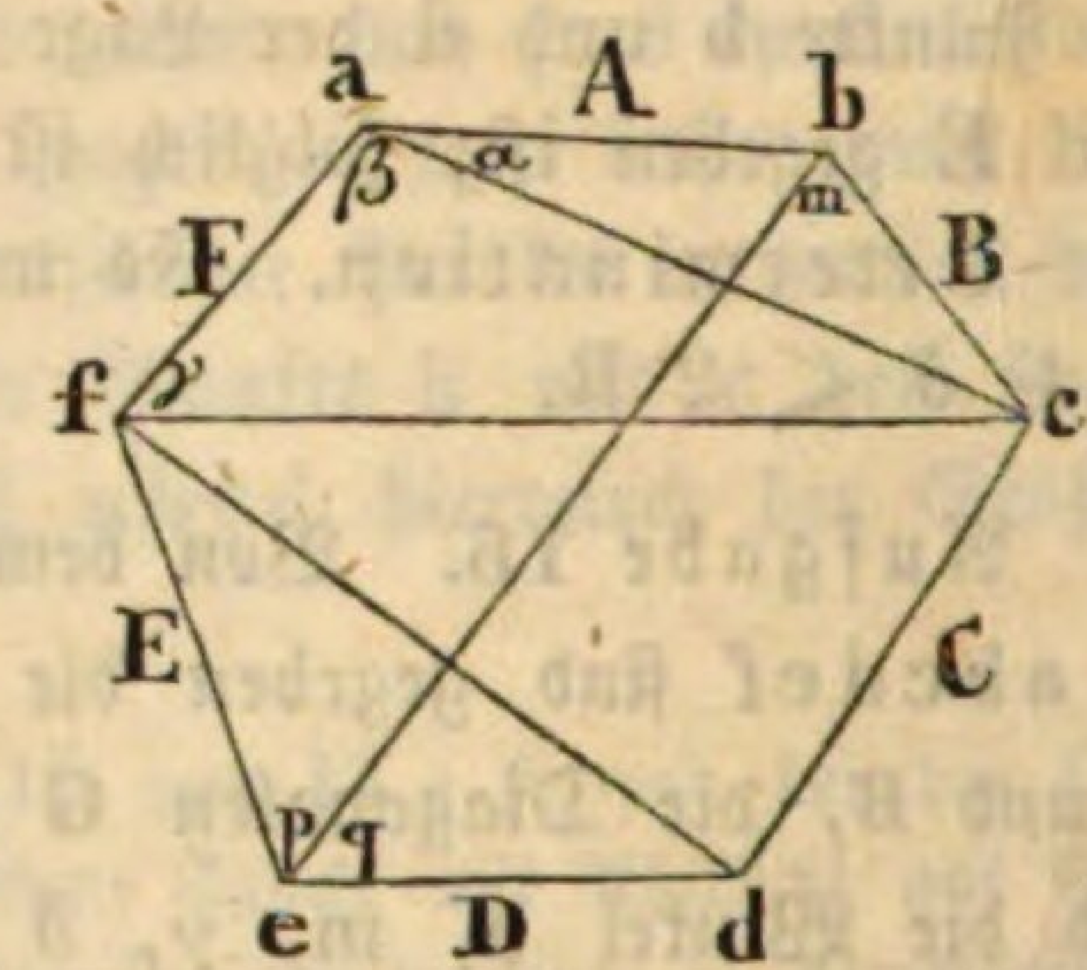
Determination. Es muß seyn H größer als die Normale von c auf F, und D größer als die Normale von d auf E.

Ist nun $H > G$ und $D > J$, so ist nur Eine Figur möglich, die den Bedingungen entspricht.

Ist $H > G$ und $D < J$ \
oder $H < G$ „ $D > J$ } so giebt es zwei verschiedene Figuren, in welchen die gegebenen Stücke vorkommen.

Ist aber zugleich H $<$ G und D $<$ J: so können vier verschiedene Figuren verzeichnet werden, von welchen jede den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 19. Von dem Sechseck abcdef sind gegeben die Seiten A, C, D und E, die Diagonale ac $=$ G, und die Winkel α, β, γ und m; es soll die Figur verzeichnet werden.



Analysis. Durch A, ac $=$ G und ∟ α ist Δ abc gegeben; und da β und γ gegeben sind, so ist Δ acf ebenfalls bestimmt. Da sonach B der Lage und ∟ m der Größe nach gegeben ist, so ist die Linie be der Lage nach gegeben. Aber auch der Punkt f ist der Lage nach gegeben, und E der Größe nach; folglich ist der Punkt e der Lage nach bestimmt. Hiernach sind nun die Punkte c und e der Lage nach gegeben, und die Linien C und D der Größe nach; folglich ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt d der beiden, mit C und D aus c und e beschriebenen Kreise der Lage nach gegeben.

Determination. Es muß seyn E größer, als die Normale von f auf be; und C $+$ D größer als die Diagonale, welche von c nach e gezogen werden kann.

Ist nun zugleich E größer als die Diagonale, welche von f nach b gezogen werden kann, so giebt es nur Eine Figur; und ist E kleiner als diese Diagonale, so giebt es zwei Figuren, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 20. Es ist von dem Sechseck abcdef (Aufg. 19.) gegeben die Diagonale be $=$ K, die Seiten B, D und E, und die Winkel a, f, p, q und m; man soll das Sechseck verzeichnen.

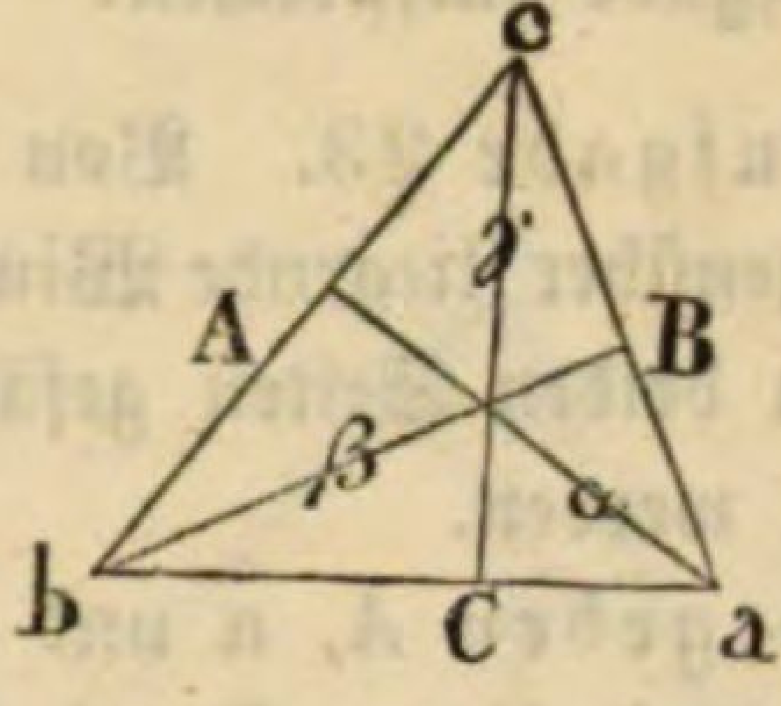
---

§. 3.

Construction des Dreiecks aus Seiten, Winkel und Normalen.

In jedem Dreieck werden die Seiten mit A, B, C, die Winkel mit a, b, c, und die Normalen mit α, β, γ so bezeichnet: daß der Winkel a der Seite A gegenüber liegt, und die Normale,

welche von dem Scheitel a auf A gefället werden kann, mit α bezeichnet wird. Eben so ist β die Normale, welche von dem Scheitel des Winkels b auf B sich fällen läßt; und γ ist die Normale, welche von c auf C gefället wird: wie das beistehende Schema ergiebt, worauf alle, in den folgenden Aufgaben dieses §. gegebenen Stücke, insofern keine eigene Figur beigefügt ist, sich beziehen.

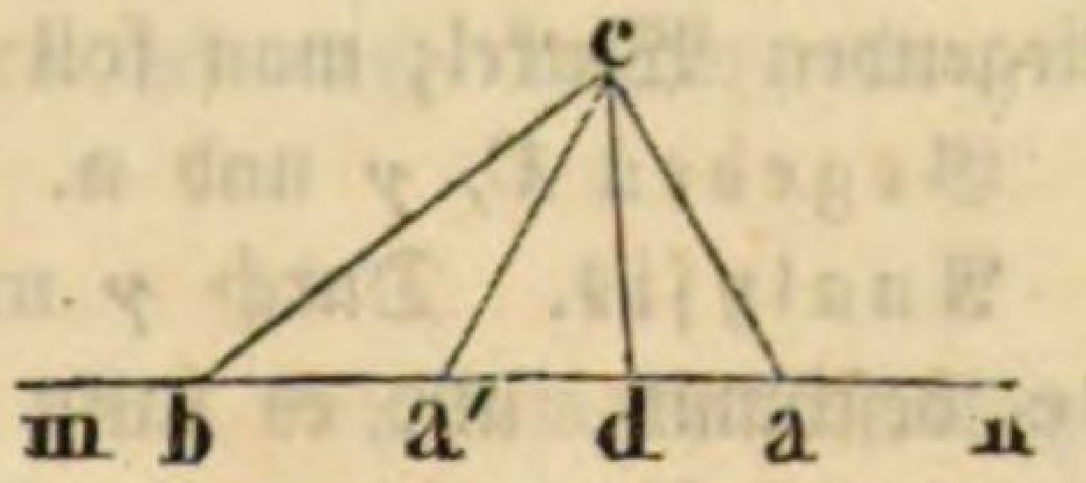


Aufgabe 21. Es soll das Dreieck verzeichnet werden, von welchem zwei Seiten gegeben sind, und die Normale, welche auf die dritte Seite gefället werden kann.

Gegeben A, B und γ.

Construction. Ziehe eine Linie mn, und in irgend einem Punkte derselben errichte die Normale dc $= \gamma$; von c aus beschreibe mit A einen Kreis, der die mn in b schneidet; und mit B beschreibe aus c einen Kreis, von welchem die mn in a geschnitten wird. Verbindet man nun c mit b und mit a, so ist das Verlangte geschehen.

Determination. Es muß seyn A $\geqq \gamma$ und auch B $\geqq \gamma$, aber nicht zugleich A $=$ B $= \gamma$. Ist nun A $>$ B, und soll dem Schema gemäß die Seite A links liegen: so wird den Bedingungen der Aufgabe durch jedes der beiden Dreiecke bca und bca′ Genüge geleistet.



Aufgabe 22. Man soll ein Dreieck verzeichnen, von welchem zwei Seiten gegeben sind; und die Normale, welche auf eine dieser beiden Seiten gefället werden kann.

Gegeben B, C und γ.

Construction. Errichtet man in irgend einem Punkte d der mn (Fig. Aufg. 21.) die Normale dc $= \gamma$, und beschreibt nun aus c, als Mittelpunkt, mit B einen Kreis, der die mn in a und a′ schneidet: so kann man nun entweder von a oder a′ aus auf nm, in der Richtung am, ein Stück $=$ C abschneiden und den Endpunkt mit c verbinden.

Determination. Es darf B nicht kleiner seyn als γ; und ist B $>$ γ, so sind zwei Dreiecke möglich, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 23. Von einem Dreieck ist gegeben eine Seite, der ihr gegenüber liegende Winkel und die Normale, welche auf eine der übrigen beiden Seiten gefället werden kann; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben A, a und γ.

Analysis. Durch A und γ ist das rechtwinklige Dreieck cCb gegeben; und durch ∟ a und γ das Δ aC c.

Aufgabe 24. Von einem Dreieck ist ein Winkel gegeben, die Normale auf die gegenüber liegende Seite, und eine der übrigen beiden Seiten; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben ∟ c, γ und A.

Analysis. Durch A und γ ist das rechtwinklige Dreieck cCb bestimmt, und hierdurch ist A der Lage nach gegeben. Da nun ∟ c gegeben ist, so ist der zweite Schenkel B dieses Winkels ebenfalls der Lage nach gegeben.

Aufgabe 25. Von einem Dreieck ist gegeben Eine Seite, die Normale auf derselben, und einer der, an der gegebenen Seite anliegenden Winkel; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C, γ und a.

Analysis. Durch γ und ∟ a ist das rechtwinklige Dreieck aCc bestimmt; und es kann nun auf aC eine Linie $=$ C von a aus genommen werden.

Aufgabe 26. Es sind von einem Dreieck zwei Winkel gegeben, und die Normale zu der Seite, die von den gegebenen Winkeln eingeschlossen wird; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben ∟ a, ∟ b und γ.

Aufgabe 27. Von einem Dreieck sind zwei Winkel gegeben, und die Normale, welche von dem Scheitel eines dieser Winkel auf die gegenüber liegende Seite gefället werden kann.

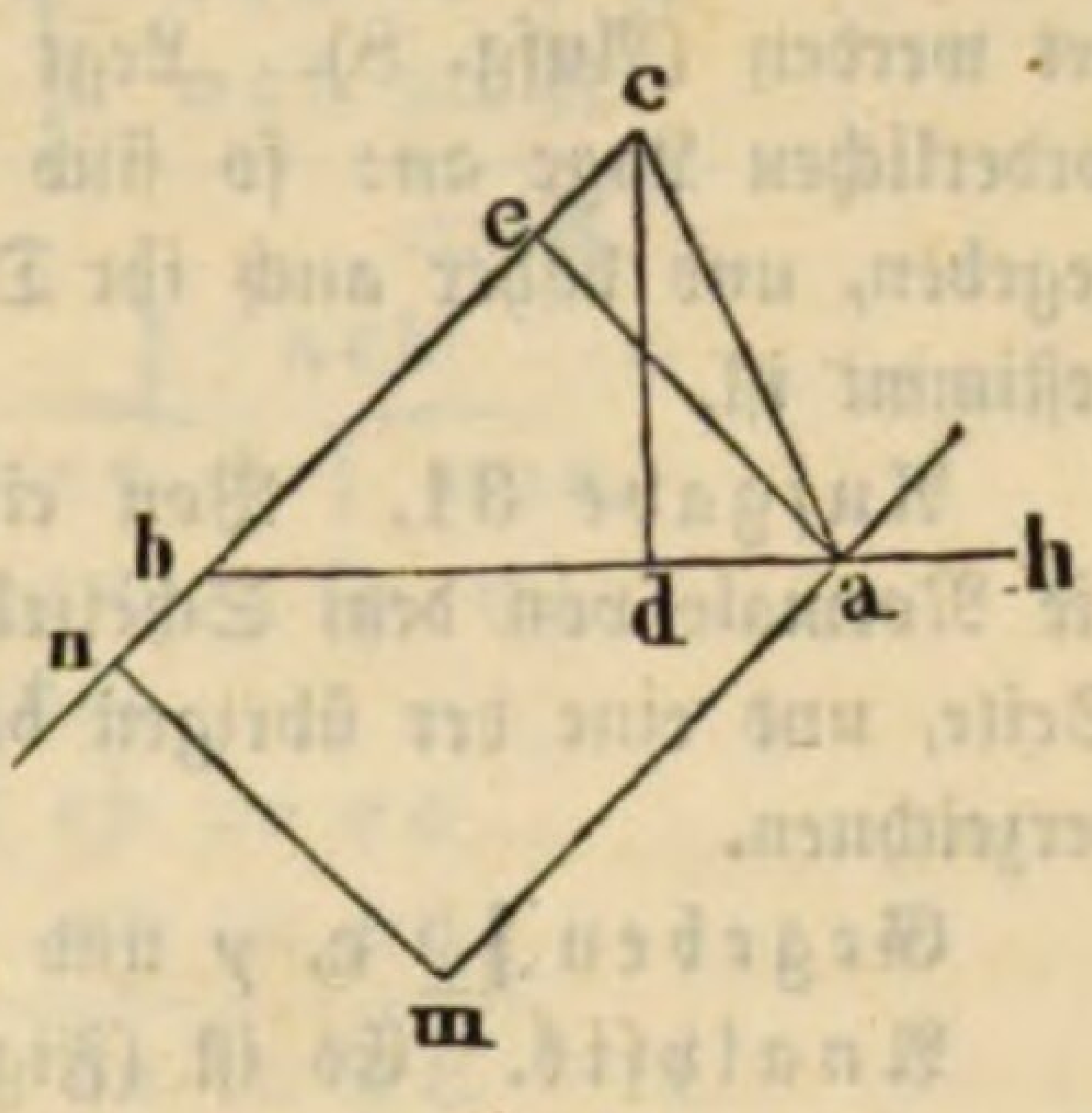
Gegeben ∟ a, ∟ c und γ.

Analysis. Durch a und γ ist das rechtwinklige Dreieck caC bestimmt, und dadurch B der Größe und Lage nach gegeben. Wird nun ∟ c an B angelegt, so ist auch A der Lage nach gegeben.

Aufgabe 28. Von einem Dreieck sind zwei Normalen und Eine Seite, welche zu einer dieser Normalen gehört, gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben α, γ und A.

Analysis. Ist **abc** das verlangte Dreieck: so ist, da **cd** $= \gamma$ und **cb** $=$ **A** gegeben, das rechtwinklige Dreieck **cdb** gegeben; aber auch die Normale **ac** $= \alpha$ ist gegeben, also der Abstand des Punktes **a** von **cn**, und daher die Lage der Parallele **am** mit **cn**. Da nun **bd** der Lage nach gegeben ist, so ist auch **a** gegeben.



Auflösung. Ziehe **bh**, und in irgend einem Punkte **d** derselben die Normale **dc** $= \gamma$; aus **c** beschreibe mit **cb** $=$ **A** einen Kreis, der die **bh** in **b** schneidet, und ziehe **cb**. In einem Punkte **n** dieser Linie errichte eine Normale **nm** $= \alpha$, und ziehe durch **m** die **ma** parallel der **bc**; den Durchschnittspunkt **a** derselben mit **bh** verbinde mit **c**, so ist Δ **abc** das verlangte Dreieck.

Aufgabe 29. Von einem Dreieck sind zwei Normalen gegeben, und der Winkel, welchen diese Normalen nicht treffen; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben α, γ und $\llcorner$ **b**.

Analysis. Es ist (Fig. Aufg. 28.) von dem rechtwinkligen Dreieck **cdb** gegeben die Kathete **cd** $= \gamma$ und $\llcorner$ **b**; daher ist dieses Dreieck bestimmt. Da aber außerdem auch **ae** $= \alpha$ gegeben ist, so läßt sich nun der Punkt **a** eben so, wie bei der vorigen Aufgabe, finden.

Anmerkung. Ist $\llcorner$ b $>$ R, so erhält Δ cdb die entgegengesetzte Lage; und der Winkel desselben, welcher α gegenüber liegt, ist $= 2$ R $-$ b.

Aufgabe 30. Von einem Dreieck kennt man Eine Seite und die beiden Normalen, welche auf die übrigen beiden Seiten gefället werden können; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben B, α und γ.

Analysis. Ist **abc** (Fig. Aufg. 28.) das verlangte Dreieck: so ist von demselben gegeben

das rechtwinklige Δ **acd** durch **ac** = **B** und **cd** = γ;
" " Δ **ace** " **ac** = **B** " **ae** = α.

Von jedem dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke ist hiernach die Hypotenuse und die eine Kathete gegeben; sie können also verzeichnet werden (Aufg. 8). Legt man an **ac** diese Dreiecke in der erforderlichen Lage an: so sind hierdurch **ce** und **ad** der Lage nach gegeben, und daher auch ihr Durchschnittspunkt **b**, wodurch Δ **abc** bestimmt ist.

Aufgabe 31. Von einem Dreieck ist ein Winkel gegeben, die Normale von dem Scheitel desselben auf die gegenüber liegende Seite, und eine der übrigen beiden Normalen; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben $\angle$ c, γ und α.

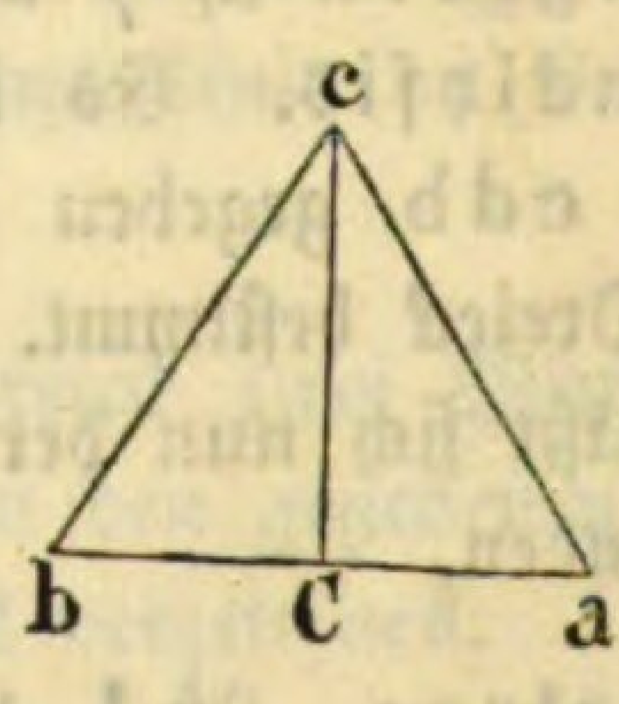
Analysis. Es ist (Fig. Aufg. 28.) von dem rechtwinkligen Dreieck **ace** gegeben $\angle$ **c** und **ae** = α; also ist dasselbe gegeben, und daher auch **ac** = **B**. Man kennt also außer α und γ auch **B**; und folglich kann das Dreieck construirt werden, wie Aufgabe 30.

Aufgabe 32. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man den Winkel an der Spitze, und die Normale von derselben auf die Grundlinie; es soll dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben $\angle$ c, γ, und es soll seyn **A** = **B**.

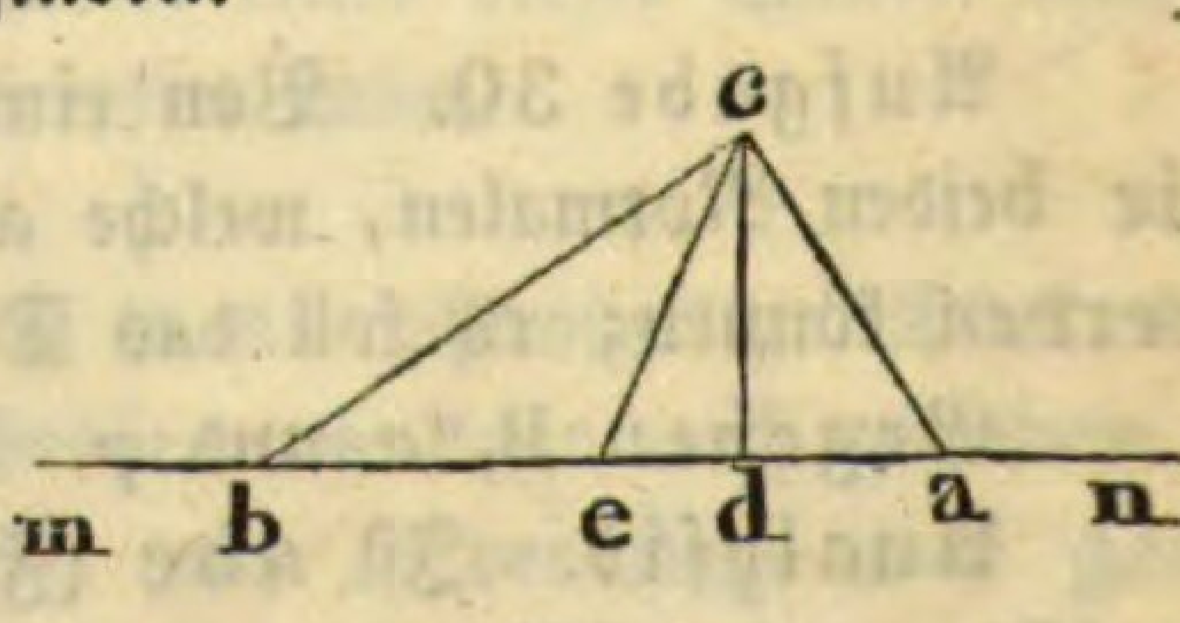
Analysis. Soll **A** = **B** seyn, und man fället die Normale **cC** = γ: so ist Δ **cCb** $\cong$ Δ **cCa**, und daher wird der Winkel **c** durch γ halbirt.

Auflösung. Halbire den Winkel **c**, nimm die Halbirungslinie **cC** = γ, und errichte in **C** eine Normale auf γ, und verlängere dieselbe zu beiden Seiten, bis sie die Schenkel vom $\angle$ **c** in **a** und **b** schneidet: so ist Δ **abc** das verlangte Dreieck.



Aufgabe 33. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist gegeben; man soll die Seite desselben finden.

Aufgabe 34. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gegeben, und der Abstand des Scheitels des rechten Winkels von derselben; man soll das Dreieck verzeichnen.



Gegeben von dem bei c rechtwinkligen Δ abc die Hypotenuse ab, und die Höhe cd.

Analysis. Ziehe ce, so daß $\angle$ bce $= \angle$ b.

Da $\angle a + \angle b + \angle acb = 2R$
und $\angle acb = R$

so ist $\angle a + \angle b = R$
und daher $\angle a + \angle b = \angle acb$
also $\angle a + \angle b = \angle bce + \angle ace.$
Da nun $\angle b = \angle bce$ (p. c.)
so ist auch $\angle a = \angle ace.$
Da $\angle b = \angle bce$, so ist $eb = ec$
$\angle a = \angle ace$ „ $ea = ec$

daher $eb = ea = ec.$

Nun ist ab gegeben, also auch eb, und folglich ce; aber auch cd ist gegeben, und daher das rechtwinklige Dreieck cde; und hierdurch der Punkt, in welchem die Normale errichtet werden muß.

Auflösung. Ziehe mn; errichte in irgend einem Punkte d derselben eine Normale dc, der gegebenen Höhe gleich. Aus c schlage mit einem Radius, der der Hälfte der gegebenen Hypotenuse gleich ist, einen Kreis, welcher die mn in e schneidet. Von e nimm zu beiden Seiten auf mn die Stücke eb und ea, jedes $=$ ec, und ziehe bc und ac: so ist Δ acb das verlangte Dreieck.

Beweis. Da $eb = ec$, so ist $\angle ecb = \angle b$
$ea = ec$ „ $\angle eca = \angle a$

daher $\angle acb = \angle a + \angle b$

aber $\angle acb + \angle a + \angle b = 2R$
folglich auch $2 \times \angle acb = 2R$, und $\angle acb = R.$
Das Δ acb ist also bei c rechtwinklig.

Ueberdies ist $ab = ae + eb = 2 \times ec$, und ec die Hälfte der gegebenen Hypotenuse; es ist also ab der gegebenen Hypotenuse gleich, und cd ist die gegebene Höhe, vermöge der Construction.

Aufgabe 35. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Normalen gegeben; es soll dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben die Normale $c\gamma = \gamma$ der Grundlinie ab, und die Normale $b\beta = \beta$ des Schenkels ca.

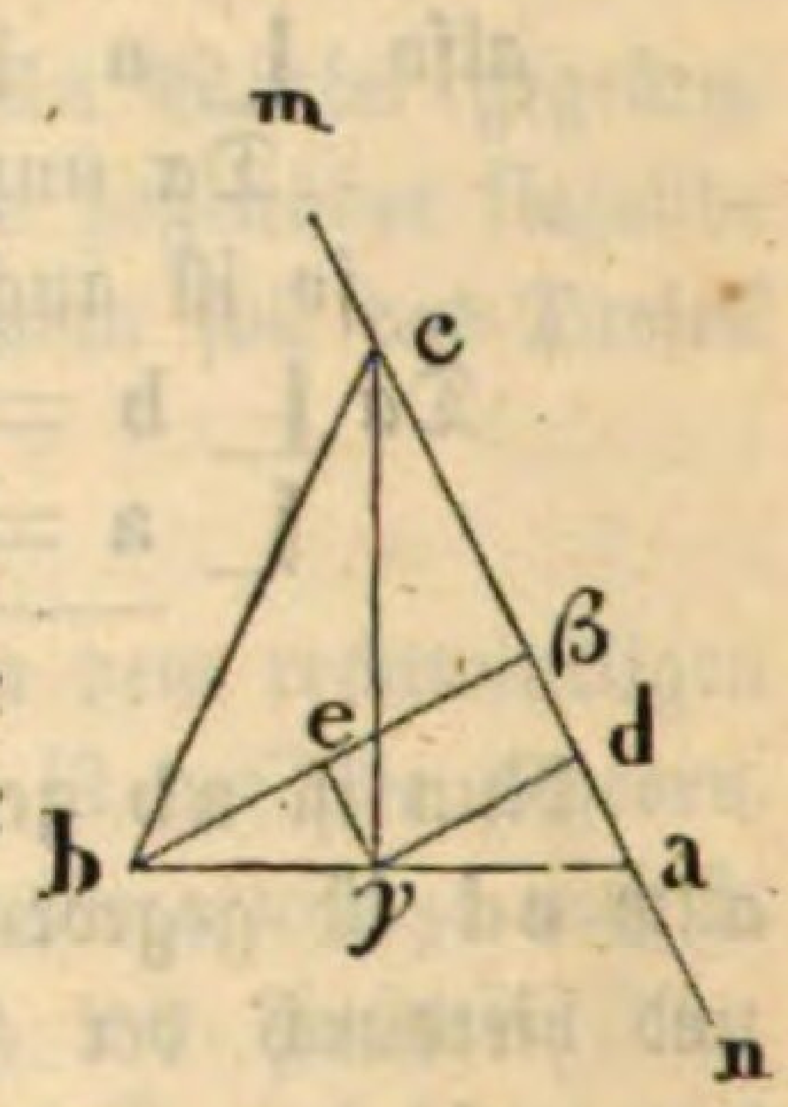
Analysis. Es sey abc die Figur des gleichschenkligen Dreiecks, $c\gamma$ die Normale der Grundlinie, und $b\beta$ die des Schenkels.

Durch γ ziehe γd der $b\beta$, und γe der ac parallel: so ist

(26) $\Delta b\gamma e \cong \Delta \gamma ad$ also $be = \gamma d$

aber $\gamma d = e\beta$ (34.)

folglich ist $be = e\beta$, also $\gamma d = \frac{1}{2}(b\beta)$.



Nun ist $b\beta$ gegeben, also auch γd; aber auch $c\gamma$ ist gegeben; folglich das rechtwinklige Dreieck $c\gamma d$, und daher ca der Lage nach. Da aber $c\gamma$ normal auf ab steht, so ist auch ab der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt a; und weil $\gamma b = \gamma a$, so ist auch der Punkt b der Lage nach gegeben.

Auflösung. Ziehe mn, und in einem Punkte d derselben die Normale $d\gamma = \frac{1}{2}\, b\beta = \frac{1}{2}\, \beta$. Aus γ beschreibe mit $\gamma c = \gamma$ einen Kreis, der die mn in c schneidet, und ziehe γc. Auf γc errichte in γ die Normale γa, welche die mn in a schneidet. Verlängere $a\gamma$ und nimm $\gamma b = \gamma a$, und ziehe bc: so ist Δabc das zu construirende gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Ziehe $b\beta$ normal auf ac, und γe parallel ac: so ist auch $b\beta$ parallel γd. (28.)

Da $\gamma b = \gamma a$ (p. c.)

$\angle e\gamma b = \angle ca\gamma$ } (29.)

und $\angle eba = \angle d\gamma a$ }

so ist $\Delta\, b\gamma e \cong \Delta\, \gamma ad$ (26.) also $be = \gamma d$

aber auch $e\beta = \gamma d$ (34.)

daher $b\beta = 2\,(\gamma d)$. Da nun $\gamma d = \frac{1}{2}\, \beta$ (p. c.)

so ist die Normale $b\beta = \beta$, und die Normale $c\gamma$ ist $= \gamma$. (p. c)

Die Normalen $b\beta$ und $c\gamma$ haben also die vorgeschriebene Größe.

Da $a\gamma = \gamma b$ (p. c.)

$\angle a\gamma c = \angle b\gamma c = R$ „

und $\gamma c = \gamma c$

so ist $\Delta a\gamma c \cong \Delta b\gamma c$, also $ca = cb$;

und das Dreieck abc ist also gleichschenklig, wie es seyn soll.

Determination. Da γc die Hypotenuse, und γd eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks $c d \gamma$ ist: so muß seyn

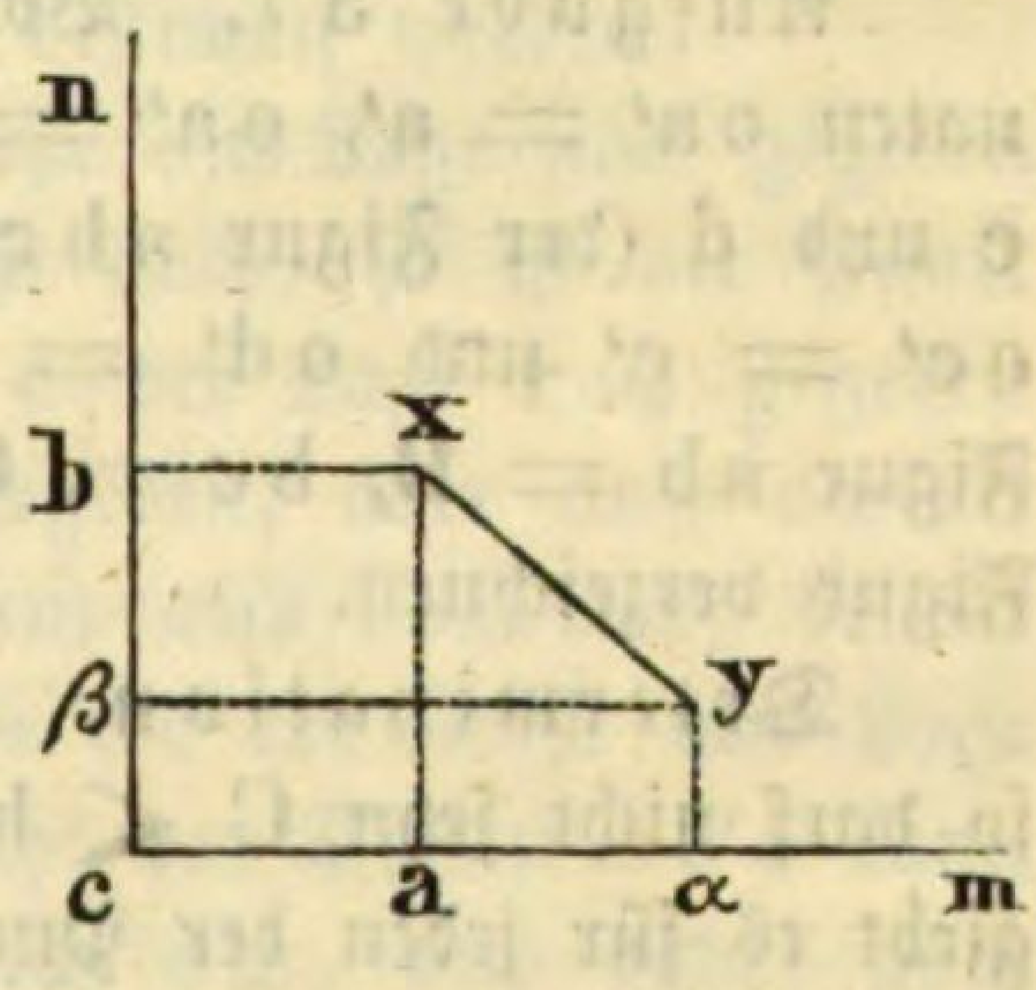
$$\gamma c > \gamma d, \text{ also } \gamma > {}^1\backslash_2\, \beta.$$

Anmerkung. Auch bei den, in diesem Paragraphen gelösten Aufgaben ist es zweckmäßig, „sich die vermöge der Bedingungen der Aufgabe gegebenen Stücke, mit Rücksicht auf die durch die Determination feststehenden Beschränkungen, wirklich zu zeichnen, und daraus das Dreieck zu construiren". Ueberhaupt gilt diese Bemerkung auch für alle folgenden Aufgaben, wo Figuren aus gegebenen Stücken construirt werden sollen.

§. 4.

Construction der Figuren durch Abscissen und Ordinaten.

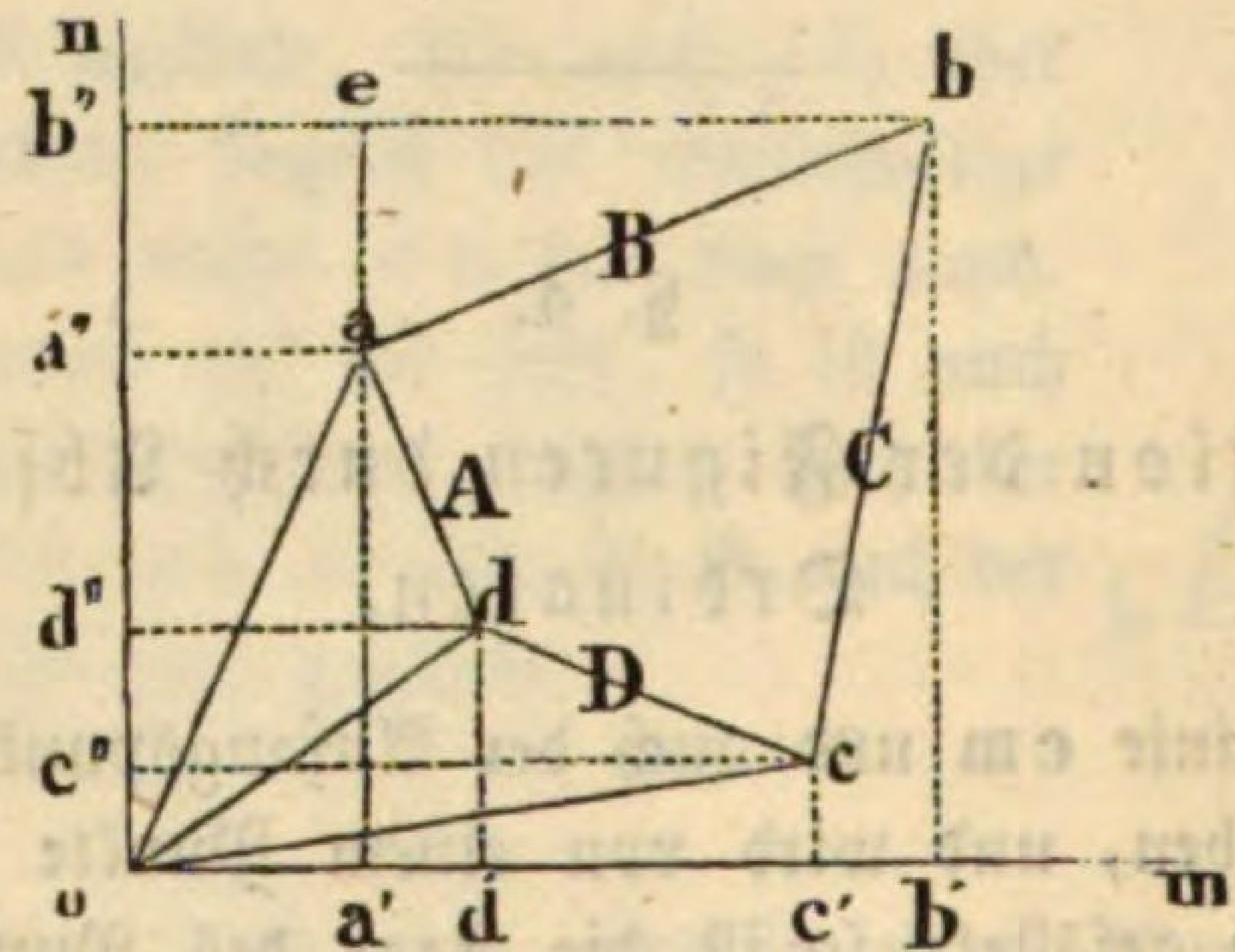
Ist eine Linie cm und auch der Anfangspunkt c derselben der Lage nach gegeben, und wird von einem Punkte x eine Normale xa auf dieselbe gefället: so ist die Lage des Punktes x bestimmt, wenn ca und ax der Größe nach gegeben sind. Denn schneidet man von c aus auf cm ein Stück = ca ab, errichtet in a auf cm eine Normale, und nimmt dieselbe so groß, als ax gegeben ist: so findet man hierdurch den Punkt x. Bei diesem Verfahren, „die Lage des Punktes x zu bestimmen" nennt man ca die Abscisse, und ax die Ordinate des Punkes x; und c wird der Nullpunkt genannt, weil die Länge der Abscisse ca von c an genommen wird.



Errichtet man auf cm in c die Normale cn, und zieht xb parallel cm: so ist die Lage von x auch bestimmt, wenn ca und cb der Länge nach gegeben sind. Denn schneidet man auf cm und cn die Stücke ca und cb von der gegebenen Länge ab, und errichtet in a und b Normalen auf cm und cn, so schneiden sich diese in dem Punkte x. Die Linien cm und cn nennt man in diesem Falle die Coordinatenachsen; und ca und cb sind die Coordinaten des Punktes x. Kennt man außer ca und cb auch die Coordinaten $c\alpha$ und $c\beta$ eines anderen Punktes y: so ist hierdurch nun die Linie xy ihrer Größe und Lage nach bestimmt, und es

läßt sich auf diese Weise auch die Lage einer ganzen Figur angeben.

Aufgabe 36. Die Coordinatenachsen om und on, die normal auf einander stehen, sind der Lage nach gegeben, und man kennt von der Figur abcd die Coordinaten eines jeden Punktes; so daß also für den Punkt a gegeben sind die Coordinaten oa′ = a′ und oa″ = a″; für b die Coordinaten ob′ = b′ und ob″ = b″ ꝛc.; es soll die Figur verzeichnet werden.



Aufgabe 37. Von dem Punkte a kennt man die Coordinaten oa′ = a′, oa″ = a″; und für jeden der übrigen Punkte b, c und d (der Figur abcd) sind die Abscissen gegeben ob′ = b′, oc′ = c′ und od′ = d′; und außerdem sind die Seiten der Figur ab = B, bc = C und cd = D gegeben. Man soll die Figur verzeichnen.

Determination. Es darf nicht seyn $B < b' - a'$; eben so darf nicht seyn $C < b' - c'$ und $D < c' - d'$. Uebrigens giebt es für jeden der Punkte b, c, d zwei verschiedene Lagen, die den Bedingungen entsprechen.

Aufgabe 38. Man kennt die Coordinaten des Punktes a und die des Punktes b der obigen Figur; es ist also gegeben oa′ = a′, oa″ = a″, ob′ = b′ und ob″ = b″; und außerdem kennt man die Abscissen oc′ = c′, od′ = d′ der Punkte c und d; und auch die Winkel a und b der Figur abcd sind gegeben. Man soll die Figur verzeichnen.

Aufgabe 39. Die Figur abcd (Aufg. 36.) ist der Größe, Art und Lage nach gegeben; und außerdem kennt man die Coordinaten oa′ = a′ und oa″ = a″ des Punktes a, und die Abscisse ob′ = b′ des Punktes b der Größe nach. Es soll hieraus die Lage der Coordinatenachsen om und on bestimmt werden.

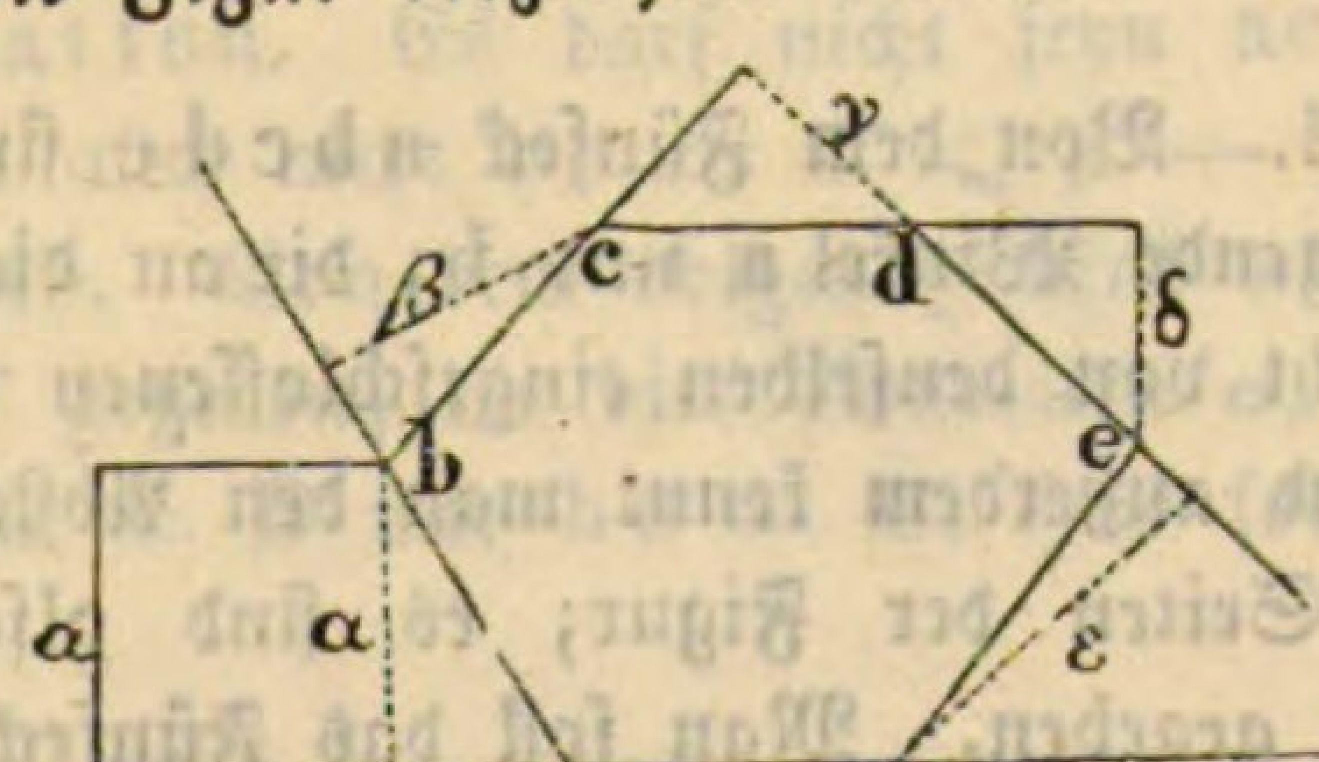
Analysis. Verlängere die a′a, bis sie die bb″ in e schneidet. Da oa′ = a′ und ob′ = b′ gegeben sind, so ist auch die Linie a′b′ = b′ — a′ ebenfalls gegeben; und weil a′b′ = eb, so ist eb gegeben; und weil die Figur abcd gegeben ist, so ist auch B gegeben. Man kennt also von dem rechtwinkligen Dreieck abe die Hypotenuse B der Größe und Lage nach, und die eine Kathete be der Größe nach; folglich kann dasselbe verzeichnet werden. Wird hierauf ea verlängert und aa′ = a″ genommen, so ist hierdurch die om der Lage nach bestimmt; und nimmt man auf dieser Linie a′o = a′, so ist auch der Punkt o, und folglich die Linie on ebenfalls bestimmt.

Aufgabe 40. Von den Punkten a und b sind die Abscissen gegeben (Fig. Aufg. 36.) oa′ = a′ und ob′ = b′; und von dem Punkte c die Ordinate oc″ = c″; die Figur abcd ist der Größe, Art und Lage nach gegeben. Man soll die Lage der Coordinatenachsen om und on bestimmen.

Aufgabe 41. Die Figur abcd ist gegeben, und der Abstand der Punkte a und d derselben von o; und außerdem kennt man die Abscisse oc′ = c′ des Punktes c. Es soll hieraus die Lage der Coordinatenachsen om und on bestimmt werden.

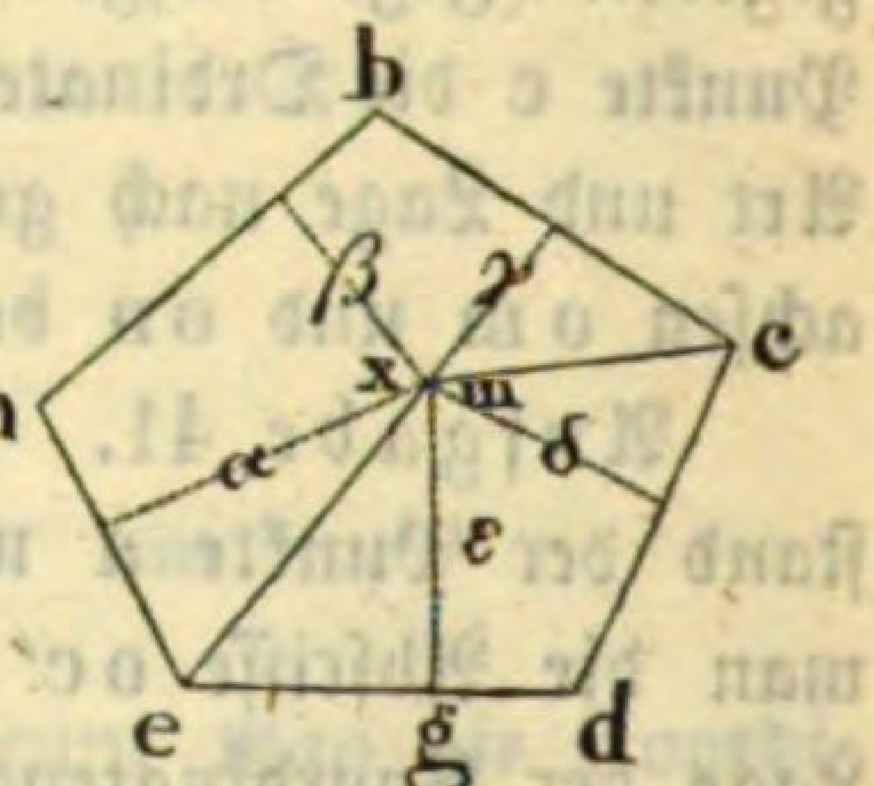
Analysis. Da ad = A der Größe und Lage nach gegeben ist, und die Linien ao und do der Größe nach, so ist der Punkt o der Lage nach bestimmt; und da auch c der Lage nach gegeben ist so ist oc der Größe und Lage nach gegeben; aber auch oc′ = c′ ist der Größe nach gegeben. Man kennt also von dem, bei c′ rechtwinkligen Dreieck oc′c die Hypotenuse oc der Größe und Lage nach, und die Kathete oc′ der Größe nach; das Dreieck oc′c kann also construirt werden, und es ist hierdurch om, und daher auch on der Lage nach bestimmt.

Aufgabe 42. Von dem Sechseck abcdef kennt man die vier Winkel a, b, c, d; und die Normalen α, β, γ, δ und ε, welche von den Ecken der Figur auf Seiten derselben gefället sind; es soll hieraus die Figur verzeichnet werden.



Auflösung. Zieht man mn, errichtet in dem Punkte m eine Normale $= \alpha$, zieht durch den Endpunkt derselben eine Parallele mit mn, und setzt an einem Punkte der mn den Winkel a an: so schneidet der zweite Schenkel dieses Winkels die gezogene Parallele in b, wodurch ab der Größe und Lage nach bestimmt ist. Aus ∟ b und β läßt sich nun auf gleiche Weise die bc der Größe und Lage nach finden u. s. w.

Aufgabe 43. Von dem Fünfeck abcde kennt man eine Seite ae = A, und die drei auf einander folgenden Winkel a, b und c; und außerdem ist der Abstand eines Punktes m von den fünf Seiten gegeben; man kennt also die Normalen α, β, γ, δ, ε. Es soll das Fünfeck verzeichnet werden.

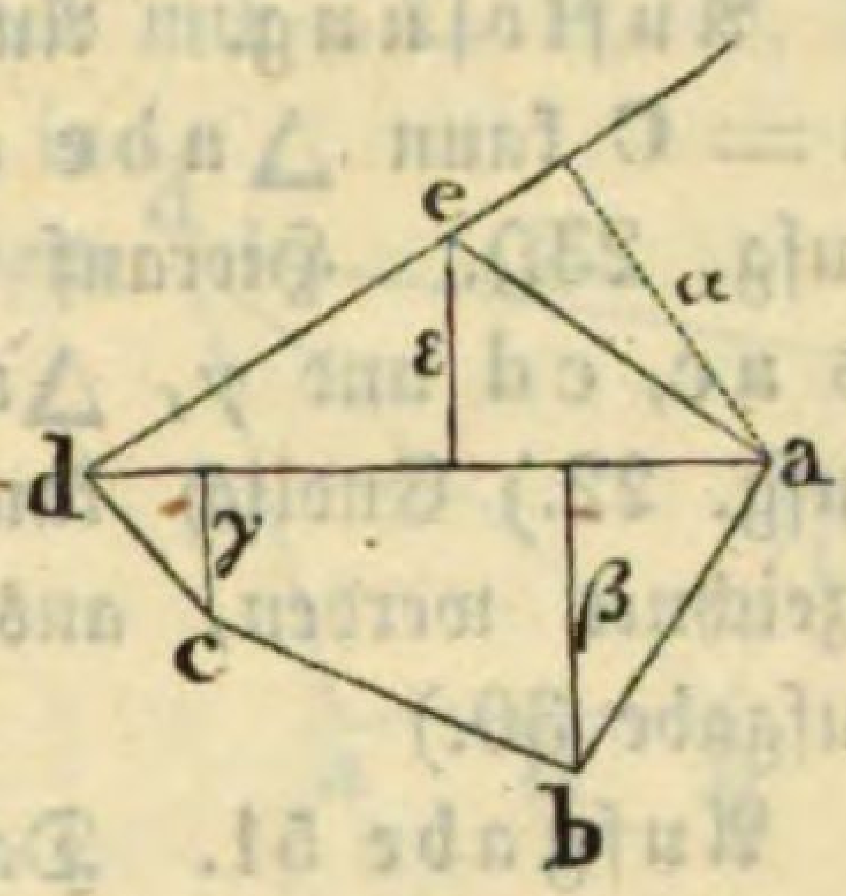


Analysis. Setzt man den Winkel, welchen α und β an dem Punkte m einschließen = x, so ist a + x = 2 R; und da a gegeben ist, so ist auch ∟ x gegeben. Folglich ist die Lage von β bestimmt, wenn die von α als gegeben angenommen wird. Zieht man nun durch die Endpunkte von α und β Normalen auf diese Linien, so schneiden sich dieselben in dem Punkte a; und es ist hierdurch, da A gegeben ist, auch der Punkt e der Lage nach bestimmt. Durch ∟ b ist ferner der Winkel gegeben, den β und γ bei m einschließen, und also ist γ der Größe und Lage nach bestimmt; und hierdurch wird, wenn man an dem Endpunkte von γ eine Normale zieht, die Lage von b gefunden, und es läßt sich auf gleiche Weise die Lage von c ebenfalls finden. Da die Punkte m und e gegeben sind, so ist me der Größe und Lage nach gegeben; aber ε ist der Größe nach gegeben, folglich kann das bei g rechtwinklige Dreieck emg construirt werden, wodurch ed der Lage nach gegeben ist; und eben so kann man durch mc und δ die cd der Lage nach finden. Folglich ist auch der Punkt d der Lage nach bestimmt.

Aufgabe 44. Von dem Fünfeck abcde sind gegeben zwei neben einander liegende Winkel a und b; die an diesen Winkeln anliegenden, aber nicht von denselben eingeschlossenen Seiten ea = A und bc = C; und außerdem kennt man den Abstand des Punktes m von den fünf Seiten der Figur; es sind also die Normalen α, β, γ, δ und ε gegeben. Man soll das Fünfeck verzeichnen.

Aufgabe 45. Von dem Fünfeck **abcde** sind vier Winkel a, b, c, d, und die fünf Normalen α, β, γ, δ, ε, durch welche der Abstand des Punktes m von den Seiten der Figur gemessen wird, gegeben; man soll die Figur verzeichnen. (Fig. Aufg. 43.)

Aufgabe 46. Man kennt, von dem Fünfeck **abcde**, drei neben einander liegende Seiten **ea** = **A**, **ab** = **B** und **bc** = **C**, die Diagonale **ad** = **F**, und den Abstand der drei Ecken b, c und e von dieser Diagonale, also die Normalen β, γ und ε; es soll das Fünfeck construirt werden.



Aufgabe 47. Von dem Fünfeck **abcde** sind gegeben die beiden nicht neben einander liegenden Seiten **ea** = **A** und **bc** = **C**, der Winkel **eab** = **a**, die Diagonale **ad** = **F**, und die drei Normalen β, γ und ε; man soll das Fünfeck verzeichnen.

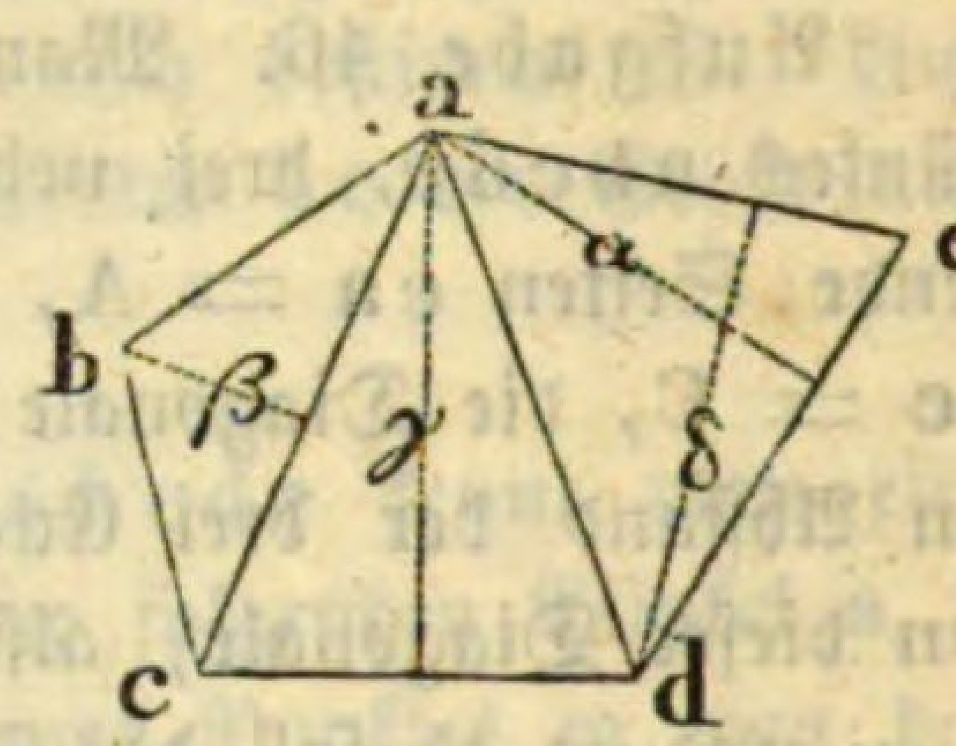
Aufgabe 48. Von dem Fünfeck **abcde** sind die beiden Seiten **ea** = **A** und **bc** = **C** gegeben, der Winkel **eab** = **a**, die Diagonale **ad** = **F**, der Abstand der Punkte b und c von derselben, also die Normalen β und γ, und der Abstand = α des Punktes **a** von der unbekannten **de**; man soll das Fünfeck verzeichnen.

Analysis. Aus α und **ea** = **A** kann das dadurch bestimmte rechtwinklige Dreieck construirt werden, und es ist hierdurch **ed** der Lage nach bestimmt. Da nun **ad** = **F** der Größe nach gegeben ist, und **a** der Lage nach, so ist auch d der Lage nach bestimmt. Nun ist ∟ **eab** = **a** gegeben; folglich ist die Linie **ab**, in welcher der Punkt b liegen muß, der Lage nach gegeben; aber auch der Abstand dieses Punktes von **ad** ist durch die Normale β gegeben, folglich ist b der Lage nach bestimmt. Da nun **bc** = **C** der Größe nach gegeben ist, und der Abstand γ des Punktes c von **ad**, so ist hierdurch die Lage von c ebenfalls bestimmt.

Determination. Es darf nicht seyn **ae** = **A** $< \alpha$, **ad** = **F** $< \alpha$, und auch nicht **bc** = **C** $< \beta - \gamma$ oder $\gamma - \beta$.

Aufgabe 49. Von dem obigen Fünfeck **abcde** ist die Diagonale **ad** = **F** gegeben, die vier Normalen α, β, γ, ε, und die beiden Seiten **ab** = **B** und **bc** = **C**; man soll das Fünfeck verzeichnen.

Aufgabe 50. Von dem Fünfeck abcde kennt man die beiden neben einander liegenden Seiten bc = C und cd = D, die vier Normalen α, β, γ und δ, und den Winkel bac = m; es soll das Fünfeck construirt werden.



Auflösung. Aus ∟m, β und bc = C kann Δabc construirt werden (Aufg. 23.). Hierauf kann man nun aus ac, cd und γ, Δacd verzeichnen. (Aufg. 22.) Endlich kann nun Δade verzeichnet werden, aus ad, α und δ (Aufgabe 30.)

Aufgabe 51. Das Fünfeck abcde soll verzeichnet werden aus den vier Normalen α, β, γ, δ, und den drei neben einander liegenden Seiten bc = C, cd = D und de = E.

Aufgabe 52. Man soll das Fünfeck verzeichnen; aus den vier Normalen α, β, γ, δ, und den neben einander liegenden Winkeln a und e der Figur, und dem gegebenen Winkel bac = m.

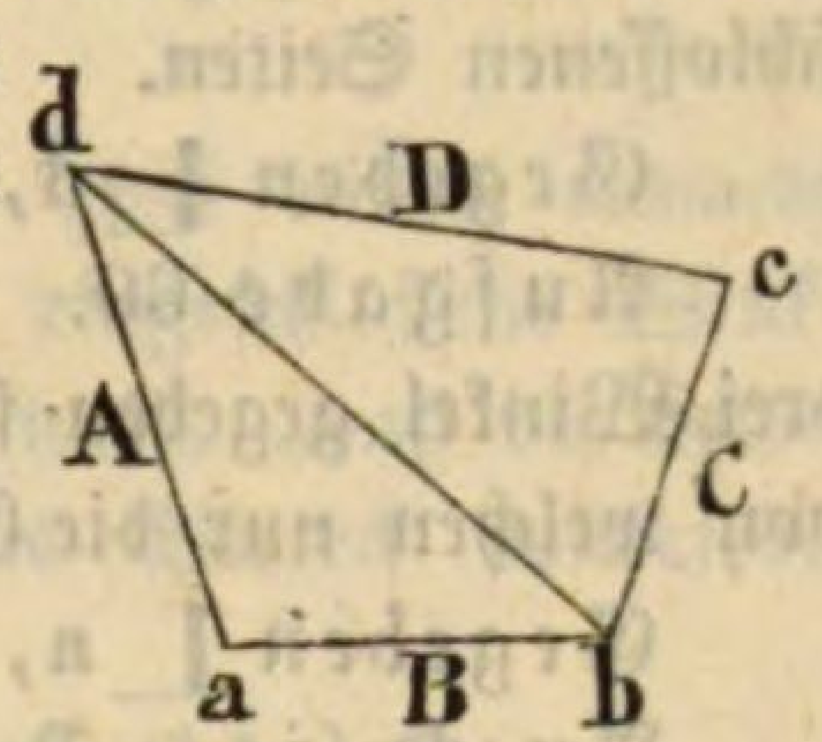
Aufgabe 53. Von dem obigen Fünfeck sind die beiden Seiten ea = A, ab = B, und der von denselben eingeschlossene Winkel eab = a gegeben, und die vier Normalen α, β, γ und δ; man soll die Figur verzeichnen.

Analysis. Durch α, δ und ae ist Δaed bestimmt (Aufg. 28.); also ist ad der Größe und Lage nach gegeben. Da nun γ der Größe nach gegeben ist, so ist dc der Lage nach gegeben. Da man ∟eab kennt und auch ab, so ist ab der Größe und Lage nach gegeben; β aber ist der Größe nach gegeben, folglich ac der Lage nach. Da nun so wohl dc als auch ac der Lage nach gegeben ist: so ist auch der Punkt c der Lage nach gegeben, und daher die Figur bestimmt.

§. 5.

Construction des Vierecks aus Seiten und Winkeln desselben.

In jedem Veireck sollen die vier Seiten mit „A, B, C, D“ und die vier Winkel mit „a, b, c, d“ in der Art bezeichnet werden, wie Dieses in dem beistehenden Schema angegeben ist.



Aufgabe 54. Man soll ein Viereck aus den vier Seiten und einem Winkel desselben verzeichnen.

Gegeben A, B, C, D und ∟a.

Aufgabe 55. Ein Viereck soll aus drei Seiten, und den beiden von denselben eingeschlossenen Winkeln, construirt werden.

Gegeben A, B, C, ∟a und ∟b.

Aufgabe 56. Man soll ein Viereck aus drei Seiten und zwei neben einander liegenden Winkeln construiren, von welchen der eine von zwei gegebenen Seiten gebildet wird.

Gegeben A, B, C, ∟a und ∟d.

Aufgabe 57. Ein Viereck soll aus drei Seiten, und zwei einander gegenüberliegenden Winkeln, verzeichnet werden.

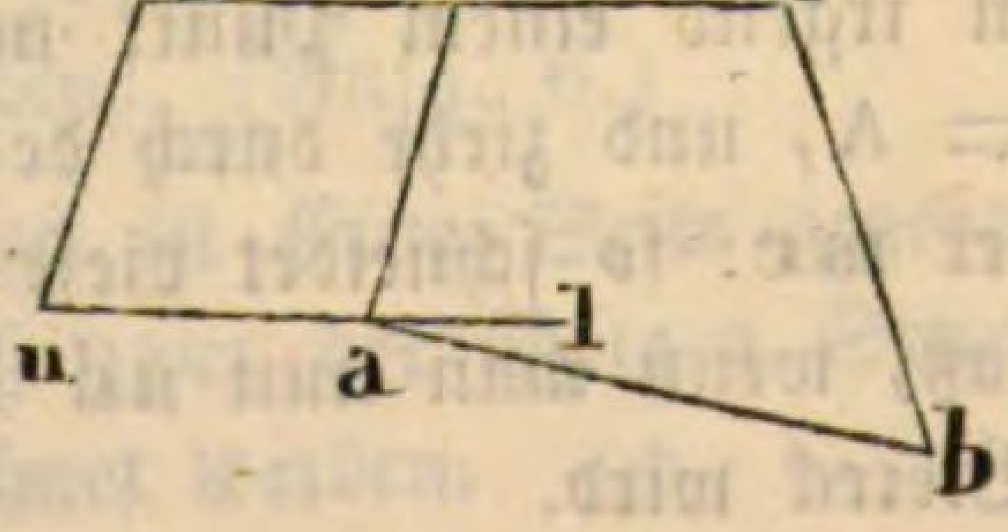
Gegeben A, B, C, ∟a und ∟c.

Analysis. Durch A, B und a ist das Dreieck abd bestimmt, und es ist daher bd gegeben; also kömmt es jetzt nur noch darauf an, „aus den beiden Seiten bd und C, und dem der einen dieser Seiten gegenüber liegenden Winkel c das Dreieck bcd zu beschreiben (Aufg. 4.), und dasselbe an bd anzusetzen“.

Aufgabe 58. Von einem Viereck sind drei Seiten und die beiden neben einander liegenden Winkel gegeben, welche diese Seiten nicht einschließen; man soll die Figur verzeichnen.

Gegeben A, B, C, ∟c und ∟d.

Auflösung. Ziehe eine Linie cm, setze an diese Linie in c den Winkel mcb = c, und in m, ∟cmn = d; nimm cb = C und mn = A. Durch n ziehe die nl parallel der mc, und beschreibe aus b mit einem Radius = B



einen Kreis, der die **nl** in **a** schneidet. Wird nun **ba** gezogen, und durch **a** die **ad** parallel **nm**, bis sie die **mc** in **d** schneidet: so ist **abcd** das verlangte Viereck.

Aufgabe 59. Man soll das Viereck verzeichnen, von welchem drei Winkel gegeben sind, und die beiden von denselben eingeschlossenen Seiten.

Gegeben ∟d, ∟a, ∟b, A und **B**.

Aufgabe 60. Man soll ein Viereck verzeichnen, von welchem drei Winkel gegeben sind, und zwei neben einander liegende Seiten, von welchen nur die Eine von gegebenen Winkeln eingeschlossen wird.

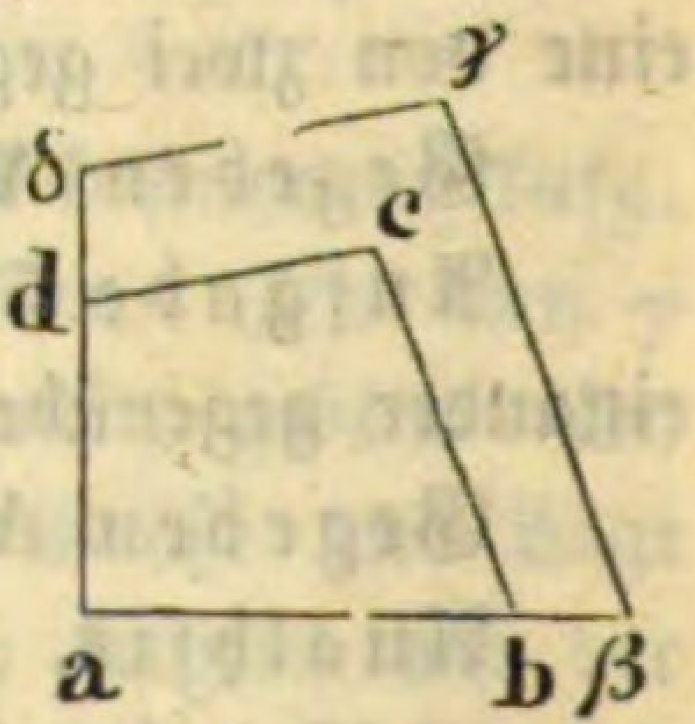
Gegeben ∟a, ∟b, ∟c, A und **B**.

Analysis. Durch A, ∟a und **B**, ist die Lage der Punkte d und b bestimmt, und durch ∟b die Seite **C** der Lage nach. Wird nun an irgend einem Punkt dieser Seite ∟c angesetzt, und mit derselben durch den gegebenen Punkt d eine Parallele gezogen: so schneidet diese die **C** in dem Punkte c des Vierecks.

Aufgabe 61. Von einem Viereck sind drei Winkel gegeben, und zwei neben einander liegende Seiten, die von diesen Winkeln nicht eingeschlossen werden; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben ∟b, ∟c, ∟d, A und **B**.

Auflösung. Nimm ∟β = ∟b; an irgend einem Punkt γ des einen Schenkels setze ∟$\gamma\delta$ = ∟c an; und an einen Punkt δ der $\gamma\delta$ setze ∟δ = ∟d, und verlängere die δ**a** und **a**β, bis sie sich in **a** schneiden. Wird nun genommen **ad** = A und **ab** gleich **B**, und zieht man, durch die hierdurch bestimmten Punkte d und b, die Linien **dc** und **bc** parallel den Linien $\delta\gamma$ und $\beta\gamma$: so schneiden sich diese Parallelen in **c** so, daß **abcd** das verlangte Viereck wird.



Aufgabe 62. Es sind drei Winkel eines Vierecks gegeben, und zwei einander gegenüber liegende Seiten desselben; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben ∟b, ∟c, ∟d, A und **C**.

Auflösung. Ziehe **cb** = **C** (Fig. Aufg. 58.) und setze an den Endpunkten derselben die Winkel **c** und **b** an. An **cm** setze in irgend einem Punkt m den ∟**cmn** = ∟d und nimm **mn** = A, und ziehe durch den Endpunkt dieser Linie die **nl** parallel der **mc**: so schneidet diese den zweiten Schenkel vom ∟b in **a**, so daß, wenn man nun **ad** parallel **mn** zieht, **abcd** das verlangte Viereck wird.

Anmerkung. Da bei einem jeden Viereck $a + b + c + d = 4\,R$: so ist immer der 4te Winkel ebenfalls gegeben, wenn drei Winkel gegeben sind; und hierdurch lassen sich die letzteren Aufgaben auch noch auf eine andere Art lösen.

Aufgabe 63. Von einem Viereck sind zwei neben einander liegende Seiten gegeben, der von denselben eingeschlossene Winkel und der diesem gegenüber liegende; und man weiß, „daß die beiden übrigen Seiten gleich groß sind"; es soll das Viereck beschrieben werden.

Gegeben A, B $\angle$ a, $\angle$ c; und es ist C = D.

Analysis. Durch A, B und $\angle$ a ist in dem allgemeinen Schema **bd** gegeben; und wegen C = D ist Δ **bcd** gleichschenklig; und man kennt die Grundlinie **cd**, und den ihr gegenüber liegenden Winkel **c**; es kann dasselbe also beschrieben werden. (Aufgabe 7.)

Aufgabe 64. Von einem Viereck sind zwei neben einander liegende Seiten gegeben, und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen einer durch die gegebenen Seiten eingeschlossen wird; und man weiß, „daß die beiden übrigen Seiten gleich groß sind". Es soll das Viereck beschrieben werden.

Gegeben A, B, $\angle$ a, $\angle$ b; und es ist C = D.

Aufgabe 65. Es soll ein Viereck beschrieben werden, von welchem zwei neben einander liegende Seiten gegeben sind; und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen keiner durch die gegebenen Seiten eingeschlossen wird; und in welchem die beiden übrigen Seiten gleich groß seyn sollen.

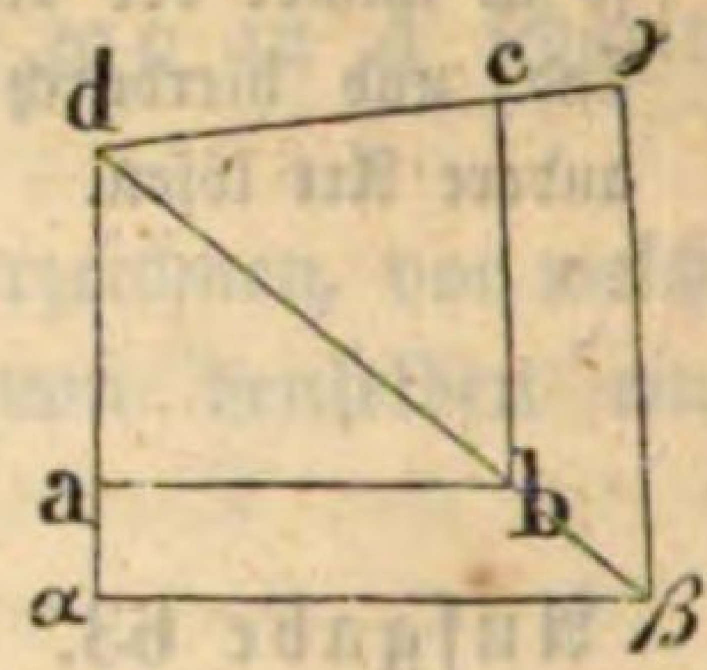
Gegeben A, B, $\angle$ b, $\angle$ c; und es ist C = D.

Analysis. Da C = D seyn soll, so ist in dem Schema Δ **bcd** gleichschenklig. Da nun gegeben ist $\angle$ c, so ist $\angle$ **cbd** ebenfalls gegeben; aber auch $\angle$ **cba** = $\angle$ b ist gegeben, folglich ist auch $\angle$ **dba** gegeben; aber auch A und B sind gegeben, also kann Δ **bad** beschrieben werden. (Aufg. 4.) Folglich ist **bd** der Größe nach gegeben, und auch $\angle$ **cbd**; man kann also das gleichschenklige Dreieck **bcd** ebenfalls beschreiben. (Aufg. 6.)

Aufgabe 66. Von einem Viereck ist Eine Seite gegeben und drei Winkel; und man weiß, „daß zwei der übrigen Seiten gleich groß sind"; es soll dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben A, $\angle$ b, $\angle$ c, $\angle$ d; und es ist C = D.

Auflösung. Verzeichne $\angle\ \gamma =$ $\angle$ c, nimm $\gamma\beta = \gamma$d, setze an β, $\angle\ \gamma\beta\alpha$ = $\angle$ b, und an d, $\angle\ \gamma$dα = d; auf dα schneide da = A ab, ziehe durch a die ab der $\alpha\beta$ parallel, und durch b, wo dieselbe die Diagonale dβ schneidet, die bc parallel bγ: so ist abcd das verlangte Viereck.



Beweis. Da in $\alpha\beta\gamma$d die gegebenen Winkel vorkommen, und ab parallel $\alpha\beta$, bc parallel $\beta\gamma$ ist: so kommen diese Winkel auch vor in abcd, wo zugleich die eine Seite da = A ist.

Da ferner γd = $\gamma\beta$, so ist $\angle\ \gamma\beta$d = $\angle\ \gamma$dβ
aber $\angle\ \gamma\beta$d = $\angle$ cbd (29.)

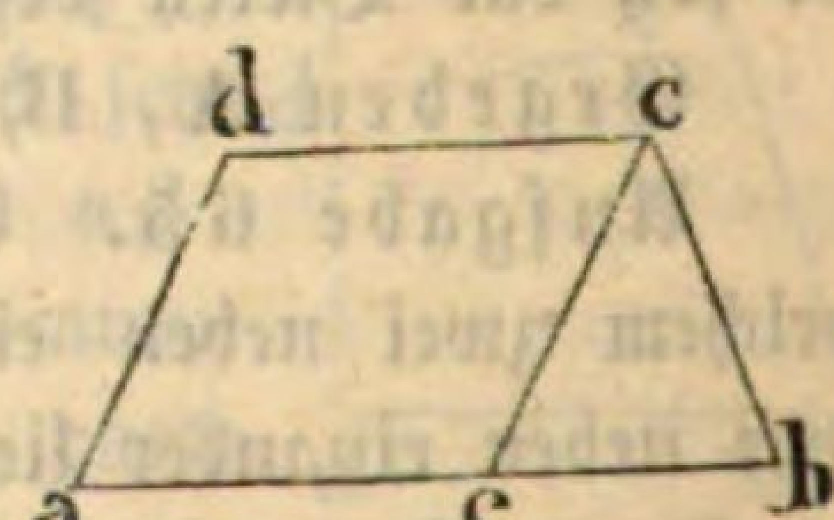
es ist also auch $\angle\ \gamma$dβ = $\angle$ cbd

und daher cb = cd; das Viereck abcd hat also auch zwei gleiche Seiten.

Aufgabe 67. Die vier Seiten eines Paralleltrapezes (also eines Vierecks, in welchem zwei Seiten parallel laufen) sind gegeben; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben A, B, C, D; und es ist B parallel D.

Analysis. Es sey abcd das Viereck, man ziehe ce parallel da. Da nun ab parallel cd (p. h.), so ist aecd ein Parallelogramm, also ae = cd. Nun ist cd gegeben, also auch ae; aber auch ab ist gegeben, folglich auch eb. Außerdem ist auch gegeben cb und ce = da; es sind also alle drei Seiten des Dreiecks bce gegeben, durch welches das Paralleltrapez bestimmt ist.



Aufgabe 68. Von einem Paralleltrapez sind drei Seiten und ein Winkel gegeben; man soll dasselbe verzeichnen.

Aufgabe 69. Von einem Paralleltrapez sind die beiden parallelen Seiten gegeben, und die beiden, an der einen dieser Seiten anliegenden Winkel; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben ab, cd, $\angle$ a und $\angle$ b.

Auflösung. Ziehe ab, setze an den Endpunkten derselben die Winkel a und b an, nimm ae = cd, und ziehe durch e die ec der ad parallel; und durch den Punkt c, wo dieselbe die bc schneidet, ziehe cd parallel ab: so ist abcd das verlangte Viereck.

Aufgabe 70. Von einem Paralleltrapez sind zwei neben einander liegende Seiten gegeben, und die beiden, an der Grundlinie anliegenden Winkel; man soll die Figur verzeichnen.

Gegeben ab, bc, ∟a und ∟b.

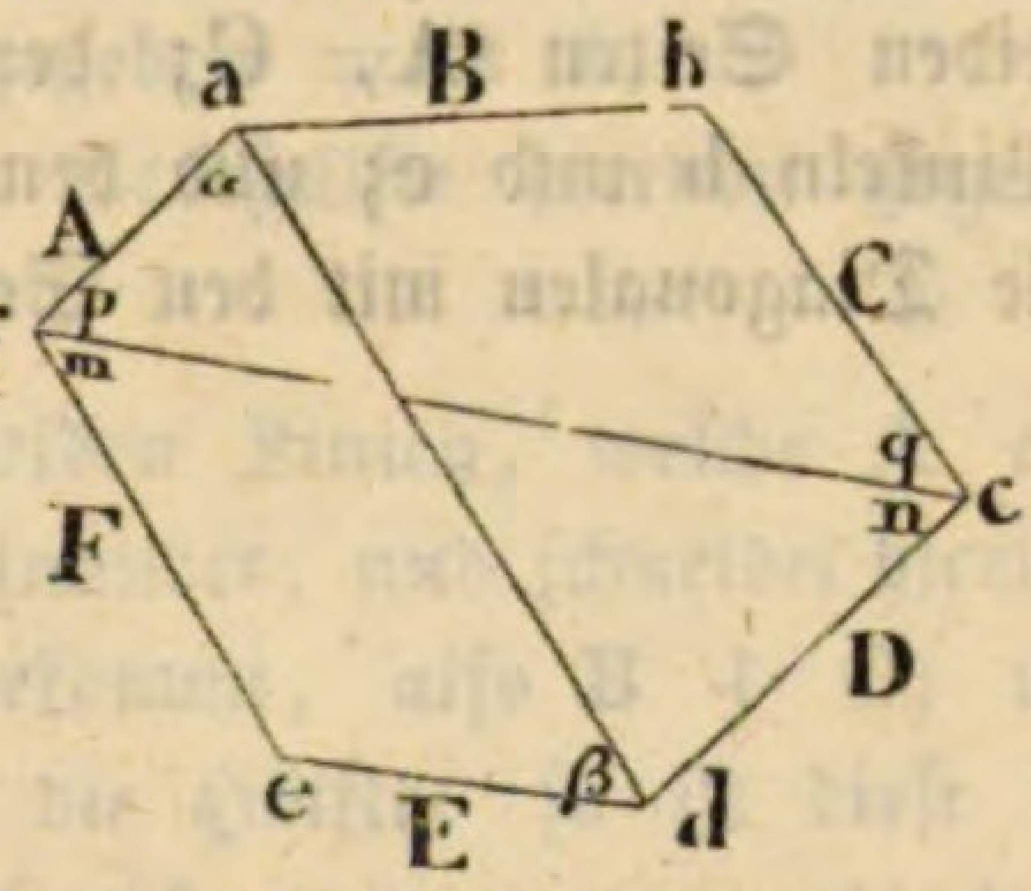
---

§. 6.

Einige Anwendungen der Aufgaben §. 5.

Aufgabe 71. Von dem Sechseck abcdef sind die Seiten A, B, C, D und E, die beiden neben einander liegenden Winkel a und b, und die Winkel m und n (welche die Diagonale cf mit den anliegenden Seiten D und F bildet) gegeben; es soll die Figur verzeichnet werden.

Auflösung. Aus A, B, C, ∟a und ∟b kann das Viereck abcf beschrieben werden; und hierauf aus den Seiten cf, D und E, und den Winkeln m und n das Viereck cdef.



Aufgabe 72. Man kennt von dem Sechseck abcdef die Seiten A, B, C, D, E, die Winkel b und e, und die Winkel p und m (welche die Diagonale cf mit den beiden neben einander liegenden Seiten A und F bildet); es soll die Figur entworfen werden.

Auflösung. Aus A, B, C, ∟b und ∟p kann das Viereck abcf beschrieben werden (Aufg. 57.); und aus den Seiten cf, D, E, und den Winkeln e und m, kann man nun auch das Viereck cdef beschreiben. (Aufg. 58.)

Aufgabe 73. Von dem Sechseck sind gegeben die Seiten A, B, C und E, die Winkel m, p und q der Diagonale cf, und die Winkel α und β der Diagonale ad; es soll die Figur aus diesen Stücken construirt werden.

Auflösung. Aus A, E, ∟α, ∟β und ∟(p + m) = ∟f kann das Viereck adef beschrieben werden (Aufg. 62.); und aus A, B, C, ∟p und ∟q kann man das Viereck abcd beschreiben (Aufg. 58.); und durch beide Vierecke, welche die Seite A gemein haben, ist das Sechseck bestimmt.

Aufgabe 74. Es sind von dem Sechseck gegeben die Seiten B, D, E, F, der Winkel b der Figur, die Winkel α und β der Diagonale ad, und die Winkel p und m der Diagonale cf; man soll die Figur hieraus verzeichnen.

Auflösung. Aus E, F, $\llcorner\alpha$, $\llcorner\beta$ und $\llcorner(p + m) = \llcorner f$ kann das Viereck adef beschrieben werden (Aufg. 61.), wodurch $\llcorner e$ gefunden wird. Aus D, E, F, $\llcorner e$ und $\llcorner m$, kann man nun auch das Viereck cdef beschreiben. (56.) Endlich kann nun aus af = A, B, fc $\llcorner p$ und $\llcorner b$, auch das Viereck abcf verzeichnet werden (Aufg. 57.), wodurch das Sechseck bestimmt ist.

Aufgabe 75. Man soll das Sechseck verzeichnen aus den sechs Seiten A, B, C, D, E, F, dem Winkel d der Figur, und aus den Winkeln α und β der Diagonale ad.

Aufgabe 76. Das Sechseck soll beschrieben werden aus den beiden Seiten A, C; den beiden einander gegenüber liegenden Winkeln b und e; und den Winkeln α, p, q, m und n, welche die Diagonalen mit den Seiten der Figur bilden.

---

§. 7.

Einfache Aufgaben von dem Dreieck, wenn Summen oder Differenzen der Seiten oder Winkel gegeben sind.

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks mit „A, B und C" bezeichnet werden: so bedeutet A + B „eine Linie, die so groß ist, als die beiden Seiten A und B des Dreiecks zusammen genommen"; und zwar ist A + B die Summe der beiden Seiten, die den Winkel c einschließen. Eben so bedeutet A + B + C „eine Linie, die so groß ist, wie alle drei Seiten des Dreiecks zusammen"; und es ist daher A + B + C der Umfang des ganzen Dreiecks. A — B bedeutet eine Linie, welche angiebt, „um wie Viel die Seite A des Dreiecks größer ist, als die Seite B desselben; es ist also A — B die Differenz dieser beiden Seiten. Der Ausdruck A + B — C bedeutet „eine Linie, welche der Differenz gleich ist, die erhalten wird, wenn man von der Summe der beiden Seiten A und B die dritte Seite C abzieht". In gleicher Art ist a + b „ein Winkel, der den beiden Winkeln a und b zusammen gleich ist";

und a — b ist „der Winkel, welcher angiebt, um wie viel ∠ a größer ist, als ∠ b“.

Aufgabe 77. Von einem Dreieck kennt man die Summe je zweier Seiten; also die Summe der ersten und zweiten Seite, die Summe der ersten und dritten, und die Summe der zweiten und dritten Seite. Es sollen die drei Seiten des Dreiecks gefunden werden.

Gegeben A + B, A + C, und B + C.

Gesucht A, B, C.

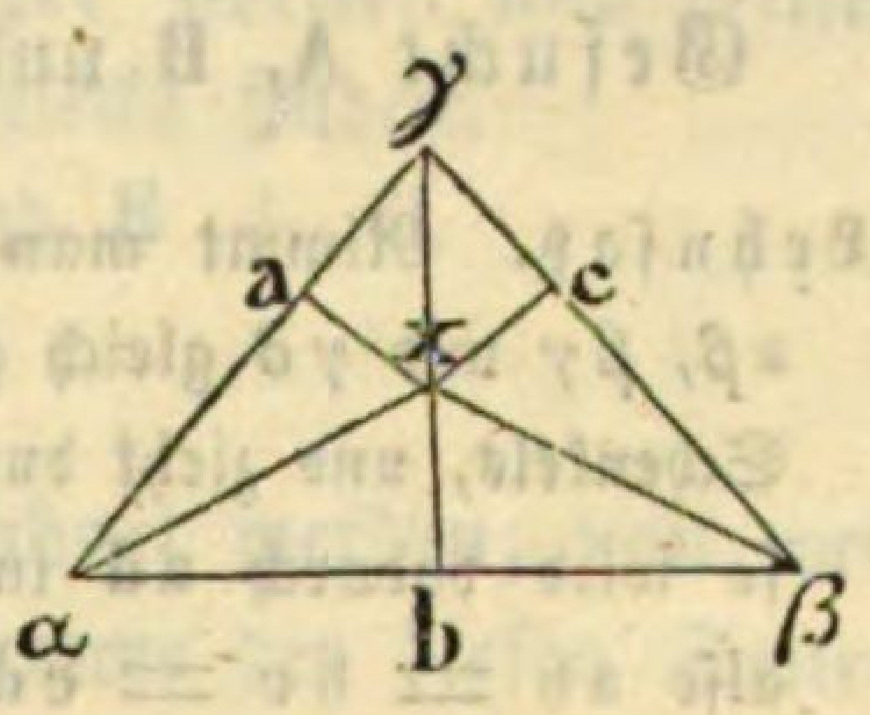
Analysis. Da eine Linie gegeben ist = A + B
und auch eine Linie = A + C

so ist auch ihre Summe gegeben = 2 A + B + C.
Nun ist auch eine Linie gegeben = B + C

folglich ist auch die Differenz gegeben = 2 A.

Da sonach 2 A gegeben, so ist auch die Hälfte hiervon gegeben = A.

Auflösung. Setzt man die beiden Linien, welche A enthalten, also A + B und A + C, an einander; und schneidet hiervon die Linie ab, in welcher A nicht vorkömmt, also B + C; und nimmt von Dem, was übrig bleibt, die Hälfte: so ist diese der Seite A des Dreiecks gleich. Eben so ist, wenn man A + B und B + C an einander setzt, davon A + C abschneidet, und von dem Reste die Hälfte nimmt, Diese der Seite B gleich.



Zusatz. Diese Aufgabe läßt sich auch auf folgende Art lösen: Man beschreibe aus den gegebenen drei Summen das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (so daß $\alpha\beta$ = A + B, $\alpha\gamma$ = A + C, und $\beta\gamma$ = B + C), halbire die Winkel α und β durch die Linien αx und βx; von dem Punkte x, in welchem diese Halbirungslinien sich schneiden, ziehe man die Normalen xa, xb und xc, auf die drei Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$: so ist αa = αb = A, βb = βc = B, und γc = γa = C.

Aufgabe 78. Von einem Dreieck ist gegeben die Summe zweier Seiten und ihre Differenz, und außerdem ist noch die dritte Seite gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A + B, A — B, und C.

Aufgabe 79. Man kennt von einem Dreieck die Summe der ersten und zweiten Seite, die Summe der ersten und dritten, und außerdem ist die dritte Seite selbst gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A + B, A + C, und C.

Aufgabe 80. Von einem Dreieck ist gegeben die Summe der ersten und zweiten Seite, die Differenz der zweiten und dritten Seite, und außerdem ist die zweite Seite selbst gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A + B, B — C und B.

Aufgabe 81. Man kennt von einem Dreieck die Differenz der ersten und zweiten Seite, die Differenz der zweiten und dritten, und es ist außerdem die dritte Seite selbst gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A — B, B — C, und C.

Aufgabe 82. Von einem Dreieck kennt man die Differenz der ersten und zweiten Seite, und die Differenz der ersten und dritten Seite, und es ist auch die Summe der zweiten und dritten Seite gegeben; man soll die Seiten des Dreiecks finden.

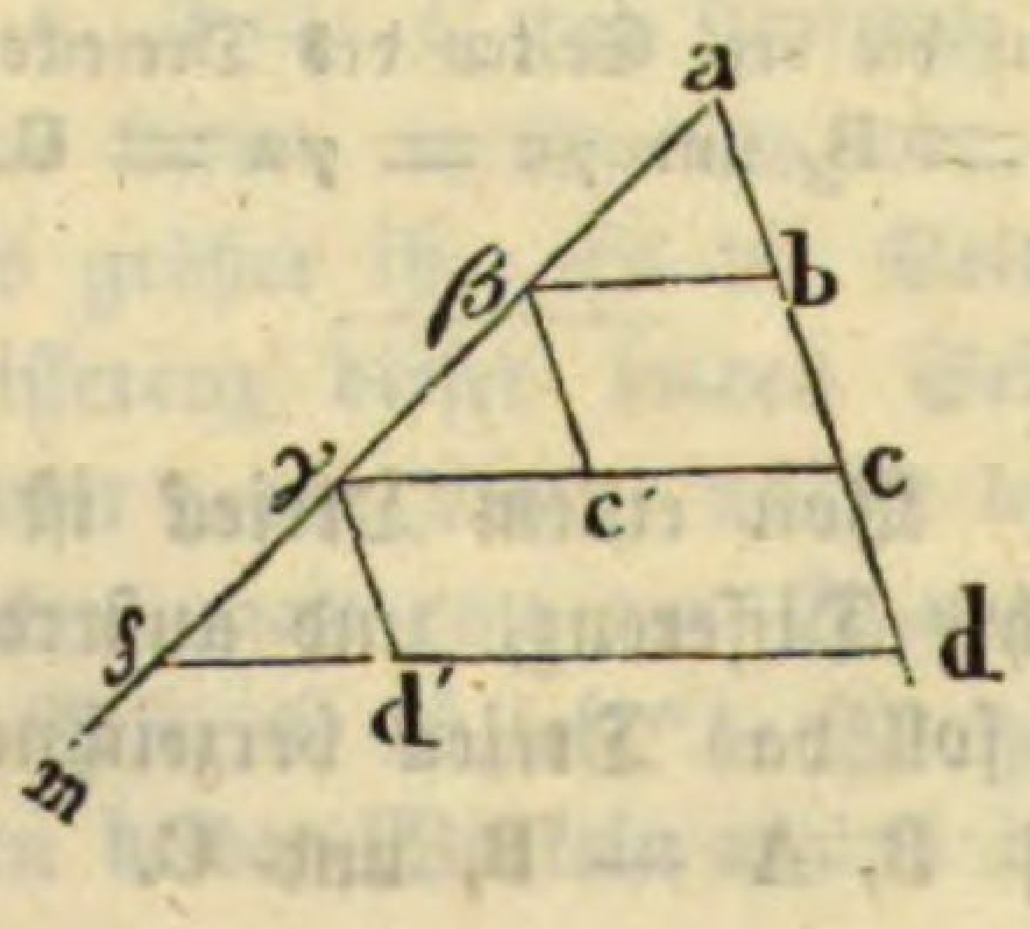
Gegeben A — B, A — C, und B + C.

Aufgabe 83. Von einem Dreieck kennt man die Differenzen, welche erhalten werden, wenn man von der Summe je zweier Seiten immer die dritte Seite abschneidet; es sollen hieraus die Seiten des Dreiecks gefunden werden.

Gegeben A + B — C, A + C — B, und B + C — A.

Gesucht A, B und C.

Lehnsatz. Nimmt man auf dem Schenkel am des Winkels a die Stücke $a\beta$, $\beta\gamma$ und $\gamma\delta$ gleich groß; verbindet δ mit dem Endpunkte d des zweiten Schenkels, und zieht durch γ die γc, und durch β die βb, der δd parallel: so wird dadurch ad in b und c in drei gleiche Theile getheilt; es ist also ab = bc = cd.



Beweis. Ziehe durch β die $\beta c'$, und durch γ die $\gamma d'$, der ad parallel: so ist

$a\beta = \beta\gamma$	$a\beta = \gamma\delta$ (p. h.)
$\angle a = \angle \gamma\beta c'$	$\angle a = \angle \delta\gamma d'$ (29.)
$\angle a\beta b = \angle \beta\gamma c'$	$\angle a\beta b = \angle \gamma\delta d'$ "
daher $\triangle a\beta b \cong \triangle \beta\gamma c'$	$\triangle a\beta b \cong \triangle \gamma\delta d'$ (26.)
Folglich ist $ab = \beta c'$	$ab = \gamma d'$
da nun $\beta c' = bc$	$\gamma d' = cd$ (34.)
so ist $ab = bc$.	und $ab = cd$.

Zusatz. Es ist hiernach möglich, „jede gegebene begrenzte gerade Linie in drei gleiche Theile zu theilen". Auch in jede andere Anzahl gleicher Theile läßt sich, durch ein ähnliches Verfahren, eine gegebene begrenzte gerade Linie theilen.

Aufgabe 84. Von einem Dreieck kennt man den Umfang, die Differenz der ersten und zweiten, und die Differenz der ersten und dritten Seite; es sollen die Seiten des Dreiecks gefunden werden.

Gegeben $A + B + C$, $A - B$ und $A - C$.

Gesucht A, B und C.

Aufgabe 85. Man kennt von einem Dreieck die Differenz, welche erhalten wird, wenn man von der Summe der ersten und zweiten Seite die dritte Seite abschneidet; und es ist die Differenz der ersten und zweiten, und die Summe der zweiten und dritten Seite gegeben; man soll die Seiten des Dreiecks finden.

Gegeben $A + B - C$, $A - B$ und $B + C$.

Gesucht A, B und C.

Aufgabe 86. Ein Dreieck soll verzeichnet werden, von welchem zwei Seiten gegeben sind, und die Summe der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Gegeben A, B und $a + b$.

Analysis. Es ist gegeben $a + b$ (p. h.)

aber auch $a + b + c = 2R$. (32.)

Folglich ist $\angle c$ gegeben, aber auch A und B sind gegeben.

Folglich sind von dem Dreieck gegeben zwei Seiten, und der von denselben eingeschlossene Winkel, woraus das Dreieck construirt werden kann (Aufg. 1).

Aufgabe 87. Von einem Dreieck kennt man die Summe des ersten und zweiten Winkels, die Summe des zweiten und dritten, und eine Seite; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben $a + b$, $b + c$, und A.

Analysis. Da $a + b$ gegeben ist, so ist auch c gegeben (Aufg. 86.); aber auch $b + c$ ist gegeben, folglich auch b; also kennt man zwei Winkel c und b, und eine Seite A.

Aufgabe 88. Die Summe des ersten und zweiten Winkels eines Dreiecks ist gegeben, die Differenz des zweiten und dritten, und eine Seite; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben $a + b$, $b - c$, und A.

Aufgabe 89. Von einem Dreieck kennt man eine Seite, die Summe zweier Winkel, und ihre Differenz; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben $a + b$, $a - b$, und A.

Aufgabe 90. Man kennt von einem Dreieck die Differenz, welche übrig bleibt, wenn von der Summe zweier Winkel der dritte abgezogen wird; die Summe des zweiten und dritten Winkels, und eine Seite. Es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben $a + b - c$, $b + c$, und A.

Aufgabe 91. Von einem Dreieck kennt man Eine Seite; die Differenz, welche übrig bleibt, wenn von der Summe des ersten und zweiten Winkels der dritte weggenommen wird; und die Differenz, welche bleibt, wenn man von der Summe des ersten und dritten Winkels den zweiten wegnimmt. Man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A, $a + b - c$, und $a + c - b$.

Aufgabe 92. Man kennt von einem Dreieck Eine Seite, den derselben gegenüber liegenden Winkel, und die Differenz der beiden übrigen Winkel; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben A, ∟ a, und $b - c$.

Analysis. Es ist a gegeben, aber auch $a + b + c = 2\,\mathbf{R}$; folglich ist auch gegeben $b + c$. Da nun auch $b - c$ gegeben ist, so können die Winkel b und c gefunden werden.

§. 8.

Schwierigere Aufgaben von dem Dreieck, wenn Summen oder Differenzen der Seiten gegeben sind.

Aufgabe 93. Es ist von einem Dreieck gegeben die eine Seite, ein an derselben anliegender Winkel, und die Summe der beiden übrigen Seiten; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C, ∟ b, und A + B.

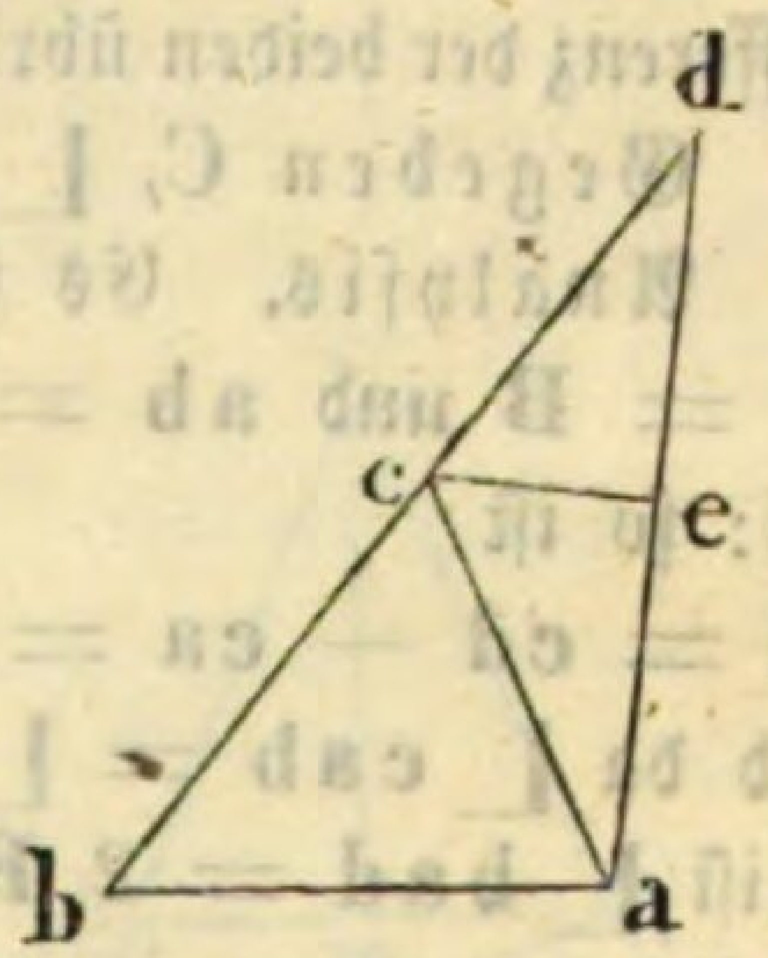
Analysis. Es sey **abc** das verlangte Dreieck **bc** = A, **ca** = B und **ab** = C. Verlängere **bc**, mache **cd** = **ca** und ziehe **da**: so ist

$$bd = bc + cd = bc + ca = A + B \text{ gegeben;}$$

aber auch **ba** = C und ∟ b sind gegeben.

Also kennt man von dem Dreieck **dba** zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel. Folglich ist △ **dba** gegeben (Aufg. 1.), und daher auch **ad** und ∟ **d**. Da nun **ca** = **cd**, so ist △ **acd** gleichschenklig, und man kennt von demselben die Grundlinie **ad** und den anliegenden Winkel **d**. Folglich ist auch △ **acd** gegeben (Aufg. 6). Durch △ **abd** ist gegeben die Lage der Punkte **a** und **b**, und durch △ **acd** die Lage von **c**. Folglich ist △ **abc** gegeben.

Auflösung. Nimm **ab** = C, setze an diese Linie ∟ **abc** = ∟ b, nimm **bd** = A + B, und ziehe **da**. Diese Linie halbire in **e**, und errichte in diesem Punkte auf derselben die Normale **ec**, welche die **ad** in **c** schneidet, und ziehe **ca**: so ist △ **abc** das verlangte Dreieck.



Beweis. Es ist **ae** = **ed** (p. c.)

∟ **aec** = ∟ **dec** „

ec = **ec**

daher △ **aec** ≅ △ **dec**.

Folglich ist **ca** = **cd**, also auch **bc** + **ca** = **bc** + **cd** = **bd**; und weil **bd** = A + B, so ist auch **bc** + **ca** = A + B. Ueberdies ist **ba** = C und ∟ **abc** = ∟ b.

Aufgabe 94. Von einem Dreieck ist eine Seite gegeben, der ihr gegenüber liegende Winkel, und die Summe der beiden übrigen Seiten; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben C, $\angle$ c, und A + B.

Analysis. Es sey **abc** der obigen Figur das Dreieck, **bc** = A, **ac** = B und **ab** = C; verlängere **bc**, mache **cd** = **ca** und ziehe **ad**: so ist $\triangle$ **acd** gleichschenklig, und daher $\angle$ d = $\angle$ **cad**.

Nun ist $\angle$ **bca** = $\angle$ d + $\angle$ **cad** (32.)

also ist auch $\angle$ **bca** = 2 . $\angle$ d.

Da nun $\angle$ **bca** = $\angle$ c gegeben ist, so ist auch $\angle$ d = $\frac{1}{2}$ c gegeben. Aber auch **bd** = A' + B und **bc** = C sind gegeben. Folglich ist $\triangle$ **abd** gegeben (Aufg. 4.), und dadurch auch $\triangle$ **acd**, wie bei Aufg. 93.

Auflösung. Aus **bd** = A + B, **bc** = C und $\angle$ d = $\frac{1}{2}$ c beschreibe $\triangle$ **abd** (Aufg. 4.), halbire **ad** in e, errichte in e auf **ad** die Normale **ec**, welche die **ad** in c schneidet, und ziehe **ca**: so ist $\triangle$ **abc** das verlangte Dreieck.

Determination. Es darf C nicht kleiner seyn, als die Normale von dem Punkte b auf den Schenkel **da** des Winkels d; und ist C größer als diese Normale, so entsprechen zwei verschiedene Dreiecke den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 95. Es ist von einem Dreieck eine Seite gegeben, der größere der beiden an derselben anliegenden Winkel, und die Differenz der beiden übrigen Seiten; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C, $\angle$ a, und A — B.

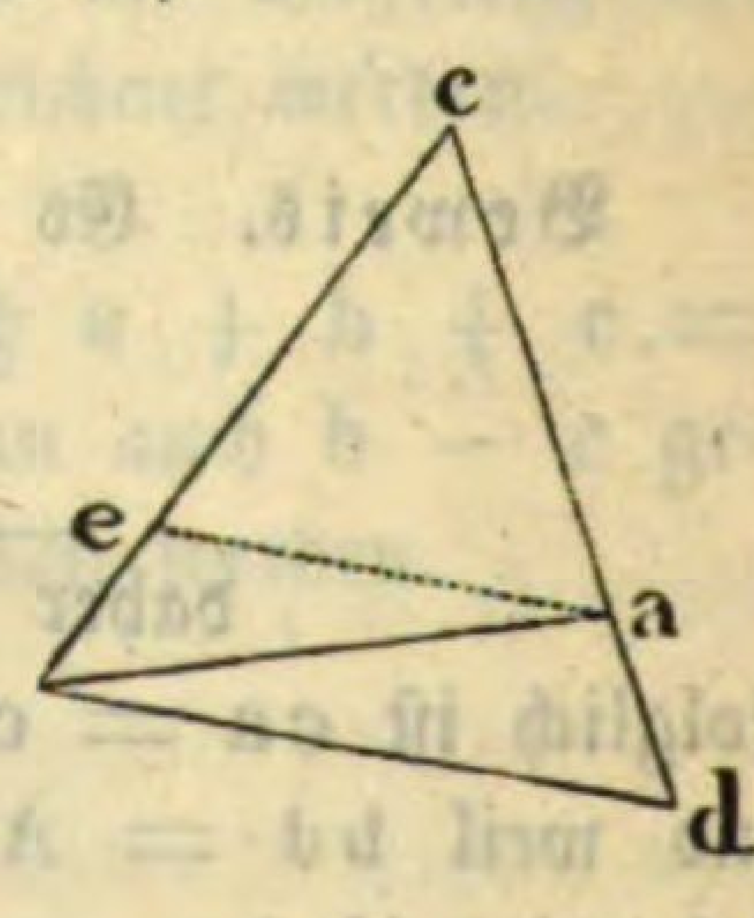
Analysis. Es sey $\triangle$ **abc** das verlangte Dreieck, **cb** = A, **ca** = B und **ab** = C; verlängere **ca** bis **cd** = **cb**, und ziehe **bd**: so ist

ad = **cd** — **ca** = **cb** — **ca** = A — B gegeben.

Und da $\angle$ **cab** = $\angle$ a, und $\angle$ **cab** + $\angle$ **bad** = 2 R (13.)

so ist $\angle$ **bad** = 2 R — $\angle$ a ebenfalls gegeben;

folglich kennt man vom $\triangle$ **bad** zwei Seiten, und den von denselben eingeschlossenen Winkel, und es kann daher $\triangle$ **bad** construirt werden (Aufg. 1.).



Da **cb** = **cd**, so ist $\triangle$ **cbd** gleichschenklig; und da **bd** und $\angle$ d durch $\triangle$ **abd** gegeben sind, so kann auch $\triangle$ **cbd** construirt werden (Aufg. 6.); und hierdurch ist auch $\triangle$ **abc** bestimmt.

Aufgabe 96. Von einem Dreieck ist eine Seite, der kleinere der beiden an derselben anliegenden Winkel, und die Differenz der beiden übrigen Seiten gegeben; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben C, $\angle$ b, und A — B.

Analysis. Es sey Δ abc das verlangte Dreieck, cb = A, ca = B, und ab = C. Auf cb nehme man ce = ca, und ziehe ea, so ist Δ cea gleichschenklig, und

eb = cb — ce = cb — ca = A — B gegeben.

Aber auch $\angle$ eba = $\angle$ b und ba = C sind gegeben; also ist das Dreieck eba gegeben, und daher auch ae, und der Außenwinkel aec vom Δ aeb. Man kennt also von dem gleichschenkligen Dreieck aec die Grundlinie ae, und den an derselben anliegenden Winkel aec; und folglich ist Δ aec gegeben, wodurch Δ abc ebenfalls gegeben ist.

Aufgabe 97. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, der ihr gegenüber liegende Winkel, und die Differenz der beiden übrigen Seiten; man soll das Dreieck beschreiben.

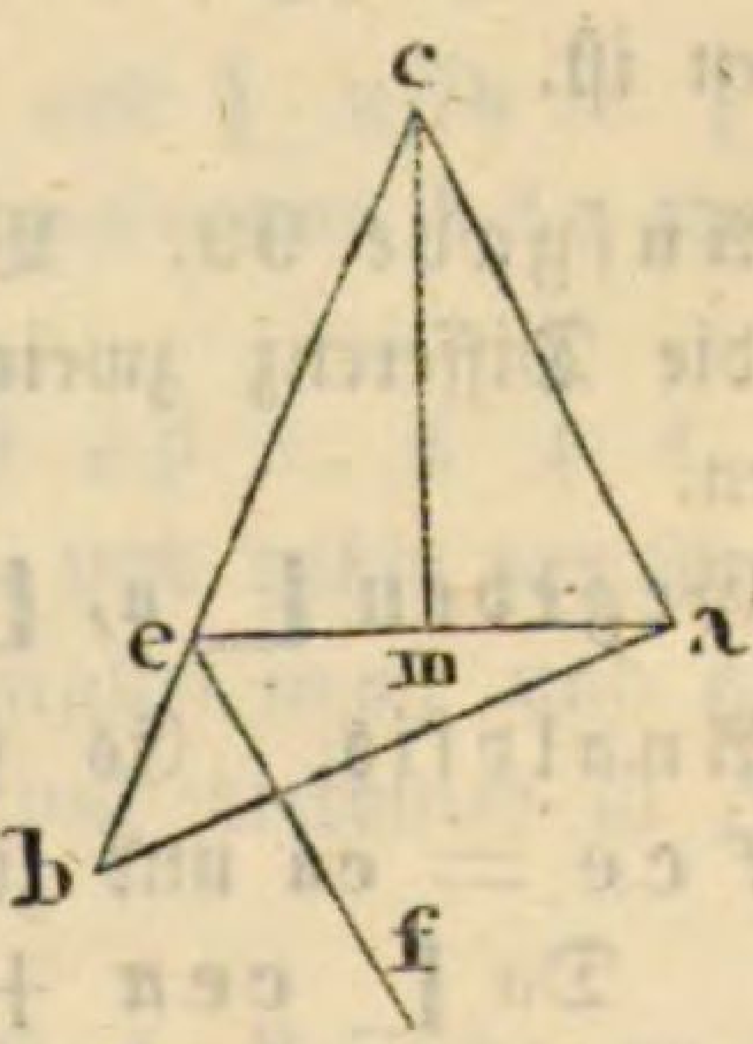
Gegeben C, $\angle$ c und A — B.

Analysis. Es sey Δ abc das verlangte Dreieck, cb = A, ca = B und ab = C; man nehme ce = ca, ziehe ae und durch e die ef der ca parallel: so ist

$\angle$ cea = $\angle$ cae (5.)
und $\angle$ cae = $\angle$ aef (29.)

daher $\angle$ cea = $\angle$ aef

und es wird $\angle$ cef durch ea halbirt.



Nun ist $\angle$ bef = $\angle$ c gegeben, also auch $\angle$ fec; und da dieser Winkel durch ea halbirt wird, so ist ea der Lage nach gegeben; aber eb = A — B ist der Größe und Lage nach gegeben, und ba = C der Größe nach. Folglich kennt man vom Δ aeb zwei Seiten eb und ba, und den der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel aeb; also kann Δ aeb construirt werden, und hierdurch ist ae und $\angle$ aec bestimmt. Also kennt man von dem gleichschenkligen Dreieck aec die Grundlinie ae und den anliegenden Winkel aec; es kann also auch dieses Dreieck beschrieben werden, wodurch Δ abc bestimmt ist.

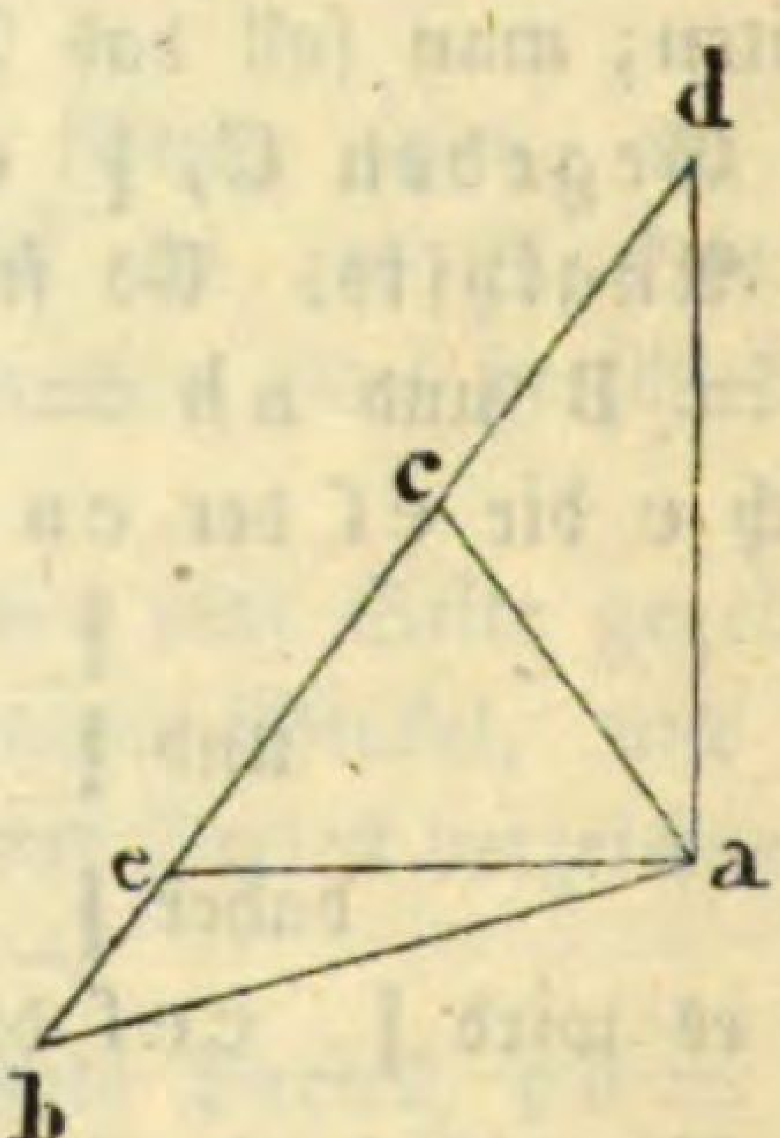
Auflösung. Ziehe eb $= A - B$, setze an diese Linie $\angle$ bef $= \angle$ c, verlängere be nach c und halbire $\angle$ fec durch ea. Aus b beschreibe mit ba $= C$ einen Kreis, der die ea in a schneidet, und ziehe ba. Die ea halbire in m, und errichte in diesem Punkte eine Normale, welche die verlängerte be in c schneidet. Wird nun c mit a verbunden, so ist $\triangle$ abc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 98. Von einem Dreieck sind zwei Winkel gegeben und die Summe zweier Seiten; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben $\angle$ a, $\angle$ b, und $A + B$.

Analysis. Es sey $\triangle$ abc das verlangte Dreieck; man verlängere bc, nehme cd $=$ ca und ziehe ad: so ist $\triangle$ adc gleichschenklig, daher $\angle$ cad $= \angle$ d. (5.)

Da nun $\angle$ acb $= \angle$ cad $+ \angle$ d, so ist $\angle$ d $= \frac{1}{2} \angle$ acb. Da zwei Winkel des Dreiecks abc gegeben sind, so ist auch der dritte Winkel gegeben; also ist $\angle$ acb $= \angle$ c gegeben, und daher auch $\angle$ d $= \frac{1}{2} \angle$ acb. Nun ist aber auch $\angle$ b gegeben, und bd $=$ bc $+$ cd $=$ bc $+$ ca $= A + B$; es ist also $\triangle$ adb gegeben (26.), und kann construirt werden (Aufg. 2). Hierdurch ist nun auch ad gegeben, und man kann also das gleichschenklige Dreieck acd ebenfalls construiren (Aufg. 6.), wodurch $\triangle$ abc gegeben ist.



Aufgabe 99. Von einem Dreieck kennt man zwei Winkel, und die Differenz zweier Seiten; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben $\angle$ a, $\angle$ b, und $A - B$.

Analysis. Es sey $\triangle$ acb das verlangte Dreieck; man nehme ce $=$ ca und ziehe ae, so ist $\angle$ cea $= \angle$ cae.

Da $\angle$ cea $+ \angle$ cae $+ \angle$ ace $= 2R$
so ist auch $2 . \angle$ cea $+ \angle$ ace $= 2R$
aber auch $\angle$ a $+ \angle$ b $+$ ace $= 2R$

daher $2 . \angle$ cea $= \angle$ a $+ \angle$ b gegeben.

Es ist also $\angle$ cea, und daher der Nebenwinkel aeb gegeben; aber auch eb $= A - B$ und $\angle$ b sind gegeben, folglich ist

$\triangle$ **aeb** gegeben. Und da man nun von dem gleichschenkligen Dreieck **aec** die Grundlinie **ae** und den an derselben anliegenden Winkel **aec** kennt, so ist auch $\triangle$ **aec**, und hierdurch das gesuchte $\triangle$ **abc** gegeben.

Aufgabe 100. Von einem Dreieck kennt man den Umfang und zwei Winkel; es soll dasselbe beschrieben werden.

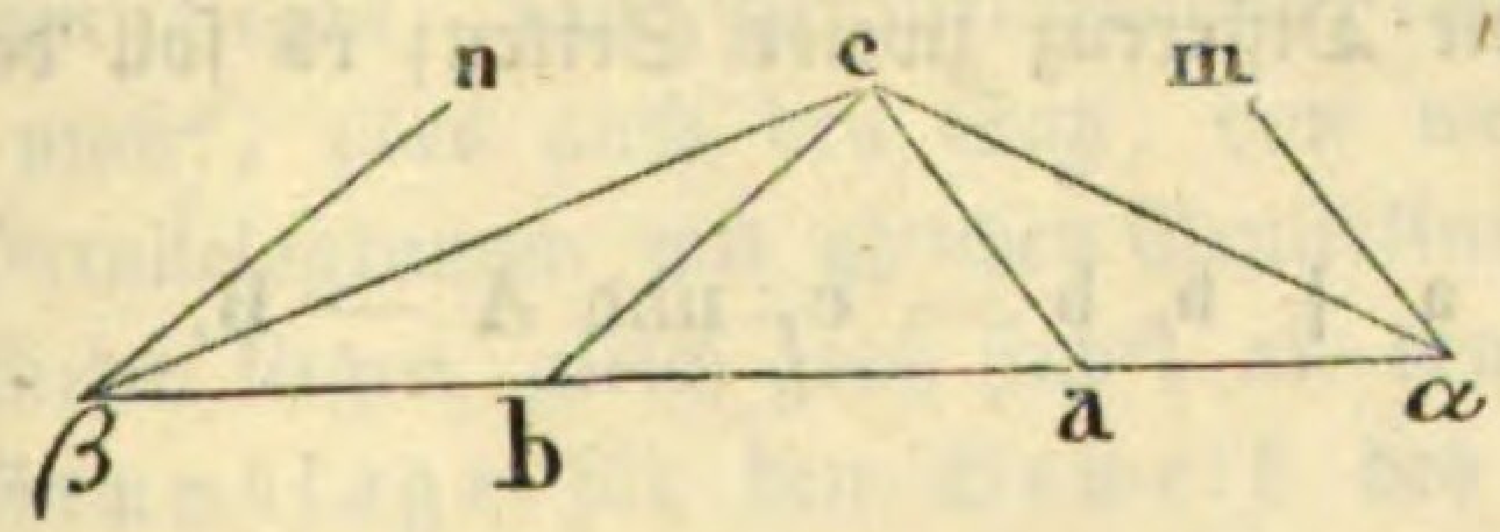
Gegeben $A + B + C$, $\angle$ a und $\angle$ b.

Analysis. Es sey **abc** das gesuchte Dreieck; verlängere **ab** zu beiden Seiten, nimm $a\alpha = ac$, $b\beta = bc$; und ziehe $c\alpha$ und $c\beta$, durch α die αm der **ac**, und durch β die βn der **bc** parallel.

Da $a\alpha = ac$
so ist $\angle\, a\alpha c = \angle\, ac\alpha$ (5.)

und daher $\angle\, cab = 2 \,.\, \angle\, a\alpha c$. (32.)
Da nun $\angle\, cab = \angle\, m\alpha a$

so ist auch $\angle\, m\alpha a = 2 \,.\, a\alpha c$.
Folglich wird $\angle\, m\alpha a$ durch αc halbirt;
und aus gleichen Gründen wird $\angle\, n\beta b$ durch βc ebenfalls halbirt.



Da nun $\angle\, m\alpha a = \angle\, cab = \angle\, a$, und $\angle\, n\beta b = \angle\, cba = \angle\, b$ gegeben, so sind auch die Winkel $a\alpha c$ und $b\beta c$ ebenfalls gegeben.

Da $b\beta = bc$ und $a\alpha = ac$, so ist $\alpha\beta = A + C + B$ ebenfalls gegeben; also ist $\triangle\, \alpha\beta c$ gegeben, und daher der Punkt **c** der Lage nach gegeben; folglich sind **ca** parallel $m\alpha$, und **cb** parallel $n\beta$, ebenfalls der Lage nach gegeben, und hierdurch ist $\triangle$ **abc** bestimmt.

Auflösung. Nimm $\beta\alpha = A + C + B$; setze an α den $\angle\, \beta\alpha m = \angle\, a$, und an β den $\angle\, \alpha\beta n = \angle\, b$; halbire diese Winkel durch αc und βc, und ziehe durch **c**, wo die Halbirungslinien sich schneiden, die **ca** parallel $m\alpha$ und **cb** parallel $n\beta$: so ist $\triangle$ **abc** das Gesuchte.

Beweis. Es ist $\angle cab = \angle m\alpha\beta = \angle a$
und $\angle cba = \angle n\beta\alpha = \angle b$
Δabc hat also die gegebenen Winkel a und b.

Ferner ist $\angle a\alpha c = \angle c\alpha m$ (p. c.)
und $\angle ac\alpha = \angle c\alpha m$ (29.)

also $\angle a\alpha c = \angle ac\alpha$.

Folglich ist auch $ac = a\alpha$
und aus gleichen Gründen $bc = b\beta$.

Es ist also $bc + ba + ac = b\beta + ba + a\alpha = \beta\alpha = A + C + B$; das Δ abc hat also auch den gegebenen Umfang.

Aufgabe 101. Von einem Dreieck ist gegeben die Summe des ersten und zweiten, und die Differenz des zweiten und dritten Winkels, und die Summe zweier Seiten; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben $a + b$, $b - c$, und $A + B$.

Aufgabe 102. Man kennt von einem Dreieck die Summe des ersten und zweiten, und die Differenz des zweiten und dritten Winkels, und die Differenz zweier Seiten; es soll das Dreieck construirt werden.

Gegeben $a + b$, $b - c$, und $A - B$.

VII. Der Pythagoräische Lehrsatz.

1) Der Satz, durch welchen die merkwürdige Eigenschaft der rechtwinkligen Dreiecke ausgesprochen wird, „daß bei einem Solchen das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate beider Katheten gleich seyn muß", wird der **pythagoräische Lehrsatz** genannt, weil **Pythagoras** der Erfinder desselben seyn soll. Die Fabel, „daß derselbe den Göttern 100 Ochsen als Dankopfer für diese Erfindung gebracht habe", hat die Benennung, „**die Ochsenfigur**" veranlaßt, die man der dem 47sten Satze zugehörigen Figur beilegt. Außerdem wird dieser Satz, seiner Wichtigkeit wegen, auch wohl der **magister matheseos** genannt.

2) Bei dem Beweise dieses Satzes, wie ihn Euklid giebt (47), werden nach und nach folgende frühere Sätze benutzt:

a) der 46ste Satz bei der Construction der Quadrate über die drei Seiten des Dreiecks abc;

b) der 31ste Satz für das Ziehen der ah durch a parallel der cd;

c) der 14te Satz, um zu beweisen, „daß ba mit ag, und ca mit af in gerader Linie liegen muß";

d) der 4te Satz, durch welchen die Congruenz der beiden Dreiecke abe und βbc gefolgert wird; und

e) der 41ste Satz, um zu beweisen, „daß die Dreiecke abe und βbc die Hälften der Parallelogramme behk und βbaf sind".

Hieraus folgt nun, daß

$$\text{Prllgr. } behk = \square ab$$
$$\text{,, } cdhk = \square ac$$

$$\text{und daher } \underbrace{behk + cdhk} = \square ab + \square ac.$$
$$\text{Es ist also } \square bc = \square ab + \square ac.$$

Man kann hiernach den Satz, „daß, wenn ein Dreieck und ein Parallelogramm die Grundlinie gemein haben und zwischen denselben Parallelen liegen, das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks seyn muß", oder auch den Satz, von welchem dieser abhängt, „daß Parallelogramme mit gleichen Grundlinien, die zwischen denselben Parallelen liegen, gleich groß sind", als denjenigen ansehen, welcher die **Grundlage** für den **Beweis** des pythagoräischen Lehrsatzes bildet.

3) Es giebt wenig Lehrsätze in der Geometrie, für welche man so viel verschiedene Beweise hat, als für den pythagoräischen. Fast Jeder, der ein Lehrbuch der Geometrie schreibt, hält es für eine Ehrensache, „entweder einen neuen, oder doch einen weniger bekannten Beweis für diesen Satz zu geben". Eine Sammlung verschiedener Beweise dieses Satzes findet man in einer Dissertation von Stöber:

Dissertatio mathematica de theoremate pythagorico etc. Straßburg 1743.

und in einer Abhandlung von J. J. J. Hoffmann:

der pythagoräische Lehrsatz mit 32 theils bekannten und theils neuen Beweisen, Mainz 1819.

Von dieser Abhandlung ist 1821 eine neue, mit einigen neuen Beweisen vermehrte Auflage erschienen.

Ferner in einem Werkchen von Wolfgang Müller: Systematische Zusammenstellung der wichtigsten, bisher bekannten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes, Nürnberg 1819.

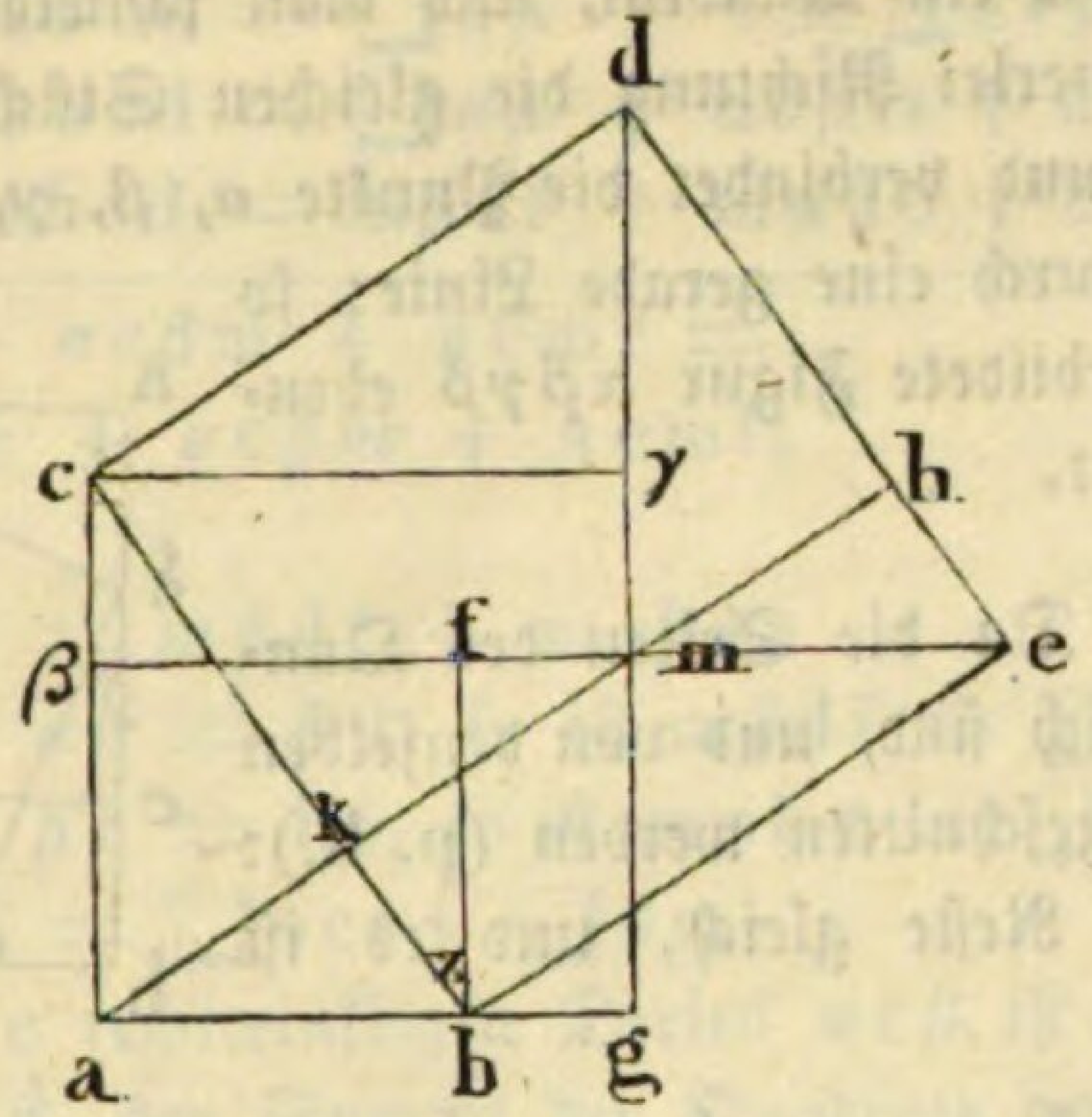
4) In der Abhandlung von Hoffmann wird darauf aufmerksam gemacht, „daß der Beweis, wie ihn Euklid giebt, auf acht verschiedene Arten geführt werden kann", wobei immer der 41ste oder auch der 36ste Satz die Grundlage bildet. Die Beweise unterscheiden sich dadurch von einander: daß die Figur für dieselben auf eben so viel verschiedene Arten entworfen werden kann. Das Wesentliche der Figur besteht bekanntlich darin: daß über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks Quadrate beschrieben sind, die im Satze 47 eine äußere Lage haben; so daß jedes dieser Quadrate außerhalb des Dreiecks liegt. Da nun aber diese Quadrate auch eine innere Lage haben können, so daß sie zum Theil mit dem Dreieck zusammen fallen, also nach der entgegengesetzten Richtung verzeichnet sind: so erhält man, wenn eins oder einige der Quadrate so verzeichnet werden, verschiedene Formen für die Figur, und für jede dieser Formen kann der Beweis auf eine eigene Art geführet werden.

Nimmt man die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks von verschiedener Größe, bezeichnet die größere derselben mit A, die kleinere mit a, und die Hypotenuse mit H: so sind folgende verschiedene Formen möglich.

1) Es hat □ H, □ A und □ a eine äußere Lage.
2) „ „ □ H und □ A eine äußere, und □ a eine innere Lage.
3) „ „ □ H „ □ a „ „ „ □ A „ „ „
4) „ „ □ A „ □ a „ „ „ □ H „ „ „
5) „ „ □ H eine äußere, □ A und □ a eine innere Lage.
6) „ „ □ A „ „ □ H „ □ a „ „ „
7) „ „ □ a „ „ □ H „ □ A „ „ „
8) „ „ □ H, □ A und □ a eine innere Lage.

Es ist eine sehr zweckmäßige Uebung, „diese verschiedenen Figuren zu entwerfen, und für jede besonders den Beweis des Lehrsatzes auszuarbeiten".

5) Zur Erläuterung folgt hier der Beweis für die in Nr. 5. angegebene Form der Figur.



Es sind die Quadrate der Katheten **ab** und **ac** in der inneren Lage verzeichnet, und das Quadrat der Hypotenuse **bc** in der äußeren Lage; **f** ist mit **e** durch **fe**, und γ mit **d** durch γ**d** verbunden.

Nun ist $\angle abc = R - x$
und auch $\angle fbe = R - x$

daher $\angle abc = \angle fbe$
aber $ab = fb$
und $bc = be$.

Folglich ist $\Delta abc \cong \Delta fbe$ (4.)
und da $\angle bac = R$, so ist auch $\angle bfe = R$
aber auch $\angle bf\beta = R$

also $\angle bfe + \angle bf\beta = 2\,R$;
und folglich ist βf mit **fe** in gerader Linie. (14.)

Aus gleichen Gründen ist auch $g\gamma$ mit γd in gerader Linie.

Hiernach ist $abf\beta = abem$ (35.)
und $abem = kbeh$ „

daher $abf\beta = kbeh$, also $\square ab = kbeh$.

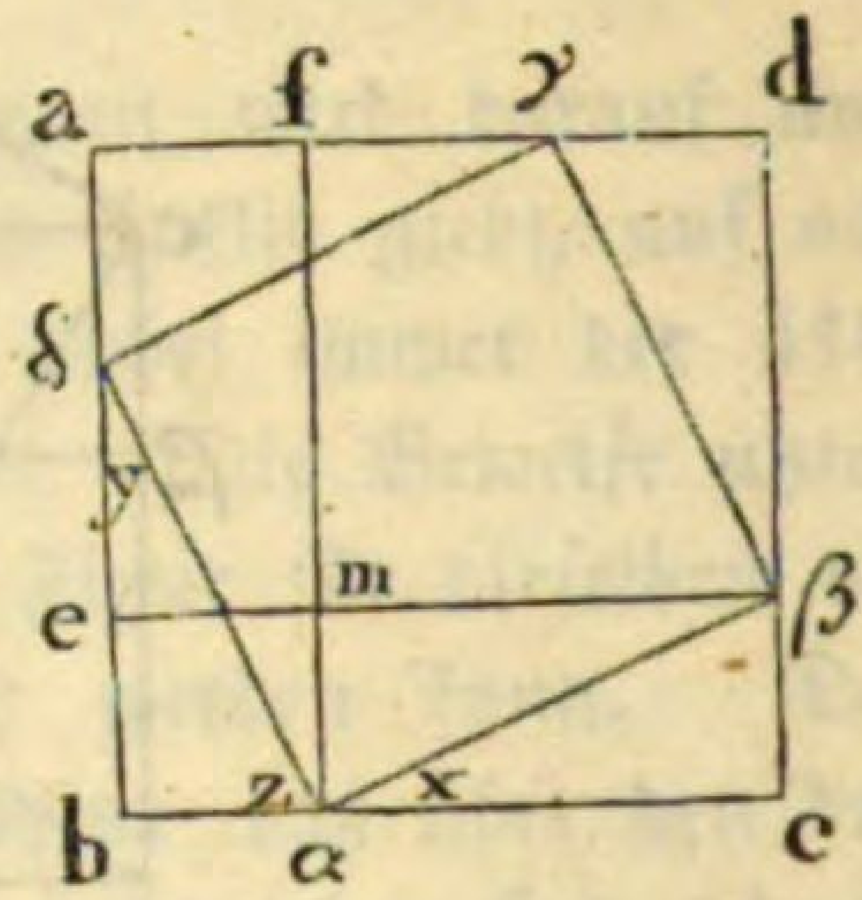
Eben so ist $cag\gamma = camd$ (35.)
und $camd = cdhk$

folglich $cag\gamma = cdhk$, also $\square ac = cdhk$.

Folglich ist auch $\square ab + \square ac = \underbrace{kbeh + cdhk}$
nämlich es ist $\square ab + \square ac = \square bc$.

Auf gleiche Art können die Beweise für die übrigen Formen der Figuren ebenfalls geführt werden; und es werden bei allen diesen Beweisen immer dieselben Sätze angewandt.

6) Ist **abcd** ein Quadrat, und man schneidet auf den Seiten desselben nach einerlei Richtung die gleichen Stücke ab, $a\delta = b\alpha = c\beta = d\gamma$; und verbindet die Punkte α, β, γ, δ, jeden mit dem nächstfolgenden, durch eine gerade Linie: so ist die dadurch gebildete Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ ebenfalls ein Quadrat.



Beweis. Da die Seiten des Quadrates **abcd** gleich sind, und von denselben gleiche Stücke abgeschnitten werden (p. h.): so sind auch die Reste gleich, und es ist daher

$$a\delta = b\alpha = c\beta = d\gamma$$

und auch $a\gamma = b\delta = c\alpha = d\beta$.

Da nun auch $a = \angle b = \angle c = \angle d = R$

so folgt $\triangle \gamma a \delta \cong \triangle \delta b \alpha \cong \triangle \alpha c \beta \cong \triangle \beta d \gamma$

und daher ist $\gamma\delta = \delta\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma$.

Das Viereck $\delta\alpha\beta\gamma$ ist also gleichseitig.

Da $\triangle \delta b \alpha \cong \triangle \alpha c \beta$

so ist $\angle y = \angle x$.

Da nun $\angle y + \angle z + \angle b = 2R$

so ist auch $\angle x + \angle z + \angle b = 2R$

aber auch $\angle x + \angle \beta\alpha\delta + \angle z = 2R$ (13.)

Es ist also $\angle x + \angle z + \angle b = \angle x + \angle \beta\alpha\delta + \angle z$

folglich ist $\angle b = \angle \beta\alpha\delta$

und weil $\angle b = R$, so ist auch $\beta\alpha\delta = R$.

Das Viereck $\delta\alpha\beta\gamma$ hat also bei α einen rechten Winkel; und es sind aus gleichen Gründen die Winkel bei β, γ und δ ebenfalls rechte; folglich ist $\delta\alpha\beta\gamma$ ein Quadrat.

Dieser Satz führt zu dem folgenden einfachen Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes.

Man ziehe durch α die αf der **ba**, und durch β die βe der **cb** parallel: so ist

Rechteck $\alpha c\beta m$ = Rechteck **aemf**

und zugleich ist Rechteck $\alpha c \beta m = 2 \times \triangle \alpha c \beta$ (41.)

folglich ist $\alpha c \beta m + aemf = 4 \times \triangle \alpha c \beta$.

Nun ist aber $abcd = \square\alpha\beta + 4 \times \Delta\alpha c\beta$
es ist also auch $abcd = \square\alpha\beta + \alpha c\beta m + aemf$.
Da nun aber auch $abcd = m\beta df + m\alpha be + \alpha c\beta m + aemf$

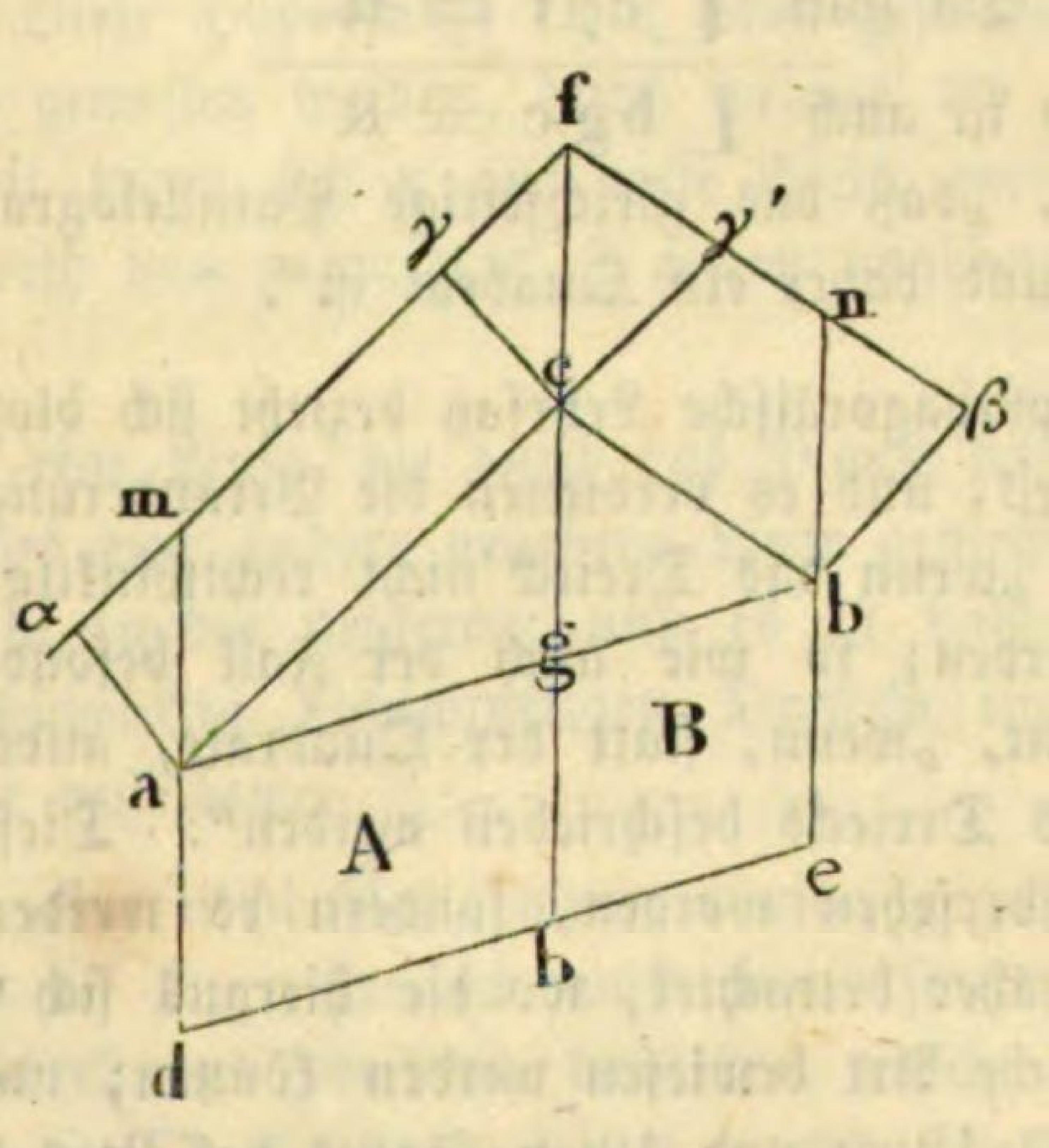
so folgt $\square\alpha\beta + \alpha c\beta m + aemf =$
$m\beta df + m\alpha be + \alpha c\beta m + aemf$;
und hieraus folgt

$$\square\alpha\beta = m\beta df + m\alpha be.$$

Da $m\beta = \alpha c = \beta d$, so ist $m\beta df = \square\alpha c$;
und da $m\alpha = \beta c = b\alpha$, so ist $m\alpha be = \square\beta c$.
Es ist also $\square\alpha\beta = \square\alpha c + \square\beta c$.

In dem bei c rechtwinkligen Dreieck $\alpha c\beta$ ist also das Quadrat der Hypotenuse $\alpha\beta$, der Summe der Quadrate der beiden Katheten αc und βc, gleich.

7) Beschreibt man über zwei Seiten irgend eines Dreiecks acb beliebige Parallelogramme $ac\gamma\alpha$ und $bc\gamma'\beta$; verlängert die oberen Seiten $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma'$ derselben, die sich nothwendig schneiden müssen; zieht von ihrem Durchschnittspunkte f durch c eine gerade Linie, die ab in g schneidet; nimmt die Verlängerung $gh = fc$, und beschreibt das, durch ab, gh und ihre gegenseitige Lage bestimmte Parallelogramm abed (indem man durch h die de parallel ab, und durch a und b die ad und be parallel gh zieht): so ist abed so groß, als die beiden über ac und bc beschriebenen Parallelogramme $ac\gamma\alpha$ und $bc\gamma'\beta$ zusammen.



Beweis. Verlängere da bis m, und eb bis n.

Da $fc = gh$, so ist $acfm = aghd = A$ (36.)
und auch $acfm = ac\gamma\alpha$ (35.)

Folglich ist $ac\gamma\alpha = A$
und aus gleichen Gründen $bc\gamma'\beta = B$

Folglich ist $ac\gamma\alpha + bc\gamma'\beta = A + B$
nämlich es ist $ac\gamma\alpha + bc\gamma'\beta = abed$.

Aus diesem Satze läßt sich der pythagoräische Lehrsatz auf eine einfache Art ableiten; da es hierbei nur darauf ankömmt: zu beweisen, „daß, wenn Δacb ein bei c rechtwinkliges Dreieck ist, und man über ac und bc statt der Parallelogramme $ac\gamma\alpha$ und $bc\gamma'\beta$, Quadrate beschreibt, alsdann auch das, durch die in dem Lehrsatze angegebene Construction über ab erhaltene Parallelogramm ebenfalls ein Quadrat seyn muß". Daß dieses unter dieser Voraussetzung wirklich der Fall ist, ergiebt sich auf folgende Art:

Es ist alsdann $\angle c\gamma f = R$, $c\gamma = ca$ und $\gamma f = c\gamma' = cb$; und daher $\Delta c\gamma f \cong \Delta bca$, also $fc = ab$, und daher auch $gh = ab$; folglich ist $abed$ gleichseitig.

Da $\Delta cf\gamma \cong \Delta bac$, so ist auch $\angle cf\gamma = \angle abc$.
Da nun auch $\angle fc\gamma = \angle bcg$
so ist $\angle cf\gamma + \angle fc\gamma = \angle abc + \angle bcg$
und es ist daher in den beiden Dreiecken $cf\gamma$ und bcg auch der dritte Winkel dem dritten gleich;

also $\angle c\gamma f = \angle bgc$.
Da nun $\angle c\gamma f = R$

so ist auch $\angle bgc = R$
woraus folgt, „daß das gleichseitige Parallelogramm $abed$ auch rechtwinklig, und daher ein Quadrat ist".

8) Der pythagoräische Lehrsatz bezieht sich bloß auf das rechtwinklige Dreieck; und es verdienen die Veränderungen, welche dieser Satz erleidet, „wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist", näher bestimmt zu werden; so wie auch der Fall besonders erläutert zu werden verdient, „wenn, statt der Quadrate, andere Figuren über die Seiten des Dreiecks beschrieben werden". Diese Fälle sind von Euklid nicht übersehen worden, sondern es werden die wichtigsten derselben da näher betrachtet, wo die hieraus sich ergebenden Sätze auf eine einfache Art bewiesen werden können; und sie bilden den Gegenstand des 12ten und 13ten Satzes des 2ten Buches, und den 31sten Satz des 6ten Buches.

Die verschiedenen Erweiterungen des pythagoräischen Lehrsatzes findet man zusammengestellt in dem, von Wolfgang Müller bei Nr. 3. dieser Abhandlung, angeführten Werkchen.

9) Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem beide Katheten gleich groß sind: so ist das Quadrat der Hypotenuse zweimal so groß, als das der Kathete. Ist also die Seite eines Quadrats gegeben, so läßt sich leicht die Seite eines andern Quadrats finden, das zweimal so groß als das gegebene ist; denn man braucht zu dieser Absicht nur die gegebene Seite „als die Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks anzunehmen"; die Hypotenuse dieses Dreiecks ist alsdann die Seite des gesuchten Quadrats. Mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks kann man also geometrisch eine Aufgabe lösen, für die arithmetisch kein, vollständig durch ganze oder gebrochene Zahlen angebbares, Resultat sich finden läßt. Ist nämlich a eine ganze oder gebrochene Zahl, so giebt es keine ganze oder gebrochene Zahl, deren Quadrat zweimal so groß, als das von a ist; denn setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so müßte nach der Voraussetzung seyn

$$x^2 = 2 \times a^2 = 2\,a^2$$

und hieraus folgt $x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Da nun $\sqrt{2}$ irrational ist, so folgt: daß auch $x = a\sqrt{2}$ einen irrationalen Werth hat.

Nimmt man also die Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks $= a$, so ist der Werth der Hypotenuse desselben $x = a\sqrt{2}$. Diese Hypotenuse kann leicht gefunden, aber nicht durch das Maaß gemessen werden, durch welches die Kathete a gemessen wird; weil wenn sich x auf diese Weise messen ließe, das Resultat den Werth von $x = a\sqrt{2}$ genau angeben müßte, was nicht möglich ist.

Man nennt eine Linie, die durch das Maaß sich nicht messen läßt, durch welches eine andere gegebene Linie gemessen wird, incommensurabel zu der Letzteren; und es ist daher die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks incommensurabel gegen die Kathete desselben.

Es läßt sich aber nicht blos, wenn a eine gegebene Linie ist, der Werth von $a\sqrt{2}$ geometrisch construiren: sondern man kann auf diese Weise überhaupt jede Linie darstellen, welche erhalten wird, wenn man a mit der Quadratwurzel aus irgend einer anderen Zahl multiplicirt. Nimmt man z. B. die eine Kathete $= a$, und

die Hypotenuse = 2 a, und setzt die zweite Kathete = x: so ist

$$a^2 + x^2 = (2 a^2)$$

$$\text{also } a^2 + x^2 = 4 a^2$$

$$\text{und daher } x^2 = 3 a^2$$

Folglich ist $x = \sqrt{3 a^2} = a \sqrt{3}$.
Hier ist nun die zweite Kathete incommensurabel gegen die erste Kathete und gegen die Hypotenuse.

Wird die eine Kathete = a und die andere = 2 a genommen, und man setzt die Hypotenuse = x: so wird

$$x^2 = a^2 + (2 a^2)$$

$$\text{also } x^2 = a^2 + 4 a^2 = 5 a^2$$

folglich ist $x = \sqrt{5 a^2} = a \sqrt{5}$
wo nun wieder die Hypotenuse incommensurabel gegen beide Katheten ist.

10) Aus dieser Betrachtung folgt aber keinesweges, „daß bei einem jeden rechtwinkligen Dreiecke nothwendig die eine Seite incommensurabel gegen die anderen beiden seyn müsse"; sondern es giebt im Gegentheil auch rechtwinklige Dreiecke, wo alle drei Seiten durch dasselbe Maaß sich messen lassen. Nimmt man z. B. die eine Kathete = 3 a und die andere = 4 a, und setzt die Hypotenuse = x: so ist

$$x^2 = (3 a^2) + (4 a^2)$$

$$\text{also } x^2 = 9 a^2 + 16 a^2 = 25 a^2$$

Folglich ist $x = \sqrt{25 a^2} = 5 a$.

Wird die eine Kathete = 5 a und die andere = 12 a gesetzt, so findet man die Hypotenuse = 13 a; und es wird dieselbe = 17 a gefunden, wenn man die eine Kathete = 8 a, und die andere = 15 a annimmt.

Auf diese Weise giebt es unendlich viele rechtwinklige Dreiecke, wo alle drei Seiten Vielfache einer gegebenen Linie a sind; oder, was dasselbe ist, wo alle drei Seiten durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. Es läßt sich selbst die Aufgabe ganz allgemein lösen; die eine Kathete ist ein gegebenes Vielfache von a; man soll das Dreieck so construiren, daß auch die beiden übrigen Seiten desselben „Vielfache von a" sind.

Die Auflösung dieser Aufgabe soll in einem Anhange zu dem zweiten Buche mitgetheilt werden. (Beilage XII. Nr. 12.)

Fortsetzung der Aufgaben, die mit Hülfe der Sätze des ersten Buches der Elemente sich lösen lassen.

§. 9.

Aufgaben, bei deren Auflösung der pythagoräische Lehrsatz gebraucht wird.

Aufgabe 103. Zwei Quadrate sind gegeben; man soll die Seite eines dritten finden, das so groß ist als beide zusammen.

Auflösung. Werden die Seiten der gegebenen Quadrate unter einem rechten Winkel an einander gesetzt, so ist „die Hypotenuse des hierdurch bestimmten rechtwinkligen Dreiecks" die Seite des gesuchten Quadrates, welches so groß ist als die beiden gegebenen zusammen.

Aufgabe 104. Mehrere Quadrate sind gegeben; man soll die Seite eines Quadrats angeben, das so groß ist, wie alle zusammen.

Analysis. Man kann (Aufg. 103.) ein Quadrat finden, das so groß ist, als das erste und zweite gegebene zusammen; und es läßt sich hierauf durch ein gleiches Verfahren ferner ein Quadrat finden, das so groß ist, als das zuerst gefundene und das dritte gegebene; und es ist dasselbe hiernach so groß, als die drei ersten gegebenen Quadrate zusammen. Wird nun ein Quadrat gesucht, das so groß ist, als das zuletzt gefundene und das vierte gegebene: so ist dieses den vier ersten gegebenen Quadraten gleich u. s. w. Durch die fortgesetzte Anwendung desselben Verfahrens kann man also ein Quadrat finden, das mehreren gegebenen zusammen gleich ist, wie groß auch die Zahl der gegebenen Quadrate seyn mag.

Aufgabe 105. Man soll ein Quadrat finden, das der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung. Beschreibt man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse der Seite des größern, und dessen Eine Kathete der Seite des kleinern der beiden gegebenen Quadrate gleich ist: so ist die zweite Kathete dieses Dreiecks die Seite des gesuchten Quadrats.

Aufgabe 106. Zwei Parallelogramme sind gegeben; man soll über eine gegebene Grundlinie ein Parallelogramm beschreiben, das den beiden gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Auflösung. Sind $ac\gamma\alpha$ und $bc\gamma'\beta$ der Figur S. 153 die gegebenen Parallelogramme, und ist ab die Grundlinie des gesuchten: so läßt sich entweder aus den Linien ac, bc und ab, ein Dreieck beschreiben (es sind also je zwei dieser Linien zusammen größer als die dritte) oder es ist Dieses nicht der Fall.

Erster Fall. Beschreibe das Dreieck acb, über ac und bc die gegebenen Parallelogramme $ac\gamma\alpha$ und $bc\gamma'\beta$; verlängere $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma'$, bis sie sich in f schneiden; ziehe von f durch c eine Linie, welche die ab in g schneidet; nimm die Verlängerung gh derselben = fc, und vollende das durch ab und gh und die Lage dieser Linien bestimmte Parallelogramm abed so ist Dieses das Gesuchte. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze in Nr. 7. der Beilage VII.

Zweiter Fall. Ist die gegebene Grundlinie des zu beschreibenden Parallelogramms von der Art, „daß aus derselben, aus ac und bc kein Dreieck beschrieben werden kann": so nehme man statt ab eine andere Grundlinie, über die mit ac und bc ein Dreieck sich beschreiben läßt, und verfahre wie bei dem erstern Falle. Das auf diese Weise gefundene Parallelogramm verwandle man in ein anderes, in welchem die gegebene Grundlinie vorkömmt (44.): so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 107. Man soll über einer gegebenen Grundlinie ein Parallelogramm beschreiben, das so groß ist, als mehrere gegebene Parallelogramme zusammen.

Aufgabe 108. Es sind zwei Dreiecke gegeben; man soll über einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck beschreiben, das so groß ist, wie die beiden gegebenen zusammen.

Analysis. Da die beiden Dreiecke gegeben sind, so sind auch die Parallelogramme gegeben, von welchen sie die Hälfte betragen; und es ist daher auch das Parallelogramm gegeben, welches diesen beiden zusammen gleich ist (Aufg. 106.), und das mit dem gesuchten Dreieck die Grundlinie gleich hat. Zieht man nun in diesem Parallelogramm die Diagonale, wodurch dasselbe in zwei gleiche Dreiecke zerlegt wird (34.): so entspricht jedes dieser beiden Dreiecke den Forderungen der Aufgabe.

Aufgabe 109. Es sind mehrere Dreiecke gegeben; man soll über einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck beschreiben, das allen zusammen gleich ist.

Aufgabe 110. Zwei Parallelogramme sind gegeben; man soll ein drittes beschreiben, das der Differenz Beider gleich ist.

Auflösung. Ist $ac\gamma\alpha$ (Figur S. 153.) das kleinere der beiden gegebenen Parallelogramme, so beschreibe man aus a mit der einen Seite am des größeren einen Bogen, der die $\alpha\gamma$ in m schneidet; ziehe ma; nehme die Verlängerung ad = am, beschreibe über ad das Größere der gegebenen Parallelogramme abed; ziehe bc, und durch c die cf parallel der dm, bis sie die $\alpha\gamma$, oder deren Verlängerung in f schneidet; ziehe bc, und durch f die $f\beta$ parallel mit derselben, und verlängere eb bis n: so ist Parallelogramm bcfn „die gesuchte Differenz".

Der Beweis für dieses Verfahren folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze in Nr. 7. der Beilage VII.

Aufgabe 111. Es sind zwei Dreiecke gegeben; man soll ein Drittes verzeichnen, das der Differenz Beider gleich ist.

Aufgabe 112. Zwei geradlinige Figuren sind gegeben; man soll ein Parallelogramm beschreiben, das „so groß ist, wie beide Figuren zusammen".

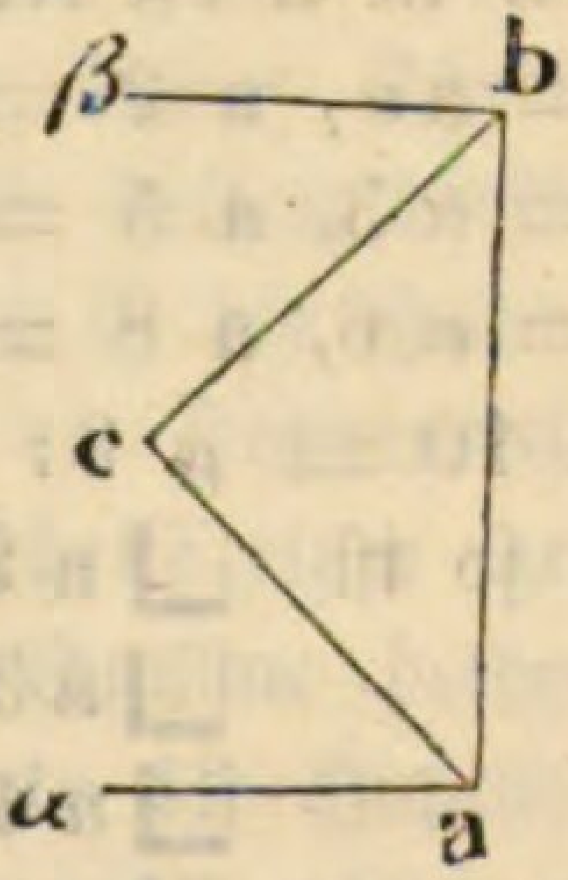
Aufgabe 113. Man soll ein Parallelogramm beschreiben, das der Differenz zweier gegebenen Figuren gleich ist.

Aufgabe 114. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein anderes beschreiben, das zweimal so groß als das gegebene ist.

Auflösung. Die Diagonale des gegebenen Quadrats ist die Seite des Gesuchten.

Aufgabe 115. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein Anderes verzeichnen, das halb so groß als dasselbe ist.

Analysis. Ist ac die Seite des gesuchten Quadrates, und man errichtet auf ac in c die Normale cb = ca, und zieht ab: so ist $\square$ab = $\square$ca + $\square$cb = 2 × $\square$ca, und ab die Seite des gegebenen Quadrats; und es ist $\llcorner$ cab = $\llcorner$ cba = $\frac{1}{2}$ R gegeben. Da nun ab gegeben ist, so ist auch Δacb gegeben; und folglich auch ac, als die Seite des gesuchten Quadrats.



Auflösung. Ist ab die Seite des gegebenen Quadrats: so errichte in a und b auf dieser Linie die Normalen $a\alpha$ und $b\beta$, halbire die Winkel αab und βba; so ist, wenn die Halbirungslinien sich in c schneiden, ac die Seite des gesuchten Quadrates.

Aufgabe 116. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein Anderes beschreiben, das drei Mal so groß als das gegebene ist.

Auflösung. Beschreibe ein Quadrat, das zwei Mal so groß ist, als das gegebene (Aufg. 114.); und addire hierzu das gegebene (Aufg. 103.), so ist das Verlangte geschehen.

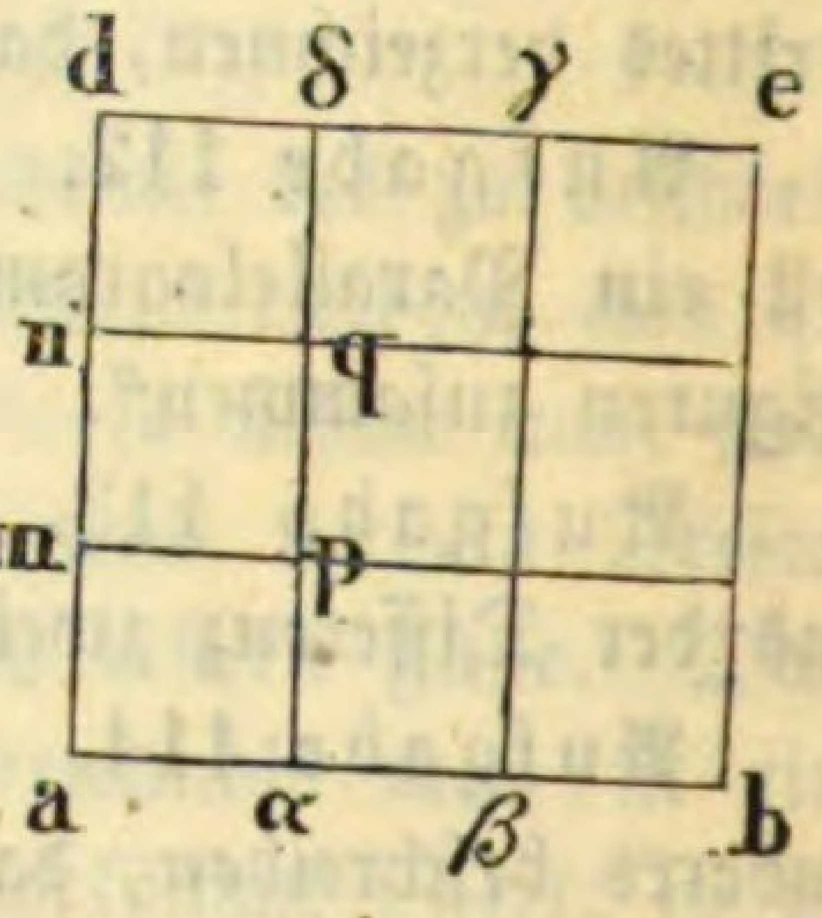
Aufgabe 117. Ein Quadrat ist gegeben; man soll ein Anderes beschreiben, das der dritte Theil von demselben ist.

Analysis. Wird die Seite **ab** des gegebenen Quadrates **abcd** in α und β in drei gleiche Theile getheilt (Lehnsatz zu Aufgabe 84.), und man zieht die $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ parallel **ad**:

so ist $a\alpha\delta d = \alpha\beta\gamma\delta = \beta bc\gamma$ (36.)

und daher $a\alpha\delta d = \frac{1}{3}\, abcd$.

Nun ist **ab** gegeben; also auch $a\alpha$, und daher $a\alpha\delta d$ gegeben. Theilt man aber auch **ad** in **m** und **n** in drei gleiche Theile, und zieht durch diese Punkte Parallelen **mp** und **nq** mit $a\alpha$: so ist $a\alpha\delta d = 3 \times a\alpha pm$ und $a\alpha = am$, also $a\alpha pm$ ein Quadrat. Es ist daher $a\alpha\delta d = 3 \times \square a\alpha$. Da nun $a\alpha$ gegeben ist, so ist auch $\square a\alpha$ gegeben; und es kann also ein Quadrat gefunden werden $= 3 \times \square a\alpha = a\alpha\delta d = \frac{1}{3} abcd$.



Auflösung. Ist **ab** die Seite des gegebenen Quadrats, so nimm $a\alpha = \frac{1}{3}\, ab$, und suche ein Quadrat $= 3 \times \square a\alpha$; so ist Dieses der dritte Theil von $\square ab$.

Aufgabe 118. Die Seite eines Quadrates ist gegeben; man soll die Seiten der Quadrate angeben, die zwei bis zehn Mal so groß als dasselbe sind.

Auflösung. Ist $a\alpha$ die Seite des gegebenen Quadrats, so errichte man auf $a\alpha$ in **a** die Normale **am** und nehme $a\,1 = a\alpha$, $a\,2 = \alpha\,1$, $a\,3 = \alpha\,2$, $a\,4 = \alpha\,3$, $a\,5 = \alpha\,4$, $a\,6 = \alpha\,5$, $a\,7 = \alpha\,6$, $a\,8 = \alpha\,7$, $a\,9 = \alpha\,8$ und $a\,10 = \alpha\,9$:

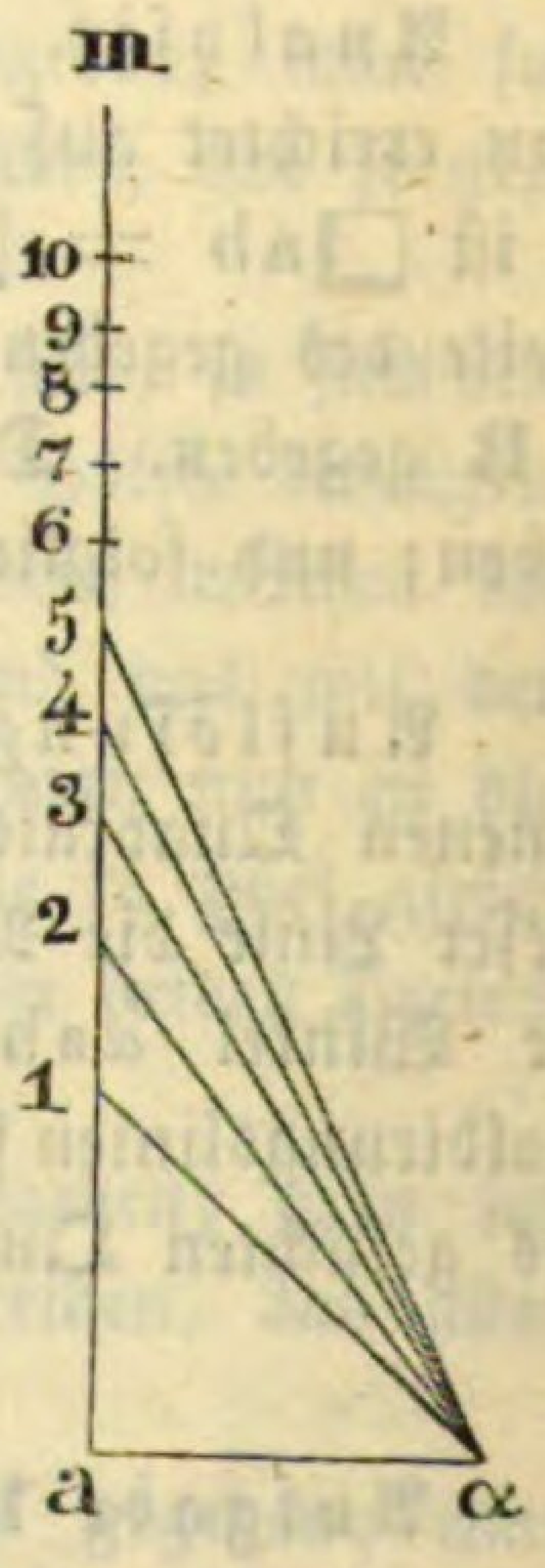
so ist $\square a2 = 2 \times \square a\alpha$

$\square a3 = 3 \times \square a\alpha$

$\square a4 = 4 \times \square a\alpha$

$\square a5 = 5 \times \square a\alpha$

$\square a6 = 6 \times \square a\alpha$ ꝛc.



Beweis. Es ist

$\square a2 = \square \alpha 1 = \square a\alpha + \square a1 = 2 \times \square a\alpha$

$\square a3 = \square \alpha 2 = \square a\alpha + \square a2 = \square a\alpha + 2 \times \square a\alpha = 3 \times \square a\alpha$

$\square a4 = \square \alpha 3 = \square a\alpha + \square a3 = \square a\alpha + 3 \times \square a\alpha = 4 \times \square a\alpha$

$\square a5 = \square \alpha 4 = \square a\alpha + \square a4 = \square a\alpha + 4 \times \square a\alpha = 5 \times \square a\alpha$

$\square a6 = \square \alpha 5 = \square a\alpha + \square a5 = \square a\alpha + 5 \times \square a\alpha = 6 \times \square a\alpha$

Aufgabe 119. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein Anderes verzeichnen, das den 5ten Theil von demselben beträgt.

Auflösung. Nimm $\frac{1}{5}$ der Seite des gegebenen Quadrates, und suche ein Quadrat, das fünfmal so groß ist, als das Quadrat von diesem Fünftel: so ist das Verlangte geschehen.

Anmerkung. Durch ein gleiches Verfahren kann ein Quadrat gefunden werden, das jedem beliebigen Theile von einem gegebenen gleich ist.

Aufgabe 120. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll ein Anderes verzeichnen, das $\frac{5}{8}$ von demselben beträgt.

Auflösung. Suche ein Quadrat, das fünfmal so groß ist, als das gegebene; und verzeichne hierauf ein Quadrat, das den 8ten Theil von dem zuerst gefundenen beträgt, so ist Dieses das Gesuchte.

Anmerkung. Durch ein gleiches Verfahren kann ein Quadrat gefunden werden, das irgend einen gebrochenen Theil von einem gegebenen beträgt.

---

§. 10.

Einige Aufgaben, die mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks gelös't werden.

Aufgabe 121. Es ist eine gerade Linie ihrer Größe nach gegeben; man soll dieselbe in zwei Theile theilen, so daß die Summe der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate gleich wird.

Analysis. Da die Summe der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate gleich seyn soll: so sind die beiden Theile die Katheten, und die Seite des gegebenen Quadrats ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem also die Hypotenuse gegeben ist. Da die Summe der beiden gesuchten Theile einer gegebenen Linie gleich seyn soll, so ist diese Linie die Summe beider Katheten; folglich ist von dem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse gegeben, und die Summe beider Katheten. Da nun außerdem auch der Winkel gegeben ist, welcher der Hypotenuse gegenüber

liegt = R: so kennt man von dem Dreieck die eine Seite (die Hypotenuse = der Seite des gegebenen Quadrats), den ihr gegenüber liegenden Winkel (= R), und die Summe der beiden übrigen Seiten (die Summe beider Katheten = der zu theilenden Linie); und es ist daher das Dreieck gegeben (Aufg. 94.), und folglich auch die Seiten desselben, welche den rechten Winkel einschließen; und Diese sind die gesuchten Theile der gegebenen Linie.

Aufgabe 122. Von einem Rechteck ist der Umfang gegeben und die Diagonale desselben; man soll die Seiten dieses Rechtecks finden.

Analysis. Da der Umfang des Rechtecks gegeben ist, so ist auch der halbe Umfang gegeben; und Dieses ist die Summe zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem die Diagonale des Rechtecks die Hypotenuse ist. Folglich ist von diesem rechtwinkligen Dreieck gegeben die Hypotenuse der ihr gegenüber liegende Winkel, und die Summe der beiden übrigen Seiten.

Aufgabe 123. Eine der Größe nach gegebene Linie soll so verlängert werden, daß „daß Quadrat der Verlängerung, und das der verlängerten Linie, zusammen" einem gegebenen Quadrate gleich seyen.

Analysis. Da „das Quadrat der Verlängerung der gegebenen Linie, und das der verlängerten Linie, zusammen" einem gegebenen Quadrate gleich seyn sollen: so ist die Seite dieses Quadrats die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und die gesuchte Verlängerung; und die verlängerte gegebene Linie sind die Katheten desselben, von welchen die eine um die gegebene Linie größer als die andere ist. Die gegebene Linie ist also die Differenz der beiden Katheten. Von dem rechtwinkligen Dreieck ist also gegeben: die eine Seite (die Hypotenuse = der Seite des gegebenen Quadrats), der ihr gegenüber liegende Winkel (= R) und die Differenz der beiden übrigen Seiten (die gegebene Linie, welche verlängert werden soll). Daher ist das Dreieck gegeben, und es kann dasselbe verzeichnet werden. (Aufg. 97.) Die kleinere Kathete dieses Dreiecks ist das Stück, um wieviel die gegebene Linie verlängert werden muß.

Aufgabe 124. Von einem Quadrate ist die Linie gegeben, um wieviel die Diagonale größer, als die Seite desselben ist; man soll die Seite des Quadrats finden.

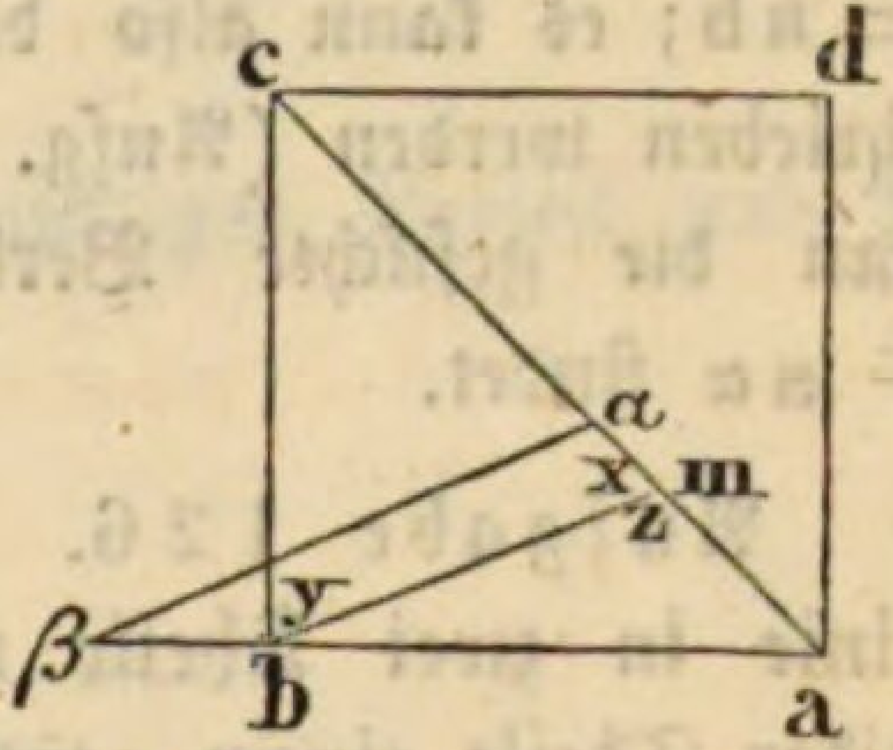
Analysis. Ist **abcd** ein Quadrat, **ac** die Diagonale desselben, und man nimmt **cm** = **cb**: so ist **am** (die Differenz der

Diagonale und Seite) gegeben; und zieht man bm, so ist Δ bcm gleichschenklig, daher $x = y$.

$$\text{Da nun } \angle x + \angle y + \angle bca = 2\,R$$
$$\text{und } \angle bca = \tfrac{1}{2}\,R$$
$$\text{so ist } \angle x + \angle y = \tfrac{3}{2}\,R$$
$$\text{also } 2 \times \angle x = \tfrac{3}{2}\,R, \text{ und } \angle x = \tfrac{3}{4}\,R$$

gegeben.

Folglich ist $\angle z = 2\,R - x$ ebenfalls gegeben. Aber auch $\angle bac = \frac{1}{2}\,R$ ist gegeben. Es sind also von Δ amb gegeben: eine Seite (am) und die beiden anliegenden Winkel ($\angle z$ und $\angle bam$), folglich ist das Dreieck gegeben und kann verzeichnet werden (Aufg. 2.), folglich ist auch ab gegeben.



Auflösung. Beschreibe das Quadrat abcd einer beliebig angenommenen Seite ab, ziehe die Diagonale ca, nimm cm = cb und ziehe mb. Auf der Diagonale nehme man aα so groß, als die gegebene Differenz der Diagonale und Seite des zu beschreibenden Quadrats; durch α ziehe $\alpha\beta$ parallel mb, welche die ab in β schneidet, so ist nun aβ die gesuchte Seite des Quadrats, in welchem die Diagonale um aα größer, als die Seite ist.

Aufgabe 125. Es ist ein Quadrat gegeben; man soll die Seiten desselben um gleichviel nach einer Richtung verlängern, so daß, wenn man die Endpunkte der verlängerten Linien verbindet, das hierdurch entstehende Viereck zweimal so groß, als das gegebene Quadrat wird.

Gegeben das Quadrat abcd.

Gesucht wird $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$, so daß $\alpha\beta\gamma\delta = 2 \times abcd$.

Analysis. Da $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$

so ist auch $a\beta = b\gamma = c\delta = d\alpha$

da nun auch $\angle \alpha a \beta = \angle \beta b \gamma = \angle \gamma c \delta = \angle \delta d \alpha = R$

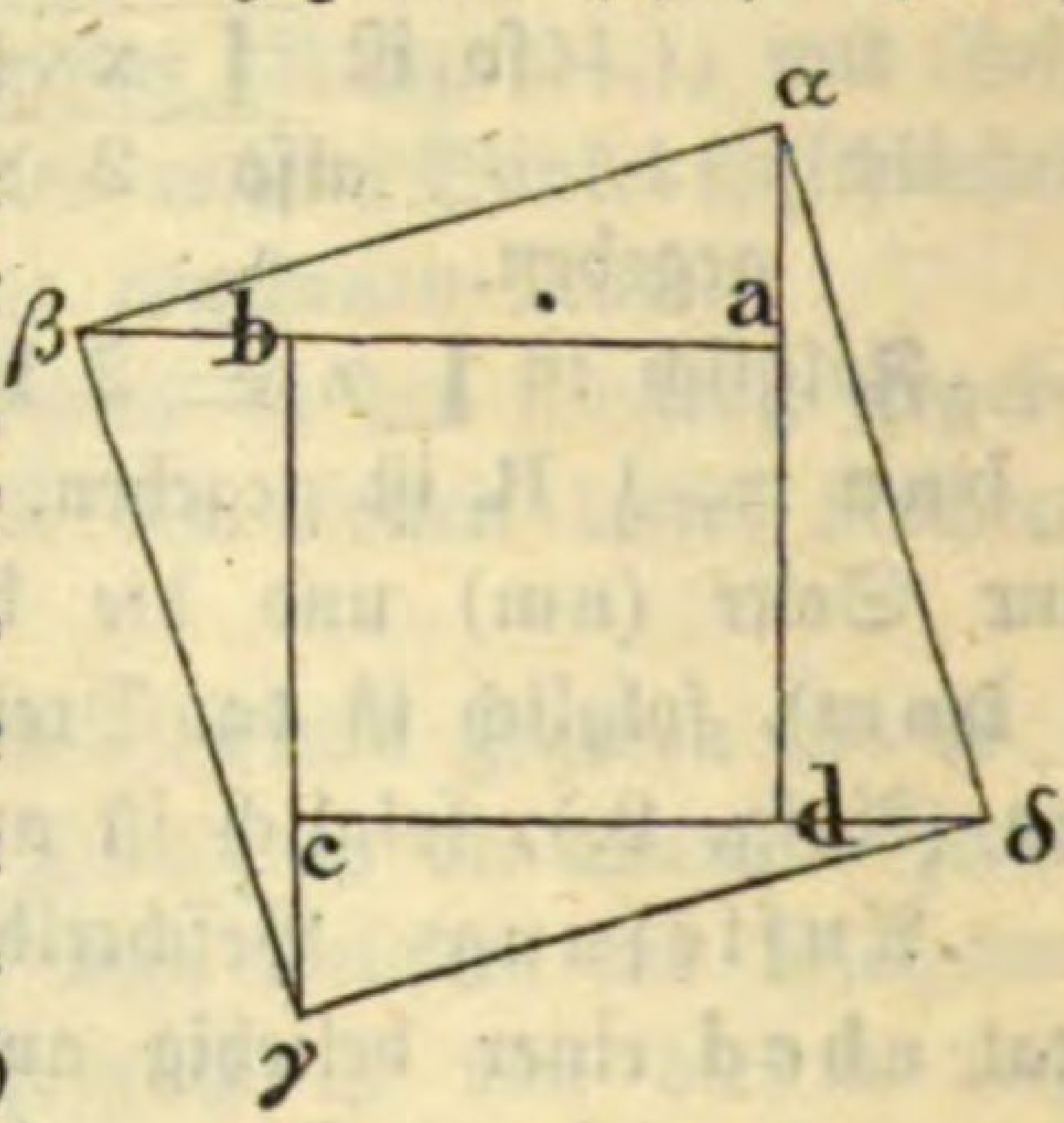
so ist $\Delta \alpha a \beta \cong \Delta \beta b \gamma \cong \Delta \gamma c \delta \cong \Delta \delta d \alpha$

und daher das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ gleichseitig.

$$\text{Da } \Delta \alpha a \beta \cong \Delta \beta b \gamma$$
$$\text{so ist } \angle a \alpha \beta = \angle b \beta \gamma$$
$$\text{da nun } \angle \alpha \beta a = \angle \alpha \beta a$$
$$\text{so ist auch } \underbrace{\angle a \alpha \beta + \angle \alpha \beta a}_{} = \underbrace{\angle b \beta \gamma + \angle \alpha \beta a}_{}$$
$$\text{nämlich es ist } \quad R \quad = \quad \angle \alpha \beta \gamma$$

Das gleichseitige Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ ist also rechtwinklig, und daher ein Quadrat.

Da $\alpha\beta\gamma\delta$ zweimal so groß, als **abcd** werden soll, so ist auch $\square\alpha\beta = 2 \times \square$ab; und da ab gegeben ist, so ist $\alpha\beta$ ebenfalls gegeben (Aufgabe 114.), und da bβ = aα, so ist aβ — aα = ab; es ist also auch die Differenz der beiden Seiten aβ und aα gegeben; folglich kennt man von dem Dreieck $\alpha\beta$a die eine Seite $\alpha\beta$, den ihr gegenüber liegenden Winkel = **R**, und die Differenz der beiden übrigen Seiten = ab; es kann also das Dreieck beschrieben werden (Aufg. 97.), wodurch man die gesuchte Verlängerung bβ = aα findet.



Aufgabe 126. Man soll eine der Größe nach gegebene Linie in zwei Theile theilen, so daß die Differenz der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate gleich wird.

Analysis. Da die Differenz der Quadrate einem gegebenen Quadrate gleich seyn soll, so ist der größere Theil die Hypotenuse und der kleinere die erste Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zweite Kathete der Seite des gegebenen Quadrates gleich ist; und es ist also die zweite Kathete gegeben. Die erste Kathete und die Hypotenuse aber sind Theile einer gegebenen Linie, folglich ist die Summe dieser beiden Seiten ebenfalls gegeben; und es liegt der einen dieser Seiten der rechte Winkel gegenüber. Man kennt also von dem Dreieck die eine Seite (die Seite des gegebenen Quadrats = der zweiten Kathete des Dreiecks), einen an derselben anliegenden Winkel (= **R**) und die Summe der beiden übrigen Seiten (s = der zu theilenden Linie), folglich ist das Dreieck gegeben und kann verzeichnet werden (Aufg. 93.). Die Hypotenuse und die eine Kathete dieses Dreiecks sind die gesuchten Theile der gegebenen Linie.

Aufgabe 127. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete gegeben; man soll dasselbe so beschreiben, daß die Fläche einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung. Beschreibe ein Quadrat, das zweimal so groß ist, als das gegebene (Aufg. 114.), und verwandle es in ein Rechteck, dessen eine Seite der gegebenen Kathete gleich ist (44.) Wird

nun dieses Rechteck durch die Diagonale halbirt, so ist die Hälfte desselben das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 128. Es ist ein rechter Winkel gegeben, dessen Schenkel begrenzt und gleich groß sind, und es ist die Länge der Schenkel bekannt; man soll in diesen Schenkeln Punkte von der Lage angeben, daß der eine Punkt in dem einen Schenkel eben so weit von dem Endpunkte des Schenkels absteht, so weit der zweite Punkt in dem anderen Schenkel von dem Scheitel des rechten Winkels entfernt ist; und es soll der Abstand der beiden gesuchten Punkte von einander einer gegebenen Linie gleich seyn.

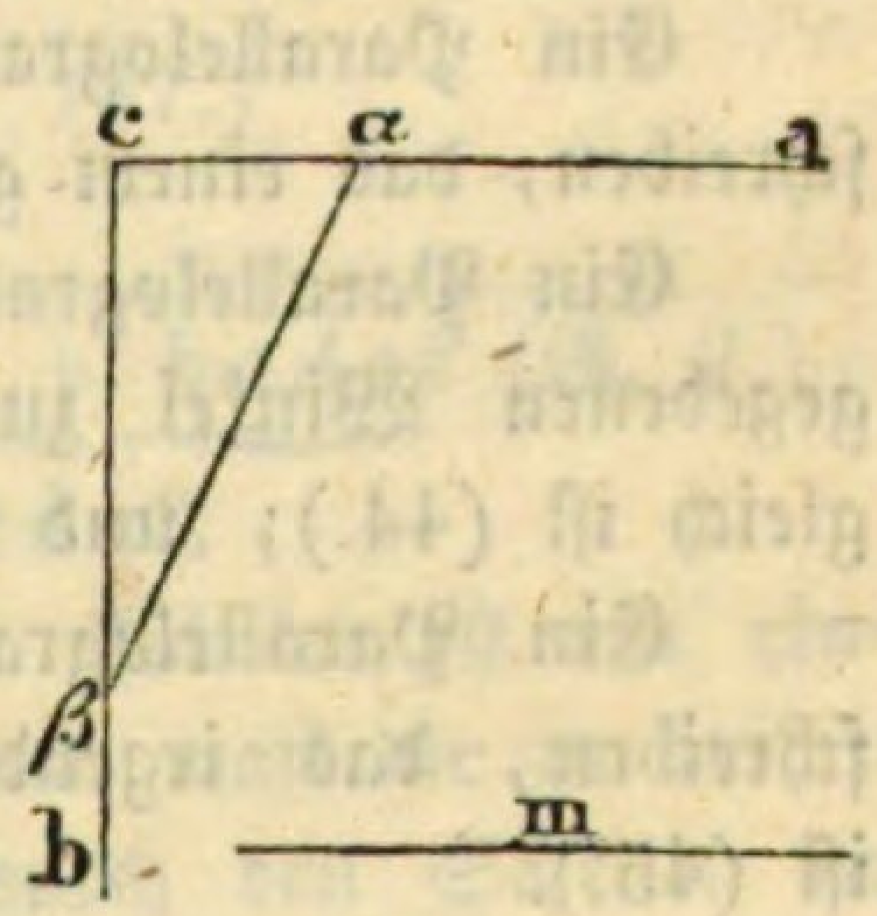
Gegeben $\llcorner acb = R$, $ca = cb$, und die Linie m.

Gesucht die Punkte α und β von der Lage, daß $\alpha a = c\beta$ und $\alpha\beta = m$.

Analysis. Es ist $\alpha c\beta$ ein rechtwinkliges Dreieck und die Hypotenuse $\alpha\beta = m$ gegeben.

$$\begin{array}{l} \text{Da } \alpha a = c\beta \\ \text{und } c\alpha = c\alpha \\ \hline \text{so ist } \underbrace{c\alpha + \alpha a} = c\beta + c\alpha \\ \text{also } \quad ca \quad = c\beta + c\alpha. \end{array}$$

Da nun ca gegeben ist, so ist $c\beta + c\alpha$ ebenfalls gegeben; es ist also die Summe der beiden, den rechten Winkel einschließenden Seiten gegeben.



Hiernach kennt man vom $\Delta\alpha c\beta$ die eine Seite $\alpha\beta = m$, den ihr gegenüber liegenden Winkel $c = R$ und die Summe der beiden übrigen Seiten $c\alpha + c\beta = ca$. Folglich ist das Dreieck bestimmt und kann verzeichnet werden (Aufg. 94.), wodurch $c\alpha$ und $c\beta$, und daher auch die Punkte α und β gegeben sind.

$$\begin{array}{l} \text{Determination. Da } c\alpha + c\beta > \alpha\beta \quad (29.) \\ \text{und } c\alpha + c\beta = ca \\ \hline \text{so folgt } ca > \alpha\beta, \text{ also } ca > m. \end{array}$$

Die gegebene Linie muß also kleiner seyn, als der Schenkel des rechten Winkels.

Aufgabe 129. Man soll in ein Quadrat ein anderes hinein zeichnen, das $\frac{2}{3}$ von demselben beträgt.

Analysis. Ist ca der obigen Figur die Seite des gegebenen Quadrats, so kann die Seite m eines Quadrats gefunden werden, das $\frac{2}{3}$ von demselben beträgt (Aufgabe 120.); daher ist m gegeben. Wird nun $\alpha\beta = m$ in den rechten Winkel acb so eingetragen, daß $a\alpha = c\beta$ (Aufgabe 128.), so hat diese Linie die erforderliche Lage in dem gegebenen Quadrate, nach Nr. 6. in Beilage VII.

Aufgabe 130. Es ist irgend ein Winkel acb (Figur Aufgabe 128.), und der eine Schenkel ca desselben der Größe nach gegeben; man soll die Punkte α und β in den Schenkeln so bestimmen, daß $a\alpha = c\beta$ und $\alpha\beta$ der gegebenen Linie m gleich werde.

VIII. Das Verwandeln der Figuren.

1) In dem ersten Buche der Elemente wird gezeigt: wie es möglich ist, „über einer gegebenen begrenzten geraden Linie unter einem gegebenen Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen, das einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist, also mit derselben einen gleichen Flächeninhalt hat. Um die Möglichkeit dieser Umformung vollständig nachzuweisen, werden nach und nach die Aufgaben gelös't:

Ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu beschreiben, das einem gegebenen Dreieck gleich ist (42.).

Ein Parallelogramm über einer gegebenen Linie unter einem gegebenen Winkel zu beschreiben, das einem gegebenen Dreiecke gleich ist (44.); und

Ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu beschreiben, das irgend einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist (45.).

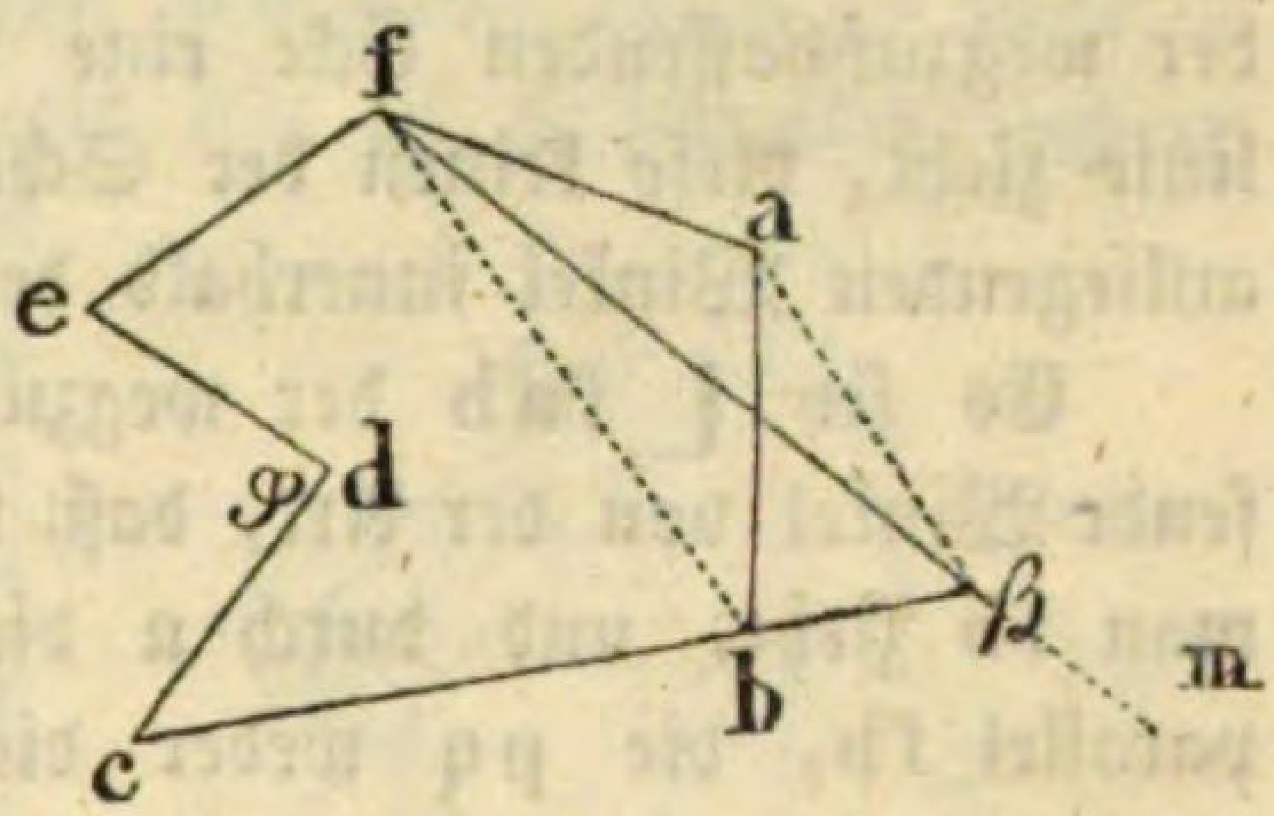
2) Die angeführten Aufgaben haben bloß den Zweck, die Möglichkeit der Umformung nachzuweisen, ohne daß dabei zugleich auf einfache Ausführung Rücksicht genommen werden konnte. Hier soll nun gezeigt werden, wie diese Umwandlung in allen Fällen auf eine einfachere Art vorgenommen werden kann; wobei zugleich vorläufig bemerkt wird: daß, wenn zwei Linien einer Figur so zusammentreffen, daß der von denselben gebildete Winkel $< 2R$ außerhalb der Figur liegt, und also der Winkel, insofern er zu der Figur gehört, $> 2R$ ist, ein solcher Winkel ein einsprin-

gender genannt wird. So liegt in **abcdef** der nächstfolgenden Figur der Winkel $cde = \angle \varphi < 2\,R$ außerhalb der Figur; und daher ist, insofern der Winkel zu der Figur gehört, $\angle d = 4\,R - \varphi$, welcher in einem solchen Fall immer $> 2\,R$ seyn muß, ein einspringender.

3) Aufgabe. Von einer gegebenen geradlinigen Figur soll ein Winkel weggeschafft werden, so daß sie dadurch in eine andere Figur verwandelt wird, die einen Winkel weniger, als die gegebene hat.

Auflösung. Erster Fall. Der wegzuschaffende Winkel ist $< 2\,R$.

Es sey $\angle fab$ der wegzuschaffende Winkel; man verbinde die zu beiden Seiten an $\angle fab$ anliegenden Ecken f und b durch fb, ziehe durch a die am parallel fb, verlängere cb, bis sie die am in β schneidet, und ziehe $f\beta$, so ist nun die Figur $\beta cdef = abcdef$.



Die neue Figur enthält also den Winkel a nicht mehr, $\angle b$ ist nach β verrückt, und es ist das gegebene Sechseck **abcdef** in ein Fünfeck $\beta cdef$ verwandelt.

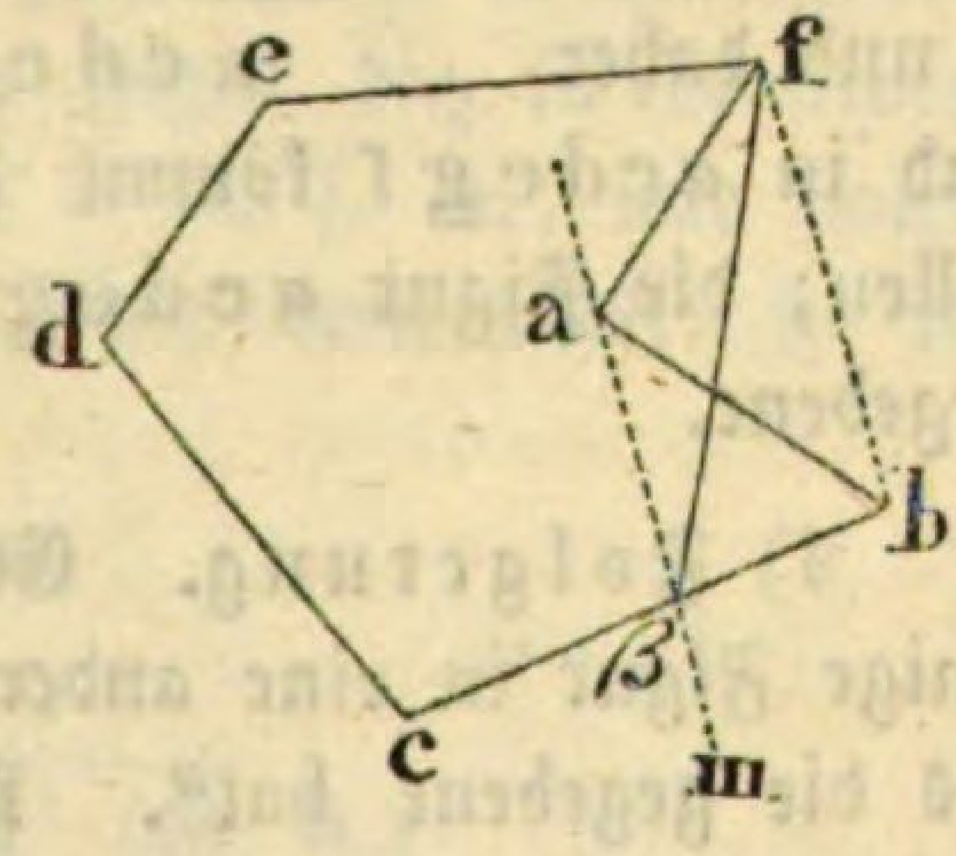
Beweis. Es ist $\Delta fb\beta = \Delta fba$ (37.)
und $bcdef = bcdef$

folglich ist auch $\underbrace{bcdef + \Delta fb\beta} = \underbrace{\Delta fba + bcdef}$ (G. 2.)

und daher $\beta cdef = abcdef.$

Zweiter Fall. Der wegzuschaffende Winkel ist ein einspringender, also $> 2\,R$; doch so, daß, wenn man die zu beiden Seiten anliegenden Ecken verbindet, und durch den Scheitel der wegzuschaffenden Ecke eine Parallele mit dieser Verbindungslinie zieht, diese einen Schenkel des einen der, an dem wegzuschaffenden anliegenden Winkel innerhalb der Figur schneidet.

Es sey $\angle fab$ der wegzuschaffende Winkel; man verbinde die anliegenden Ecken f und b durch fb, ziehe durch a die am parallel fb, so



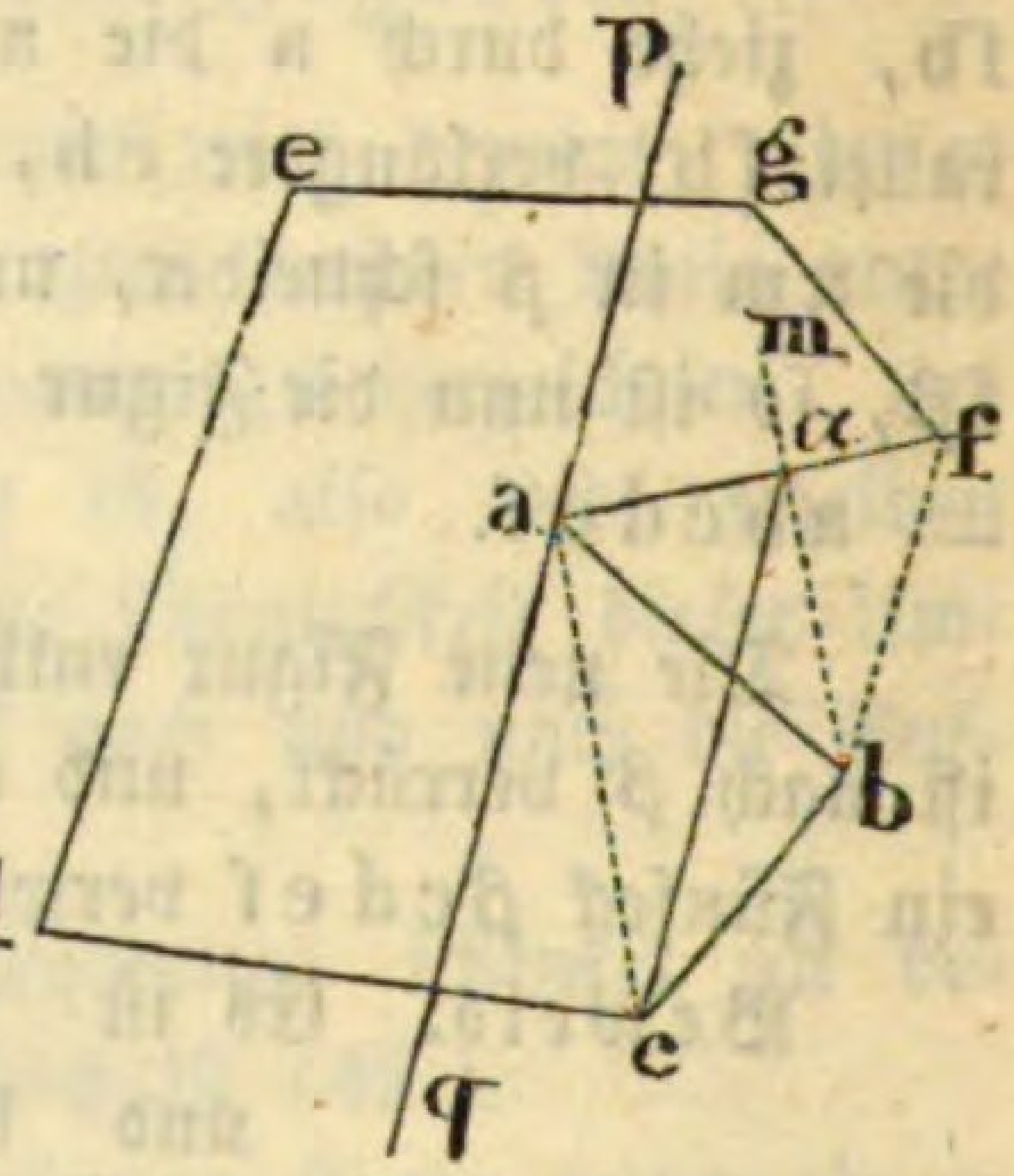
scheidet diese die bc (p. h.) in β; wird nun $f\beta$ gezogen, so ist die Figur $\beta cdef = abcdef$, und es ist also $\beta cdef$ die verlangte Figur.

Beweis. Es ist $\Delta fb\beta = \Delta fba$ (37.)
und $bcdef = bcdef$

folglich ist auch $\underbrace{bcdef - \Delta fb\beta} = \underbrace{bcdef - \Delta fba}$ (G. 3.)
und daher $\beta cdef \quad = \quad abcdef.$

Dritter Fall. Der wegzuschaffende Winkel ist ein einspringender, also > 2 R und von der Art, daß, wenn man die zu beiden Seiten anliegenden Ecken verbindet, und durch den Scheitel der wegzuschaffenden Ecke eine Parallele mit dieser Verbindungslinie zieht, diese keinen der Schenkel der an dem wegzuschaffenden anliegenden Winkel innerhalb der Figur schneidet.

Es sey $\angle fab$ der wegzuschaffende Winkel von der Art, daß, wenn man fb zieht, und durch a die pq parallel fb, die pq weder die fg noch die bc innerhalb der Figur schneidet.



Man ziehe durch den Scheitel a der wegzuschaffenden Ecke die Diagonale ac, durch welche das Δabc von der Figur abgeschnitten wird; durch b ziehe man die bm parallel ca, so schneidet diese af in α. Wird nun αc gezogen, so ist

Figur $\alpha cdegf = abcdegf$;

und daher $\alpha cdegf$ die gesuchte Figur.

Beweis. Es ist $\Delta a\alpha c = \Delta abc$ (37.)
und $acdegf = acdegf$

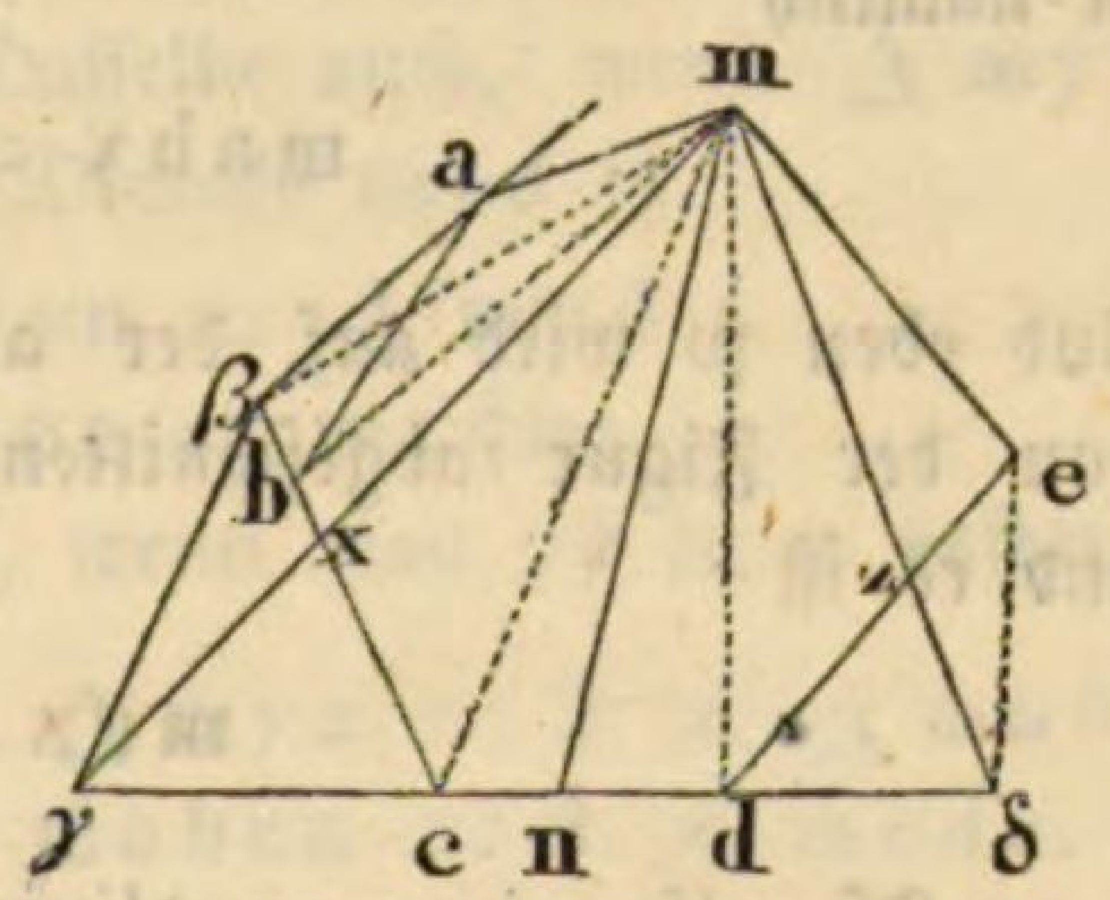
folglich ist auch $\underbrace{\Delta a\alpha c + acdegf} = \underbrace{\Delta abc + acdegf}$ (G. 2.)
und daher $\alpha cdegf \quad = \quad abcdegf$

und in $\alpha cdegf$ kömmt $\angle \alpha$ für $\angle a$ vor, und $\angle b$ ist weggefallen; die Figur $\alpha cdegf$ hat also einen Winkel weniger als die gegebene.

4) **Folgerung.** Es ist also möglich, „jede gegebene geradlinige Figur in eine andere zu verwandeln, die eine Seite weniger als die gegebene hat". Wird nun die, durch diese Verwandlung

erhaltene Figur ferner verwandelt, so erhält man eine Figur, die noch eine Seite weniger hat. Dasselbe Verfahren kann so oft wiederholt werden, so lange sich in der neu erhaltenen Figur noch eine Diagonale ziehen läßt. Da nun aber eine solche Diagonale auch noch bei dem Viereck möglich ist, so folgt, daß man durch fortgesetzte Verwandlung endlich ein Dreieck erhalten muß; und es ist daher auf diese Weise möglich, jede gegebene geradlinige Figur in ein Dreieck zu verwandeln.

5) Wenn man von einem Punkte **m**, in dem Umfange von **a b c d e m**, als Anfangspunkt die zunächst an diesem Punkte anliegende Ecke **a** wegschafft, indem man **mb** zieht, derselben durch **a** die $a\beta$ parallel, bis sie die verlängerte **cb** in β schneidet und **m** mit β verbindet: so ist natürlich der abgeschnittene Theil **mab** der Figur eben so groß, als der dafür hinzugekommene Theil $m\beta b$. Wird nun ferner, in der verwandelten Figur $m\beta c d e$, die nach derselben Richtung zunächst an **m** anliegende Ecke β weggeschafft; zieht man also **mc**, mit derselben durch β die $\beta\gamma$ parallel, welche die **dc** in γ schneidet; und verbindet man nun **m** mit γ: so ist jetzt auch der durch **mc** abgeschnittene Theil $m\beta c$ der Figur dem dafür hinzugekommenen $m\gamma c$ gleich.



$$\text{Nun ist aber } \triangle mab = \triangle m\beta b$$
$$\text{und } \triangle mbc = \triangle mbc$$
$$\text{folglich ist auch } mabc = \triangle m\beta c \quad (\text{G. } 2.)$$
$$\text{Weil nun } \triangle m\beta c = \triangle m\gamma c$$
$$\text{so ist } mabc = \triangle m\gamma c. \quad (\text{G. } 1.)$$

Schafft man also in einer Figur die zunächst an **m** anliegende Ecke **a** weg, hierauf in der verwandelten Figur die, in derselben Richtung zunächst an **m** anliegende, Ecke β u. s. w., und wird hierdurch der Theil **mabc** der Figur in $m\gamma c$ verwandelt: so ist nun nothwendig auch

$$mabc = \triangle m\gamma c$$
$$\text{und weil } \triangle mxc = \triangle mxc$$
$$\text{so ist } mabx = \triangle cx\gamma \quad (\text{G. } 3.)$$

Durch die Linie mγ wird also ein eben so großes Stück mabx von der Figur abgeschnitten, als das dafür neu hinzugekommene Dreieck cxγ beträgt.

Wird nun auch auf der anderen Seite der Figur die immer zunächst an m anliegende Ecke weggeschafft, also hier die Ecke e, wodurch Δmed abgeschnitten wird, und dafür Δmδd hinzukömmt, so ist nun nicht nur die ganze Figur mabcde in ein Dreieck m$\gamma\delta$ verwandelt, sondern es hat dieses Dreieck auch zugleich eine solche Lage, daß auf der einen Seite durch mγ eben so Viel von der Figur abgeschnitten wird, als auf eben dieser Seite durch eben diese Linie neu hinzukömmt; es ist nämlich

$$mabx = cx\gamma.$$

Und eben so wird auf der anderen Seite durch mδ eben so viel von der Figur abgeschnitten, als durch diese Linie hinzukömmt, und es ist

$$mez = zd\delta.$$

Ist also eine geradlinige Figur gegeben, so läßt sich diese immer so in ein Dreieck verwandeln, daß die Spitze desselben in einem bestimmten Punkte m des Umfanges liegt, und die Grundlinie $\gamma\delta$ mit einer zum voraus bestimmten Seite cd der Figur zusammenfällt; und man kann hierbei die Verwandlung immer so vornehmen, daß auf jeder Seite der Figur eben so Viel durch eine Seite des Dreiecks abgeschnitten wird, als auf eben dieser Seite neu hinzukömmt. Das Verfahren hierbei besteht bloß darin: daß man auf jeder Seite von m immer die zunächst an m anliegende Ecke wegschafft, bis man zu einer Ecke kömmt, die mit der Seite der Figur, in welcher die Grundlinie des Dreiecks liegen soll, in gerader Linie liegt. Uebrigens bleibt das Verfahren dasselbe, wenn der Punkt m keine Ecke der Figur ist, sondern in einer Seite derselben liegt.

6) Ist in der obigen Figur mabcde = Δm$\gamma\delta$, und ist die Verwandlung so vorgenommen, daß mabx = cxγ; und man nimmt nun in cd beliebig einen Punkt n an und zieht mn, so ist nun auch

$$mabcn = \Delta m\gamma n.$$

Wird aber $\gamma\delta$ in n halbirt,

$$\text{so ist } \Delta\, m\gamma n = \Delta\, m\delta n \quad (38.)$$

$$\text{also } \Delta\, m\gamma n = \tfrac{1}{2}\, \Delta\, m\gamma\delta$$

$$\text{da nun } \Delta\, m\gamma n = mabcn$$

$$\text{so ist } mabcn = \tfrac{1}{2}\, \Delta\, m\gamma\delta$$

$$\text{aber } \Delta\, m\gamma\delta = mabcde$$

$$\text{folglich ist } mabcn = \tfrac{1}{2}\, mabcde.$$

Die Figur mabcde wird also durch mn halbirt, wenn man $\gamma\delta$ in n halbirt und der Punkt n in der Linie cd liegt.

Eben so folgt, daß „wenn $\Delta\, m\gamma n$ der dritte Theil ist von $\Delta\, m\gamma\delta$, auch mabcn der eben so vielste Theil von der Figur mabcde seyn muß"; und es gilt Dasselbe auch, wenn $\Delta\, m\gamma n$ irgend ein anderer Theil des ganzen Dreiecks $m\gamma\delta$ ist.

7) Ist $\gamma n = n\delta$, so ist auch $\Delta\, m\gamma n = \Delta\, mn\delta$
und daher $mabcn = medn$;
die Figur wird also durch mn halbirt, wenn man $\gamma\delta$ in n halbirt.

Ist $\gamma n = 2 \times n\delta$, so ist auch $\Delta\, m\gamma n = 2 \times \Delta\, mn\delta$
und daher $mabcn = 2 \times medn$.
Soll also die Figur durch mn so getheilt werden, daß der eine Theil mabcn zweimal so groß, als der andere medn wird: so braucht man nur $\gamma\delta$ in n so zu theilen, daß $n\gamma = 2 \times n\delta$, daß also $n\delta = \tfrac{1}{3}\, \gamma\delta$ wird ꝛc.

Fortsetzung der Aufgaben, die mit Hülfe der Sätze des ersten Buches der Elemente sich lösen lassen.

---

§. 11.

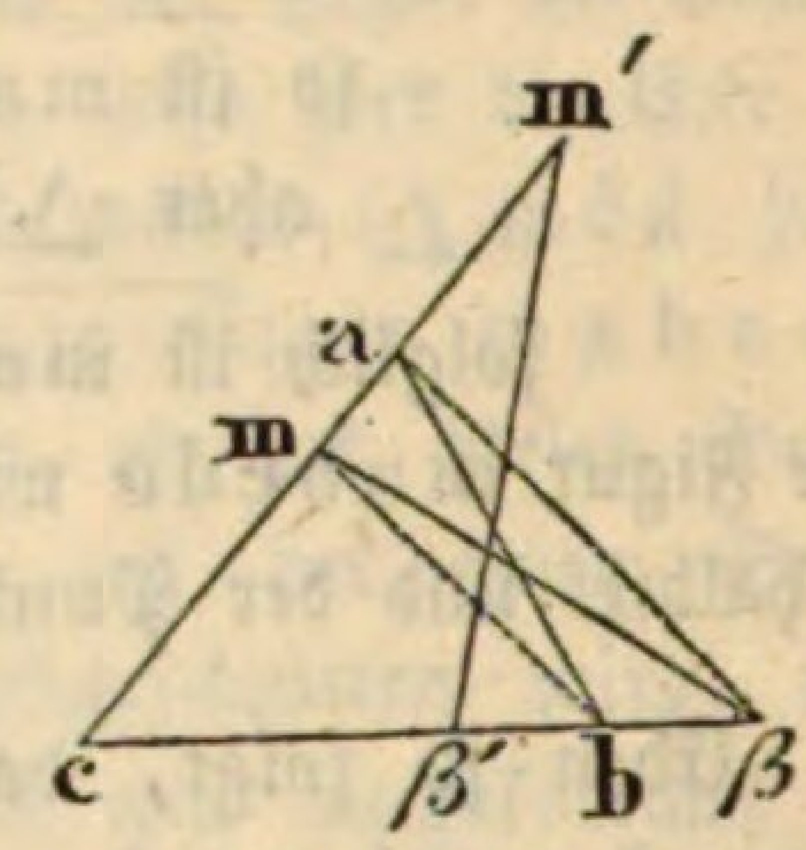
Aufgaben von der Verwandlung und Theilung des Dreiecks.

Aufgabe 131. In der einen Seite des Dreiecks abc ist ein Punkt m gegeben; man soll von diesem Punkte aus die $m\beta$ so ziehen, daß $\Delta\, m\beta c = \Delta\, abc$ werde.

Analysis. Es soll seyn $\Delta\, m\beta c = \Delta\, abc$
Da nun, wenn mb gezogen wird, $\Delta\, mbc = \Delta\, mbc$

so muß auch seyn $\Delta\, m\beta b = \Delta\, mab$ (G. 3.)
und daher $a\beta$ parallel mb (39.)

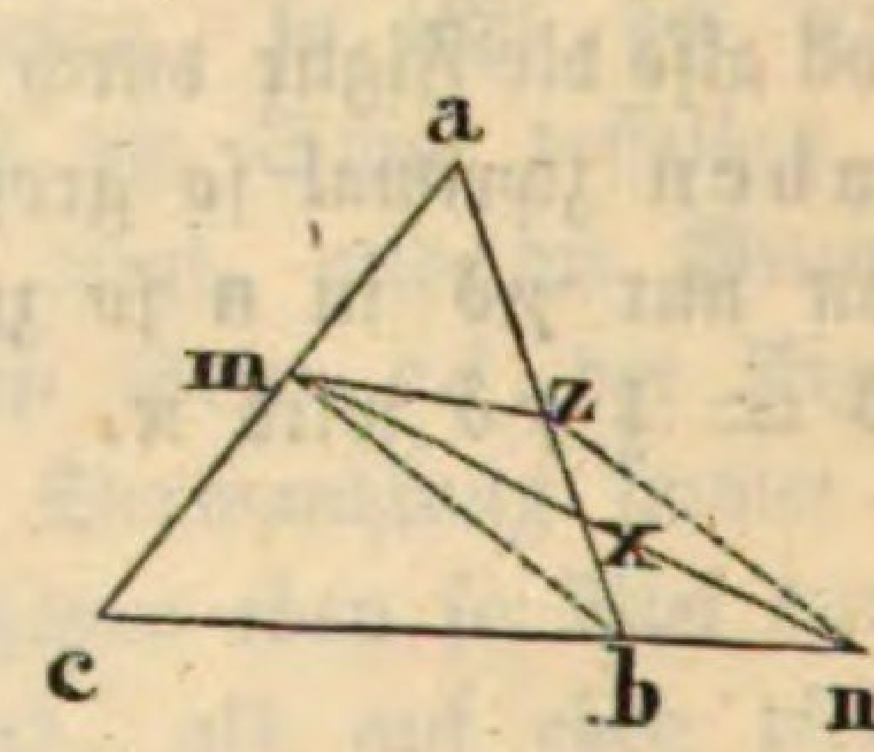
Nun ist mb gegeben und auch der Punkt a, folglich ist $a\beta$ der Lage nach gegeben; aber auch cb ist der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt β.



Auflösung. Ziehe mb, und derselben die $a\beta$ durch a parallel, welche die verlängerte cb in β schneidet. Wird nun $m\beta$ gezogen, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 132. In der Verlängerung der einen Seite des Dreiecks abc der obigen Figur ist ein Punkt m′ gegeben; man soll von diesem Punkte aus die $m'\beta'$ so ziehen, daß $\Delta\, m'\beta' c = \Delta\, abc$ wird.

Aufgabe 133. Von einem Punkte m der einen Seite ac des Dreiecks abc ist eine Linie gezogen, welche die verlängerte cb in n schneidet; man soll in der Seite ab den Punkt z so bestimmen, daß, wenn mz gezogen wird, $\Delta\, mxz = \Delta\, bxn$ wird.



Auflösung. Ziehe mb und mit derselben durch n eine Parallele, so schneidet diese die ab in dem gesuchten Punkte z.

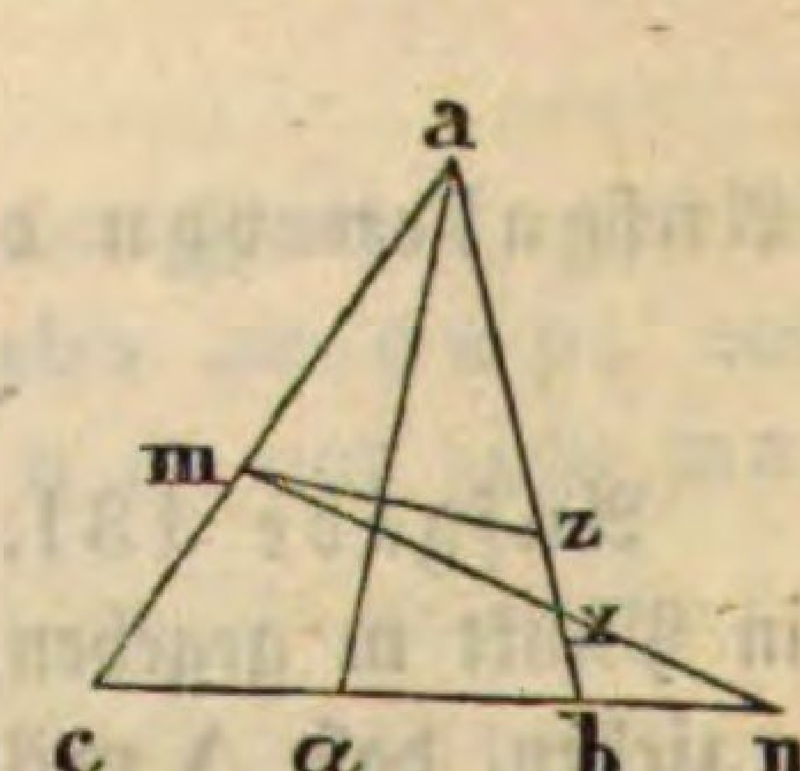
Aufgabe 134. Von dem Punkte m der Seite ac des Dreiecks abc aus soll eine Linie durch das Dreieck so gezogen werden, daß dasselbe durch diese Linie halbirt wird.

Auflösung. Halbire cb in α und ziehe $a\alpha$, so ist

$\Delta\, ac\alpha = \Delta\, a\alpha b$, und daher auch

$\Delta\, ac\alpha = \frac{1}{2}\, \Delta\, abc$.

Wird nun mn so gezogen, daß $\Delta\, mcn = \Delta\, ac\alpha$ (Aufg. 131.), so ist auch $\Delta\, mcn = \frac{1}{2}\, \Delta\, abc$.



Liegt nun n zwischen c und b, so ist mn die gesuchte Theilungslinie; liegt n

aber in der Verlängerung von cb, wie Dieses hier der Fall ist: so ziehe mz, so daß

$$\Delta\, mzx = \Delta\, bxn \quad \text{(Aufg. 133.)}$$

so ist mz die Theilungslinie.

Beweis. Da $\Delta\, mzx = \Delta\, bxn$ (p. c.)

$$mcbx = mcbx$$

so ist auch $mcbz = \Delta\, mcn$ (G. 2.)

da nun $\Delta\, mcn = \Delta\, ac\alpha = \frac{1}{2}\,\Delta\, abc$ (p. c.)

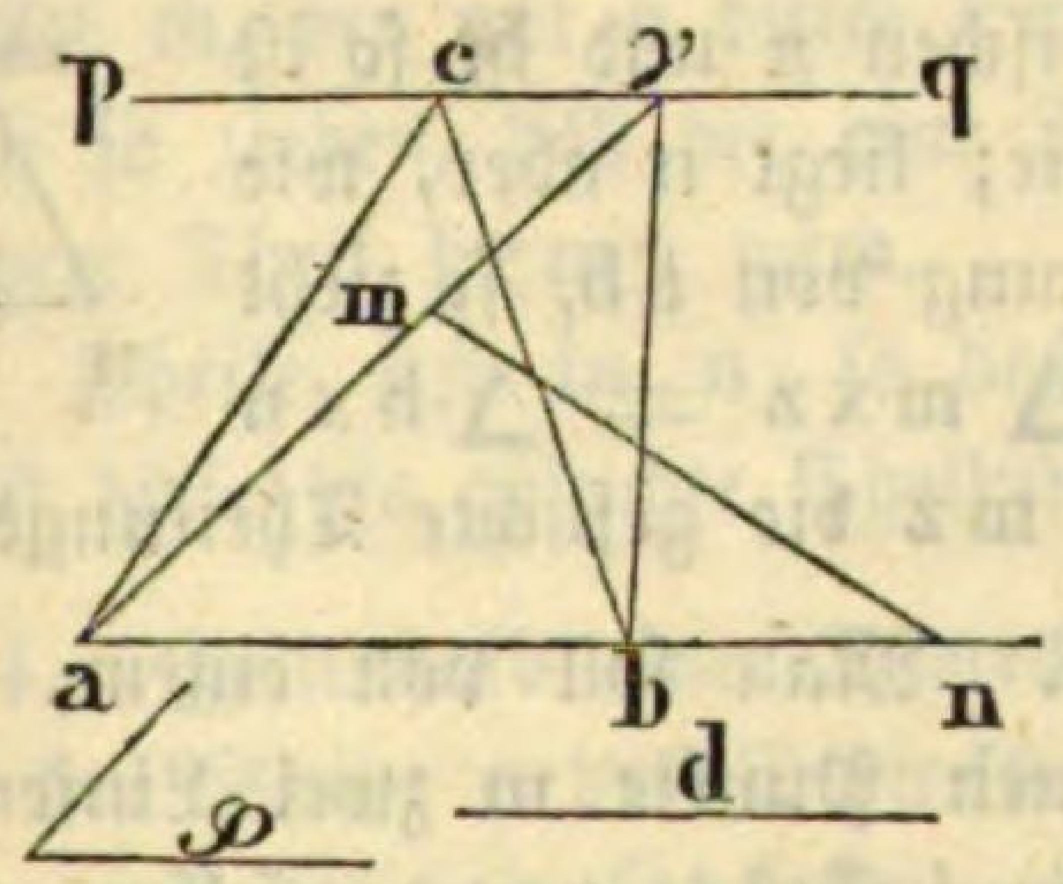
so ist auch $mcbz = \frac{1}{2}\,\Delta\, abc$.

Aufgabe 135. Man soll von einem gegebenen Punkte, in dem Umfange eines Dreiecks, eine Linie durch dasselbe so ziehen: daß durch diese Linie das Dreieck in zwei Theile getheilt wird, von welchen der eine zweimal so groß als der andere ist.

Aufgabe 136. Es ist ein Dreieck gegeben; man soll dasselbe in ein anderes verwandeln, von welchem eine Seite und der eine an derselben anliegende Winkel gegeben ist.

Gegeben $\Delta\, abc$.

Gesucht $\Delta\, man = \Delta\, abc$, so daß $am = d$ und $\llcorner\, man = \llcorner\, \varphi$.



Auflösung. Ziehe durch c die pq parallel ab (31.) und setze in a an ba den $\llcorner\, ba\gamma = \varphi$ (23.)

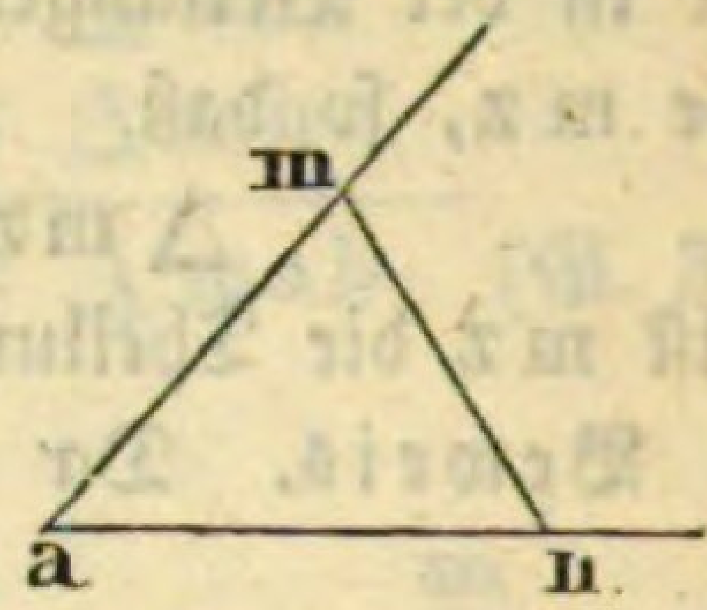
so ist, wenn γb gezogen wird, $\Delta\, ab\gamma = \Delta\, abc$ (37.)

Nimmt man nun $am = d$ und zieht mn, so daß $\Delta\, amn = \Delta\, a\gamma b$ (Aufg. 131.)

so ist auch $\Delta\, amn = \Delta\, abc$, und zugleich $am = d$ und $\llcorner\, man = \varphi$; es ist also das Verlangte geschehen.

Aufgabe 137. In dem einen Schenkel eines Winkels a ist ein Punkt m gegeben; man soll durch diesen Punkt die Linie mn so ziehen, daß das dadurch abgeschnittene Dreieck man einem gegebenen Dreieck gleich werde.

Auflösung. Verwandelt man das gegebene Dreieck in ein anderes, in welchem die Linie ma und ∟ a vorkommen, so wird die zweite an ∟ a anliegende Seite = an; und es ist hierdurch der Punkt n gefunden.



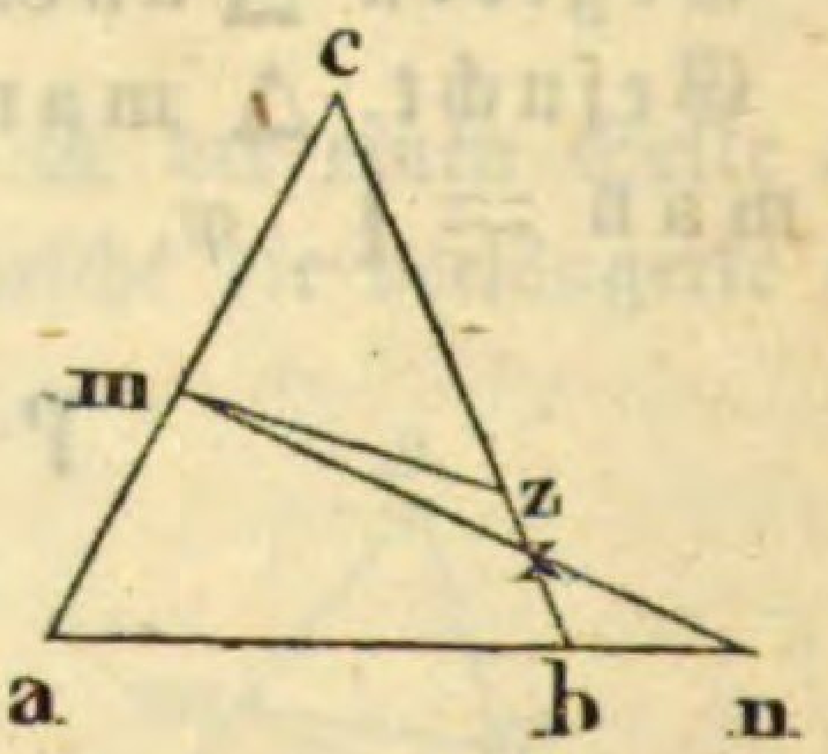
Aufgabe 138. Man soll von der einen Ecke eines Dreiecks eine Linie durch das Dreieck ziehen, die von demselben ein Stück abschneidet, das einem anderen gegebenen kleineren Dreieck gleich ist.

Aufgabe 139. In der einen Seite eines Dreiecks ist ein Punkt gegeben; man soll von diesem Punkte aus eine Linie ziehen, durch welche von dem Dreieck ein Stück abgeschnitten wird, das einem andern gegebenen kleineren Dreieck gleich ist.

Gegeben Δ abc und der Punkt m in der Seite ac.

Gesucht der Punkt z, so daß abzm einem gegebenen Dreiecke gleich wird.

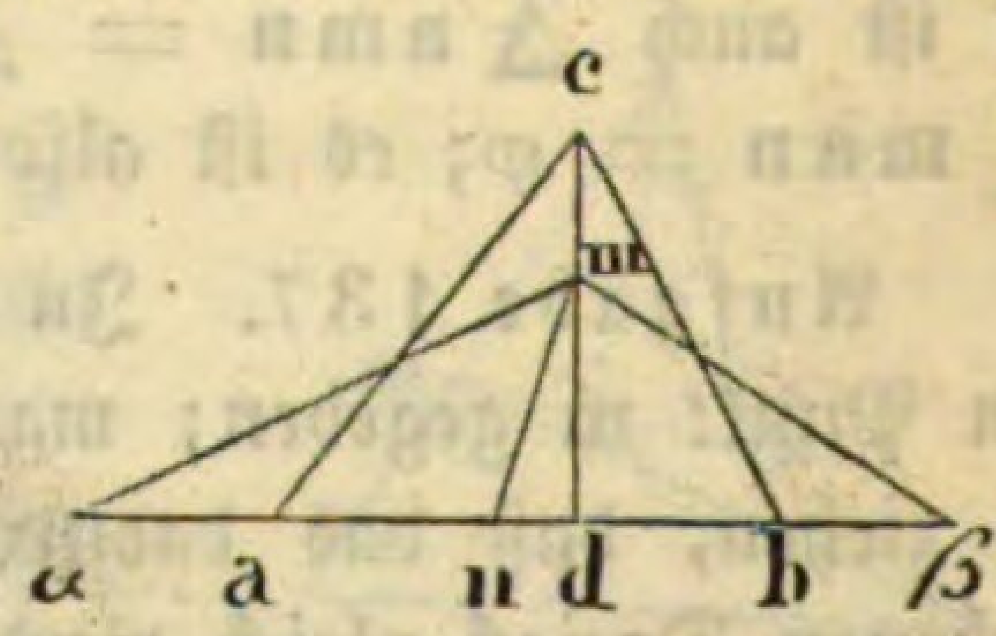
Auflösung. Verwandle das kleinere Dreieck in ein anderes man, in welchem die Seite am und ∟ a vorkommen (Aufg. 136).



Liegt nun n zwischen a und b, so ist mn die Theilungslinie; liegt n aber, wie hier, in der Verlängerung von ab, so zieht man mz, so daß Δ mxz = Δ bxn (Aufg. 133.); so ist mz die gesuchte Theilungslinie.

Aufgabe 140. Man soll von einem, in der einen Seite eines Dreiecks gegebenen Punkte m zwei Linien durch das Dreieck ziehen, durch welche zwei Stücke von demselben abgeschnitten werden, die zwei gegebenen Dreiecken gleich sind; die zusammen kleiner sind, als das Dreieck, in dessen Umfang der Punkt m gegeben ist.

Aufgabe 141. Innerhalb eines Dreiecks abc ist ein Punkt m gegeben, der mit der einen Spitze c durch eine gerade Linie mc verbunden ist; man soll das gegebene Dreieck abc in ein anderes verwandeln, dessen Spitze in m liegt und dessen Grundlinie mit ab zusammenfällt; und es soll, auf jeder Seite von cm, der abgeschnittene Theil von dem Dreieck dem auf eben dieser Seite hinzukommenden Theile gleich seyn.



Auflösung. Verlängere cm, bis sie die ab in d schneidet, und ziehe

$$m\alpha, \text{ so daß } \triangle md\alpha = \triangle cda \quad (\text{Aufg. } 131.)$$
$$\text{und } m\beta, \text{ „ „ } \triangle md\beta = \triangle cdb \quad \text{„}$$
$$\text{so ist } \triangle \alpha m\beta = \triangle abc$$

und das Verlangte geschehen.

Aufgabe 142. Innerhalb des Dreiecks abc ist ein Punkt m gegeben und mit der Spitze c des Dreiecks verbunden; man soll mn so ziehen, daß durch cm und mn das Dreieck halbirt wird.

Auflösung. Verwandele $\triangle$ abc in $\triangle \alpha m\beta$, nach der Anleitung Aufg. 141., und halbire $\alpha\beta$ in n und ziehe mn,

$$\text{so ist } \triangle \alpha mn = \triangle \beta mn. \quad (38.)$$

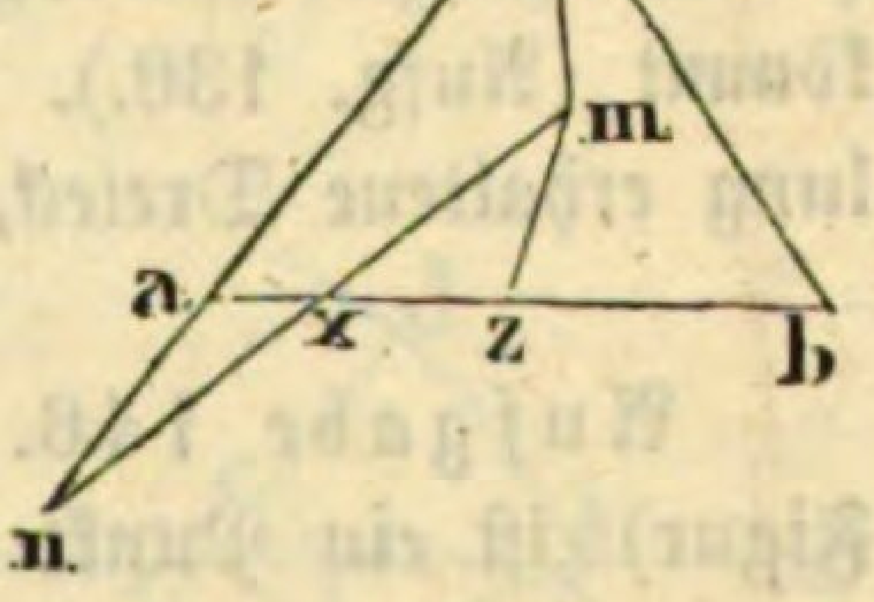
und daher auch acmn = bcmn.

Anmerkung. Fällt der Punkt n in die Verlängerung von ab, so wird der herausfallende Theil in das Dreieck hineingeschafft (nach der Anleitung, Aufgabe 133.).

Aufgabe 143. Man soll von dem, innerhalb des Dreiecks abc gegebenen Punkte m, der mit c durch cm verbunden ist (Fig. Aufg. 141.), die mn so ziehen, daß der eine Theil acmn zweimal so groß, als der andere Theil bcmn wird.

Auflösung. Theile $\alpha\beta$ in n, so daß $\alpha n = 2 \times \beta n$; und ziehe mn, so ist diese die gesuchte Theilungslinie.

Aufgabe 144. Innerhalb eines Dreiecks abc ist ein Punkt m gegeben, der mit der Spitze c des Dreiecks durch mc verbunden ist; man soll von m aus die mz so ziehen, daß der Theil cmza einem gegebenen Dreiecke gleich werde, das kleiner als $\triangle$ abc ist.



Auflösung. Verwandle das kleinere Dreieck in ein anderes mcn, in welchem eine Seite = mc, und ein an derselben anliegender Winkel = $\llcorner$ mca vorkömmt (Aufgabe 136.), und ziehe hierauf mz, so daß $\triangle$ mzx = $\triangle$ axn (Aufg. 133.), so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 145. Innerhalb eines Dreiecks abc ist ein Punkt m gegeben, der mit einem Punkte d in der einen Seite des Dreiecks

durch die gerade Linie md verbunden ist; man soll $\Delta\, m\alpha\beta =$ $\Delta\, abc$ so zeichnen, daß der auf jeder Seite von md durch $m\alpha$ und $m\beta$ abgeschnittene Theil des Dreiecks abc eben so groß sey, als der auf eben dieser Seite hinzukommende Theil durch $\Delta\, m\alpha\beta$. Es soll also seyn $mdx = ax\alpha$, und $mdcz = bz\beta$.

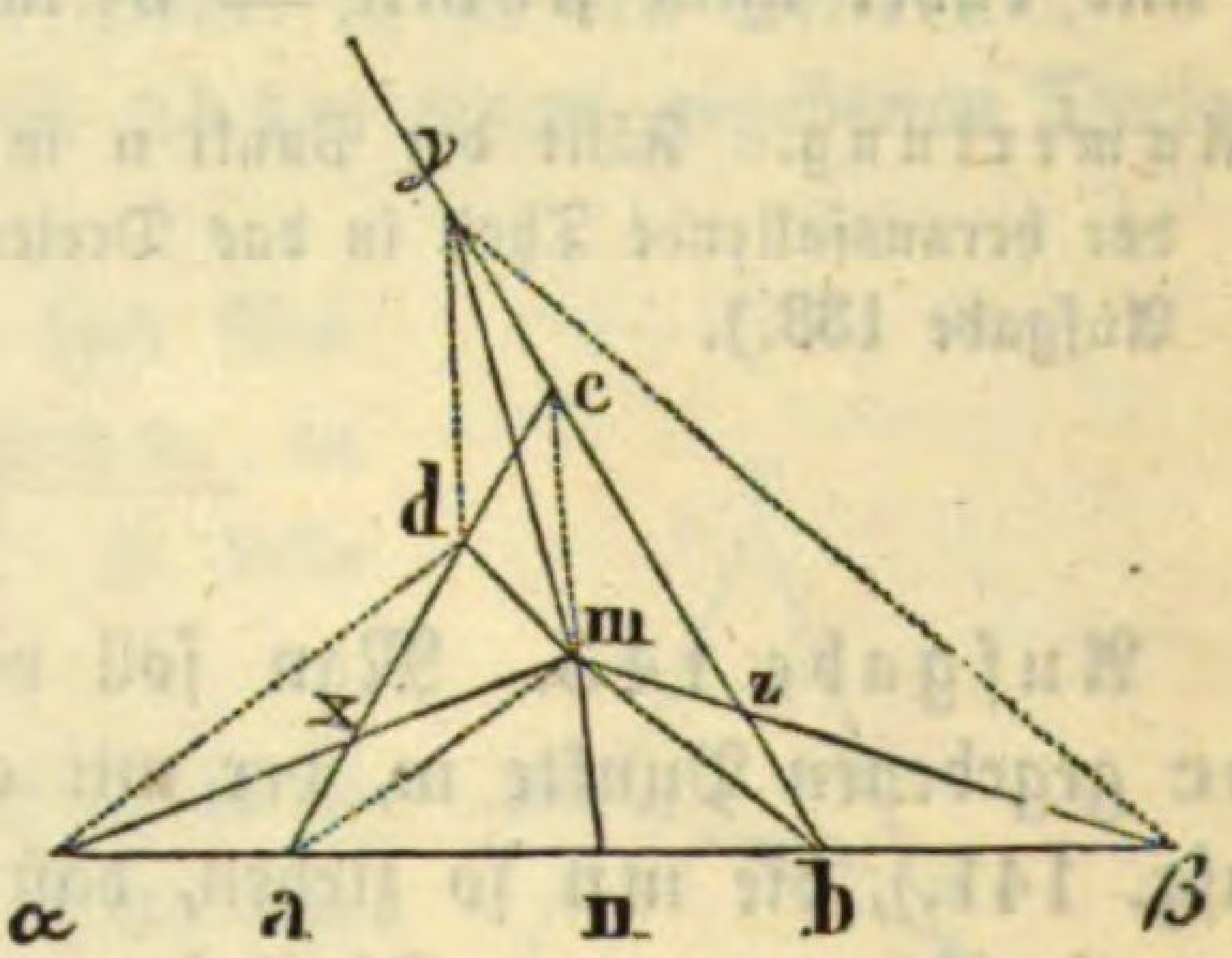
Erste Auflösung. Ziehe ma und mb; schaffe in der Figur mdab die Ecke d weg, indem durch d die $d\alpha$ parallel ma gezogen wird, bis sie die verlängerte ba in α schneidet; und verbinde m mit α durch $m\alpha$, wodurch $\Delta\, m\alpha a = \Delta\, mda$, und daher auch

$$\Delta\, ax\alpha = \Delta\, mxd \text{ wird.}$$

Ferner schaffe nun in der Figur mdcba zuerst die Ecke d weg; ziehe also mc, mit derselben durch d die $d\gamma$ parallel, welche die verlängerte bc in γ schneidet und verbinde γ mit m, wo nun

$$\Delta\, mcd = \Delta\, mc\gamma \text{ ist;}$$

und daher auch $mdcba =$ $m\gamma ba$. Von der Figur $m\gamma ba$ schaffe nun die Ecke γ weg; ziehe also mb, und derselben parallel die $\gamma\beta$ durch γ, welche die verlängerte ab in β schneidet, und ziehe βm, so ist



$$\Delta\, bm\beta = \Delta\, bm\gamma$$

und daher auch $am\beta = am\gamma b$

und weil $am\gamma b = amdcb$

so ist auch $am\beta = amdcb$

und daher $\Delta\, \alpha m\beta$ das verlangte Dreieck.

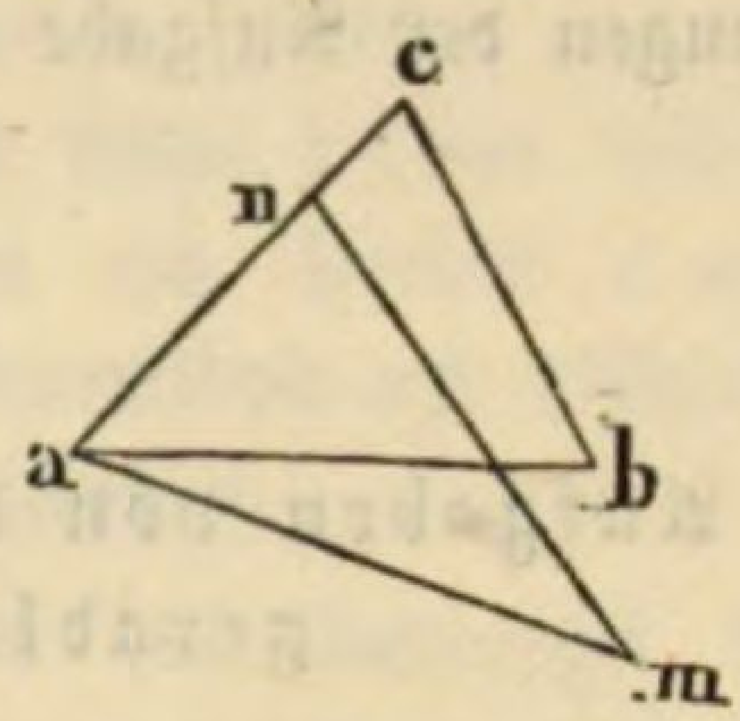
Zweite Auflösung. Ziehe $m\alpha$, so daß $\Delta\, am\alpha =$ $\Delta\, amd$; und verwandele nun $\Delta\, abc$ in ein anderes, in welchem die Seite $m\alpha$ und der an derselben anliegende Winkel $m\alpha b$ vorkömmt (Aufg. 136.). Ist nun $\Delta\, m\alpha\beta$ das durch diese Verwandlung erhaltene Dreieck, so ist dasselbe das Gesuchte.

Aufgabe 146. Innerhalb des Dreiecks abc (der obigen Figur) ist ein Punkt m gegeben, der mit einem gegebenen Punkte d der einen Seite durch md verbunden ist; man soll von m aus die Linie mn so ziehen, daß durch md und mn das Dreieck halbirt wird.

Auflösung. Verwandle Δ abc in $m\alpha\beta$, so daß Δ $ax\alpha$ $= \Delta$ mxd wird (Aufg. 145.); halbire $\alpha\beta$ in n, und ziehe mn: so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 147. Innerhalb eines Dreiecks ist ein Punkt m gegeben, der mit dem in der einen Seite gegebenen Punkte d durch md verbunden ist; man soll mn so ziehen, daß der Theil mdan einem gegebenen Dreiecke gleich werde, das kleiner ist als Δ abc.

Aufgabe 148. Ein Dreieck abc ist gegeben, und von der einen Ecke a desselben aus ist eine Linie von gegebener Länge am gezogen; man soll in ac den Punkt n finden, daß, wenn mn gezogen wird, Δ amn $= \Delta$ abc werde.



Auflösung. Diese wird mit Hülfe der Aufgabe 136. gefunden.

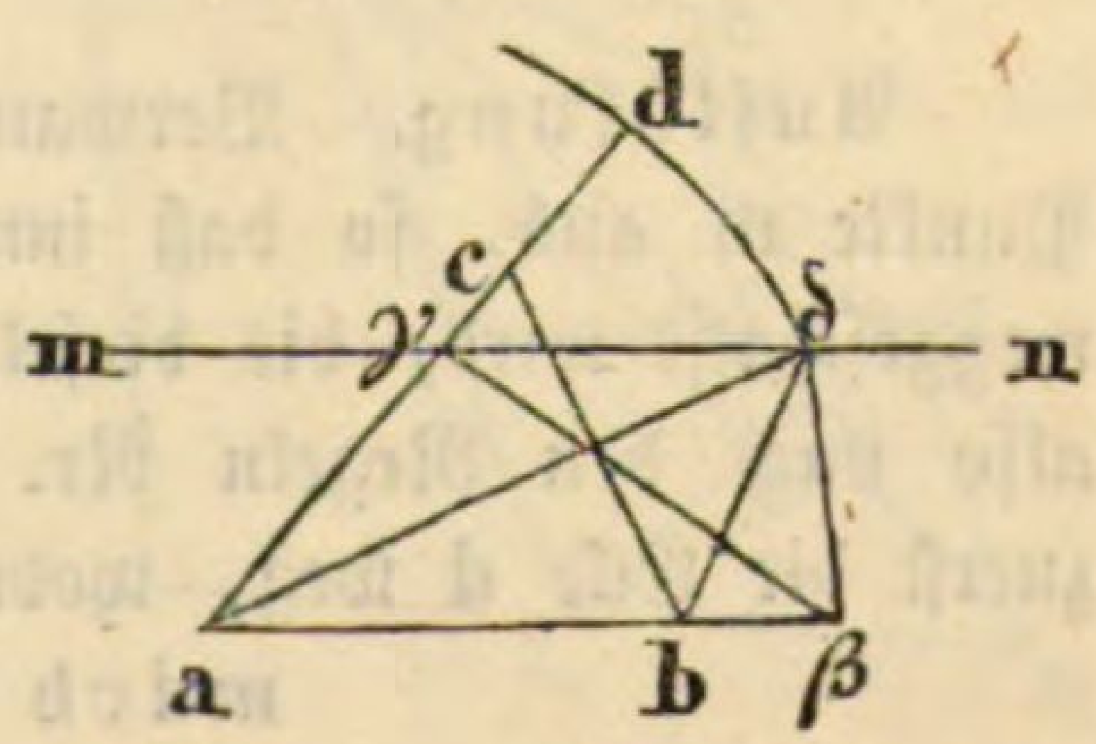
Aufgabe 149. Das Dreieck abc und die Linie am sind gegeben; man soll mn so ziehen, daß Δ amn halb so groß, als Δ abc wird.

Aufgabe 150. Ein Dreieck abc ist gegeben, und die beiden Linien ad und $a\beta$, die von a aus auf ab und ac abgeschnitten sind; man soll ein Dreieck aus diesen beiden Seiten beschreiben, das dem gegebenen Dreieck abc gleich sey.

Analysis. Es sey $a\delta\beta$ das verlangte Dreieck, also $a\delta =$ ad und $\Delta\, a\delta\beta = \Delta$ abc; man ziehe durch δ die mn der $\alpha\beta$ parallel; und an den Punkt γ, in welchem ac von mn geschnitten wird, die $\beta\gamma$: so ist

$$\Delta\, a\beta\gamma = \Delta\, a\beta\delta \quad (37.)$$
$$\text{und da } \Delta\, a\beta\delta = \Delta\, abc \quad (p.\ h.)$$
$$\overline{\Delta\, a\beta\gamma = \Delta\, abc.}$$

Nun ist Δ abc und der Punkt β gegeben, folglich kann γ gefunden werden (Aufg. 131.). Da nun mn parallel ab seyn soll, so ist mn der Lage nach gegeben; aber auch a ist der Lage nach gegeben und ad der Größe nach, folglich für $a\delta =$ ad auch δ der Lage nach gegeben, wodurch $\Delta\, a\beta\delta$ bestimmt ist.



Auflösung. Ziehe $\beta\gamma$, so daß $\Delta\ a\beta\gamma = \Delta\ abc$ (Aufg. 131.); durch γ ziehe die mn der ab parallel, und schlage aus a als Mittelpunkt mit ad einen Kreisbogen, der die mn in δ schneidet, ziehe hierauf aδ und $\beta\delta$, so ist $\Delta\ a\beta\delta$ das verlangte Dreieck.

Determination. Es darf nicht ad kleiner seyn als der normale Abstand des Punktes γ von ab; und wenn ad größer ist, als dieser Abstand, so sind zwei Dreiecke möglich, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

---

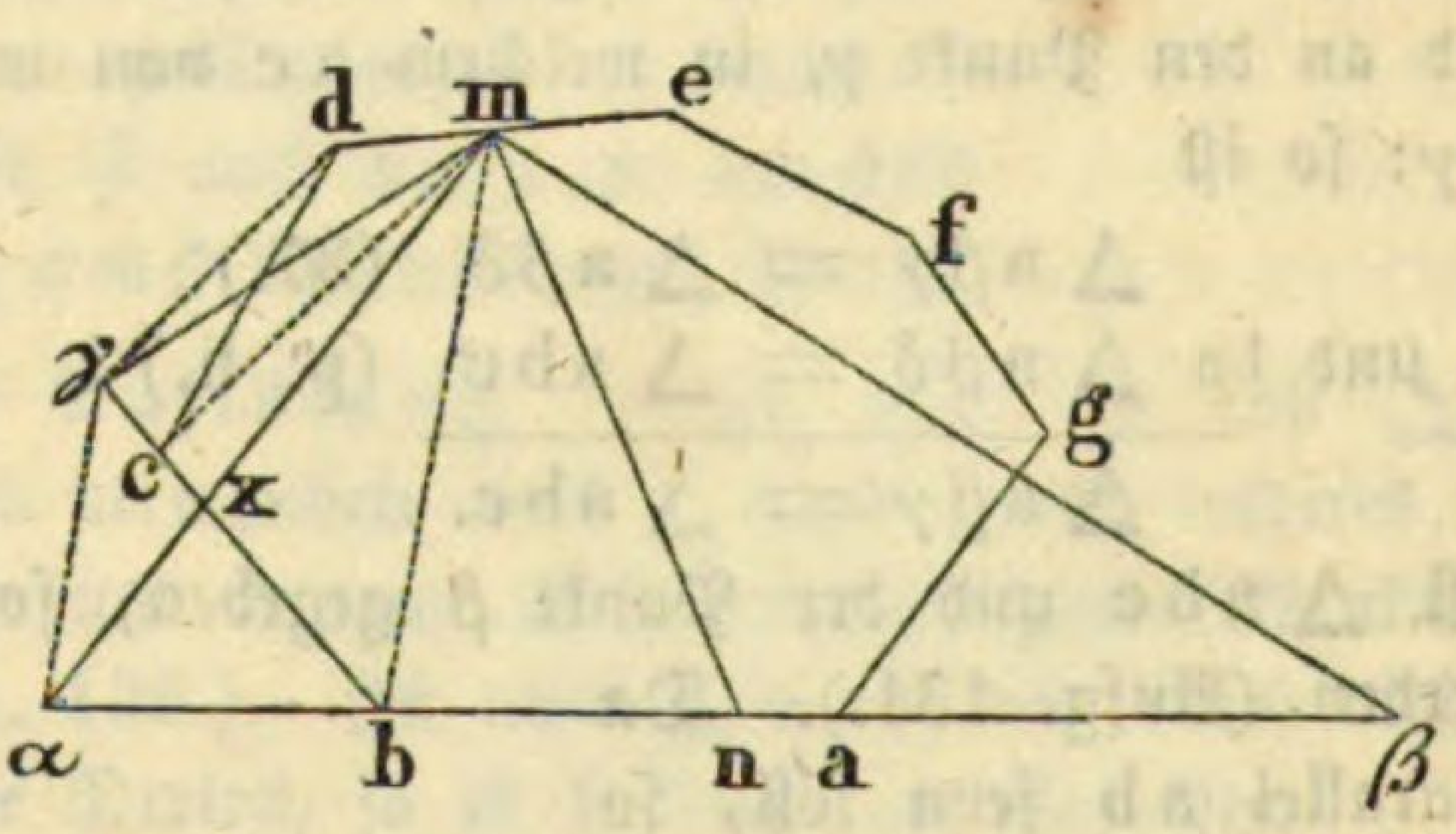
§. 12.

Aufgaben von der Verwandlung und Theilung der geradlinigen Figuren überhaupt.

Aufgabe 151. Eine gegebene Figur soll in ein Dreieck verwandelt werden, dessen Spitze in einem gegebenen Punkte des Umfangs liegt, und dessen Grundlinie mit einer gegebenen Seite der Figur zusammenfällt; und es soll auf jeder Seite durch das Dreieck eben so viel von der Figur abgeschnitten werden, als auf eben dieser Seite durch dasselbe hinzukömmt.

Gegeben die Figur abcdefg, der Punkt m, in welchem die Spitze des Dreiecks liegen soll, und die Grundlinie desselben soll mit ab zusammenfallen.

Gesucht $\Delta\ \alpha m\beta$ = abcdefg, und es soll seyn mxcd = bxα.



Auflösung. Verwandle die Figur in ein Dreieck, von dem Punkte m aus, so daß immer die zunächst an m anliegende Ecke weggeschafft wird, bis dieselbe in der Linie ab liegt. Man schaffe also nach den Regeln Nr. 5. und 6. der gegenwärtigen Beilage zuerst die Ecke d weg, wodurch

mdcb = mγb wird;

hierauf schaffe man γ weg, so wird $m\gamma b = m\alpha b$, wo nun α bereits in der Linie ab liegt.

Auf gleiche Weise werde auf der andern Seite von m immer die zunächst an m anliegende Ecke weggeschafft, bis dieselbe in ab liegt, so ist alsdann

$$mefga = m\beta a$$

und es ist nun $\Delta\, \alpha m \beta$ das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 152. In dem Umfange der obigen Figur abcdefg ist ein Punkt m gegeben; man soll von diesem Punkte aus die Linie mn so ziehen, daß die Figur durch diese Linie halbirt wird.

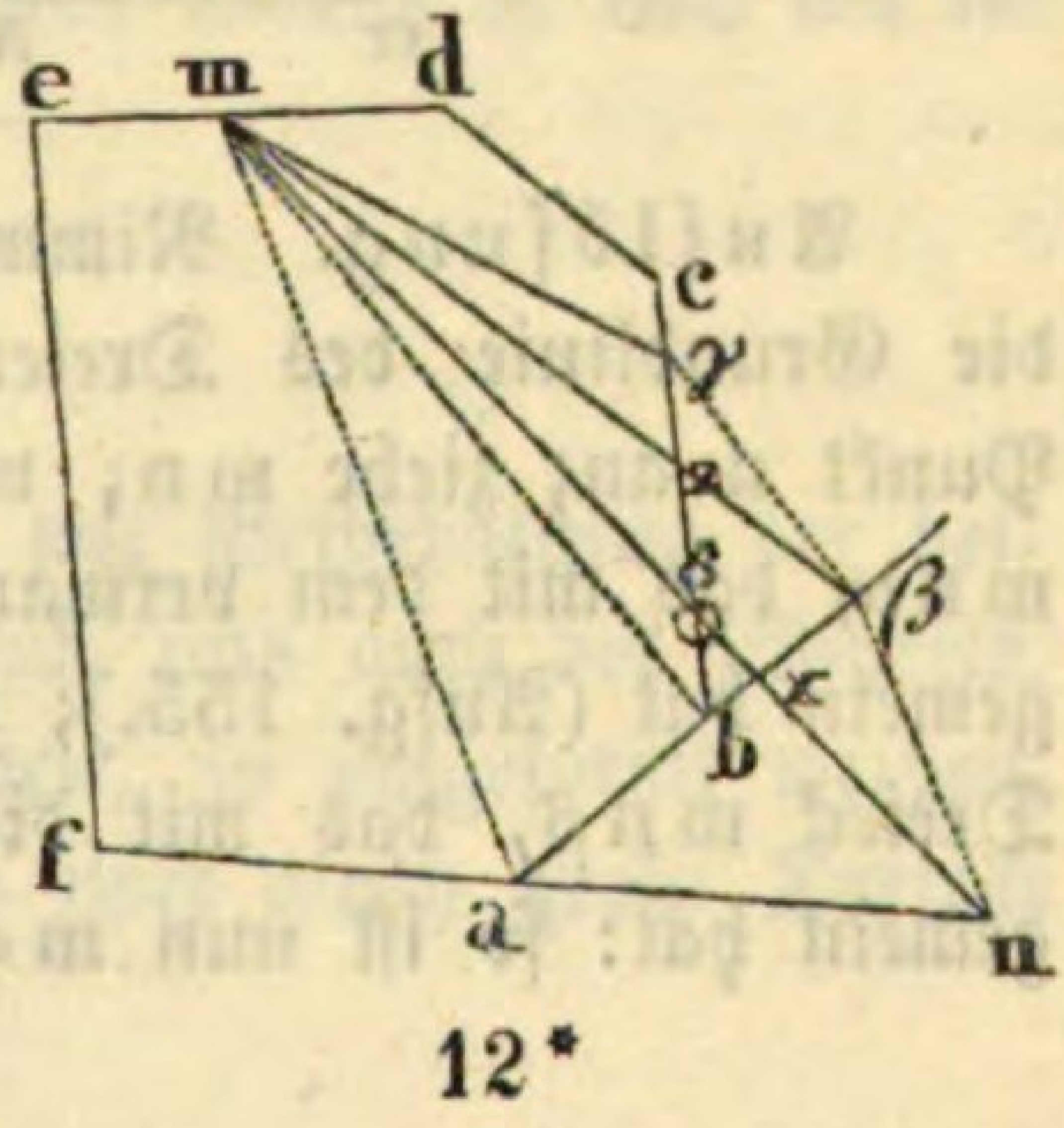
Auflösung. Verwandle die Figur in ein Dreieck $\alpha m \beta$ (nach der Anleitung Aufg. 151.) halbire die Grundlinie $\alpha\beta$ desselben in n, und ziehe mn: so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 153. Von dem Punkte m des Umfanges der Figur abcdefg soll die Linie mn so gezogen werden, daß der dadurch abgeschnittene Theil mdcbn der Figur einer anderen gegebenen kleineren Figur gleich werde.

Auflösung. Verwandle die Figur abcdefg in ein Dreieck $\alpha m \beta$ (nach Aufg. 151.), und verwandle die kleinere abzuschneidende Figur ebenfalls in ein Dreieck; dieses Dreieck verwandle in ein anderes, in welchem die Seite $m\alpha$ und der anliegende Winkel $m\alpha\beta$ vorkömmt (Aufg. 136.). Nimmt man nun αn so groß, als die zweite an $\llcorner\, \alpha$ anliegende Seite dieses Dreiecks gefunden wird, so ist dieses Dreieck $= m\alpha n$; es ist also $\Delta\, m\alpha n$ der abzuschneidenden Figur gleich, und da auch $\Delta\, m\alpha n = mdcbn$, so ist mdcbn der abzuschneidende Theil der Figur abcdefg.

Aufgabe 154. In der Figur abcdef ist, von dem in dem Umfange derselben gegebenen Punkte m, die Linie mn gezogen, welche die fa in n außerhalb der Figur schneidet; man soll von m aus die Linie $m\gamma$ so ziehen, daß $mg\gamma$ der außerhalb der Figur liegenden Fläche abgn gleich werde.

Auflösung. Verlängere ab, welche die mn in x schneidet; und ziehe $m\beta$, so daß $m\beta x = axn$ wird (Aufg. 133.). Hierauf ziehe (ebenfalls nach der Anleitung, Aufgabe 133.) $m\gamma$ so, daß $m\gamma z = bz\beta$ wird, so ist $m\gamma$ die gesuchte Linie.



Beweis. Da $\Delta\, m\gamma z = \Delta\, bz\beta$ (p. c.)
und $\Delta\, mbz = \Delta\, mbz$

so ist $\Delta\, mb\gamma = \Delta\, mb\beta$
Und weil $\Delta\, mab = \Delta\, mab$

so ist auch $mab\gamma = \Delta\, ma\beta$
aber $\Delta\, ma\beta = \Delta\, man$. (I. 39.)

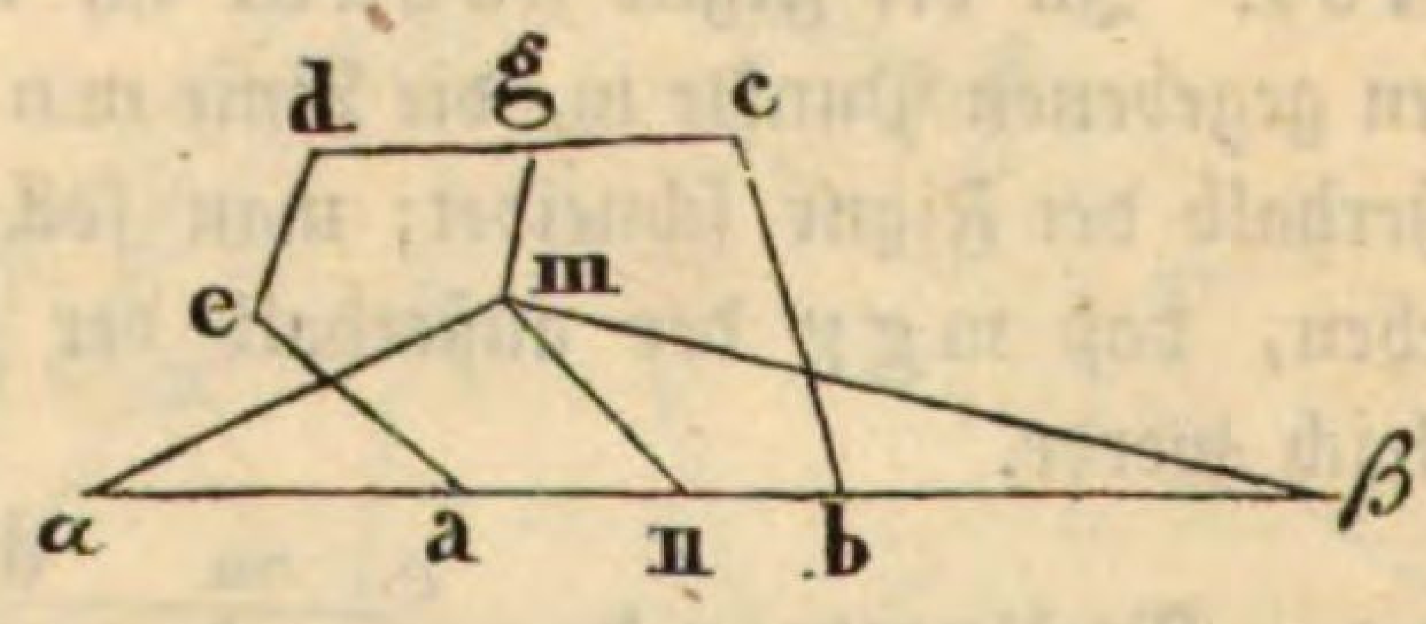
Folglich ist $mab\gamma = \Delta\, man$
und weil $mabg = mabg$

so bleibt $\Delta\, mg\gamma = abgn$.

Aufgabe 155. Man soll abcdef in ein Dreieck verwandeln, das mit der Figur die Seite ef und den Winkel f gemein hat.

Auflösung. Man nehme e als die Spitze des Dreiecks an, und schaffe nach und nach immer die Ecke der Figur weg, welche zunächst bei e rechts liegt, bis die nächste Ecke in der verlängerten fa liegt: so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 156. Innerhalb einer geradlinigen Figur abcde ist ein Punkt m gegeben, der mit einem gegebenen Punkte g des Umfanges der Figur verbunden ist. Man soll diese Figur in ein Dreieck verwandeln, dessen Spitze in m liegt und dessen Grundlinie mit ab zusammenfällt; und es soll auf jeder Seite von mg der durch eine Seite des Dreiecks abgeschnittene Theil der Figur eben so groß seyn, als der auf eben dieser Seite durch das Dreieck hinzukommende Theil.



Auflösung. Nimm in der Seite ab der Figur, mit welcher die Grundlinie des Dreiecks zusammenfallen soll, beliebig einen Punkt n an; ziehe mn; verwandele nun mgdean in ein Dreieck $mn\alpha$, das mit dem verwandelten Theile die Seite mn und $\llcorner\, mn\alpha$ gemein hat (Aufg. 155.); und eben so verwandele mgcbn in das Dreieck $mn\beta$, das mit diesem Theile die Seite mn und $\llcorner\, mn\beta$ gemein hat: so ist nun $m\alpha\beta$ das verlangte Dreieck.

Aufgabe 157. Innerhalb der Figur **abcde** ist der Punkt m gegeben, der mit dem Punkte g des Umfanges durch **mg** verbunden ist; man soll **mn** so ziehen, daß durch **gm** und **mn** die Figur in zwei gleiche Theile getheilt werde.

Auflösung. Verwandle die Figur in $\Delta\, m\alpha\beta$ (nach der Anleitung Aufg. 156.), halbire $\alpha\beta$ in n, und ziehe **mn**: so ist das Verlangte geschehen.

Zusatz. Fällt der Punkt **n** außerhalb der Figur, so wird der außerhalb liegende Theil hereingeschafft, nach der Anleitung Aufg. 154.

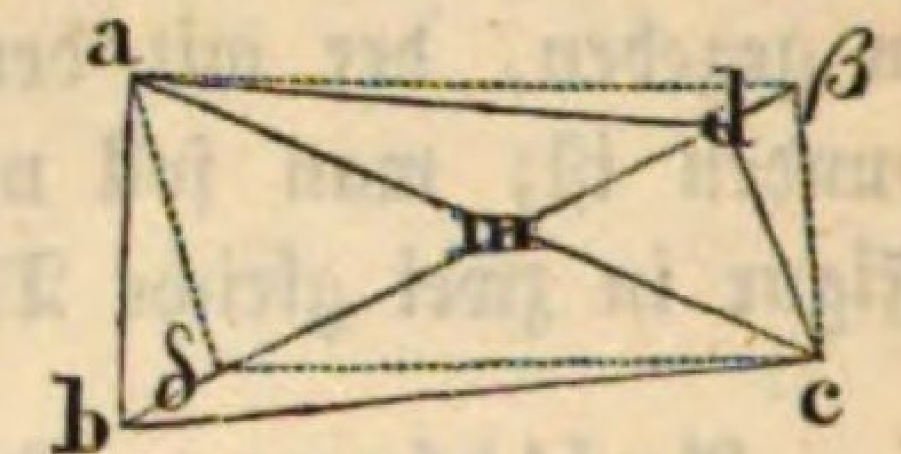
Aufgabe 158. Innerhalb der obigen Figur **abcde** ist ein Punkt m gegeben, der mit dem Punkte g des Umfangs der Figur durch **mg** verbunden ist; man soll die Linie **mn** so ziehen, daß der Theil **gmnaed** einer anderen gegebenen kleineren Figur gleich werde.

Auflösung. Man verwandele **abcde** in $\Delta\, m\alpha\beta$ (nach Aufgabe 156.) und verwandele die kleinere Figur ebenfalls in ein Dreieck; dieses verwandele man hierauf in ein anderes, das mit $\Delta\, m\alpha\beta$ die Seite $m\alpha$ und $\angle\, m\alpha\beta$ gemein hat; ist αn die zweite, an $\angle\, \alpha$ anliegende Seite dieses Dreiecks: so ist n der Punkt, welchem die Eigenschaft zukömmt, daß, wenn man **mn** zieht, nun **gmnaed** der abzuschneidenden kleineren Figur gleich ist.

Zusatz. Diese Aufgabe läßt sich auch auf folgende Art lösen: Man verwandele den abzuschneidenden Theil in ein Dreieck, von welchem **mg** die eine Seite und $\angle$ **mgd** der an derselben anliegende Winkel ist (Aufg. 133.), so wird die dritte Ecke dieses Dreiecks in der verlängerten **gd** liegen; wird nun der außerhalb der Figur fallende Theil dieses Dreiecks in die Figur hineingeschafft (Aufgabe 154.), so erhält man hiedurch die Linie **mn** der gesuchten Lage nach.

Aufgabe 159. Ein Viereck soll, mit Beibehaltung der beiden Diagonalen desselben, ihrer Größe nach, und auch des Winkels, unter welchem die Diagonalen sich schneiden, so umgeformt werden, daß dasselbe durch die eine Diagonale in zwei gleich große Dreiecke getheilt werde.

Auflösung. Man nehme auf der Diagonale bd das Stück $m\delta = m\beta = \frac{1}{2}$ bd, und verbinde die Punkte β und δ mit a und c, so ist $a\beta c\delta$ das verlangte Viereck.



Beweis. Da $m\beta = m\delta$
so ist $\Delta\, am\beta = \Delta\, am\delta$ (38.)
und $\Delta\, cm\beta = \Delta\, cm\delta$

also auch $\Delta\, ac\beta = \Delta\, ac\delta$.

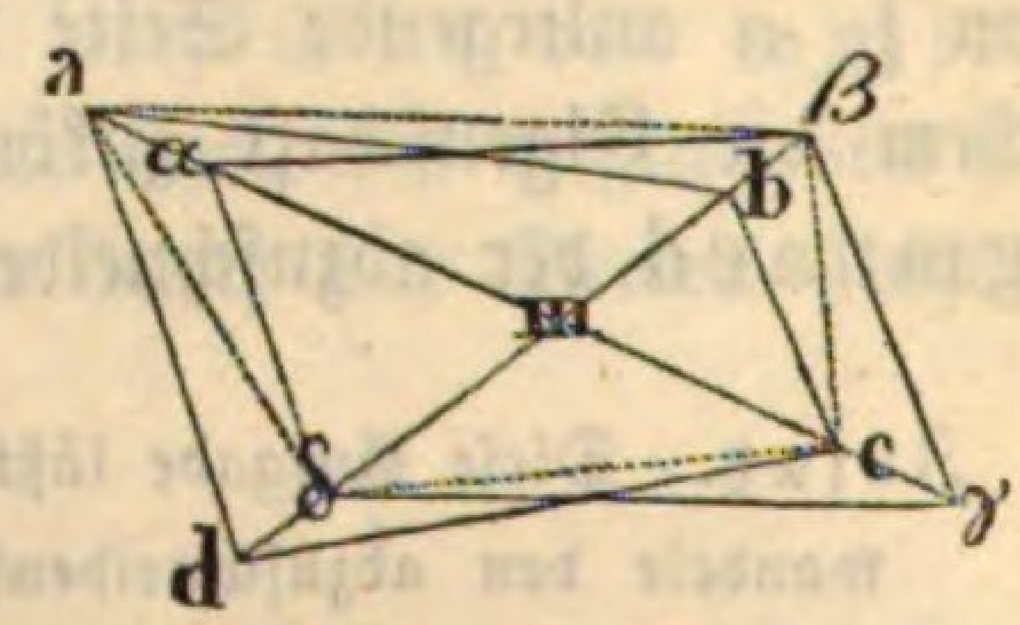
Das Viereck $a\beta c\delta$ wird also, durch die Diagonale ac, in zwei gleiche Dreiecke zerlegt.

Da ferner $m\beta = m\delta = \frac{1}{2}$ bd
so ist $m\beta + m\delta = bd$
also $\beta\delta = bd$.
Folglich ist auch $\Delta\, \beta a\delta = \Delta\, bad$
und $\Delta\, \beta c\delta = \Delta\, bcd$

und daher $a\beta c\delta = abcd$.

Das Viereck $a\beta c\delta$ ist also auch dem gegebenen abcd gleich, und beide Vierecke haben gleiche Diagonalen, die sich unter einem unveränderten Winkel schneiden.

Aufgabe 160. Es soll ein Viereck, mit Beibehaltung der Diagonalen, ihrer Größe nach, und dem Winkel, unter welchem die Diagonalen sich schneiden, so umgeformt werden, daß dasselbe durch jede der beiden Diagonalen in zwei gleich große Dreiecke zerlegt wird.

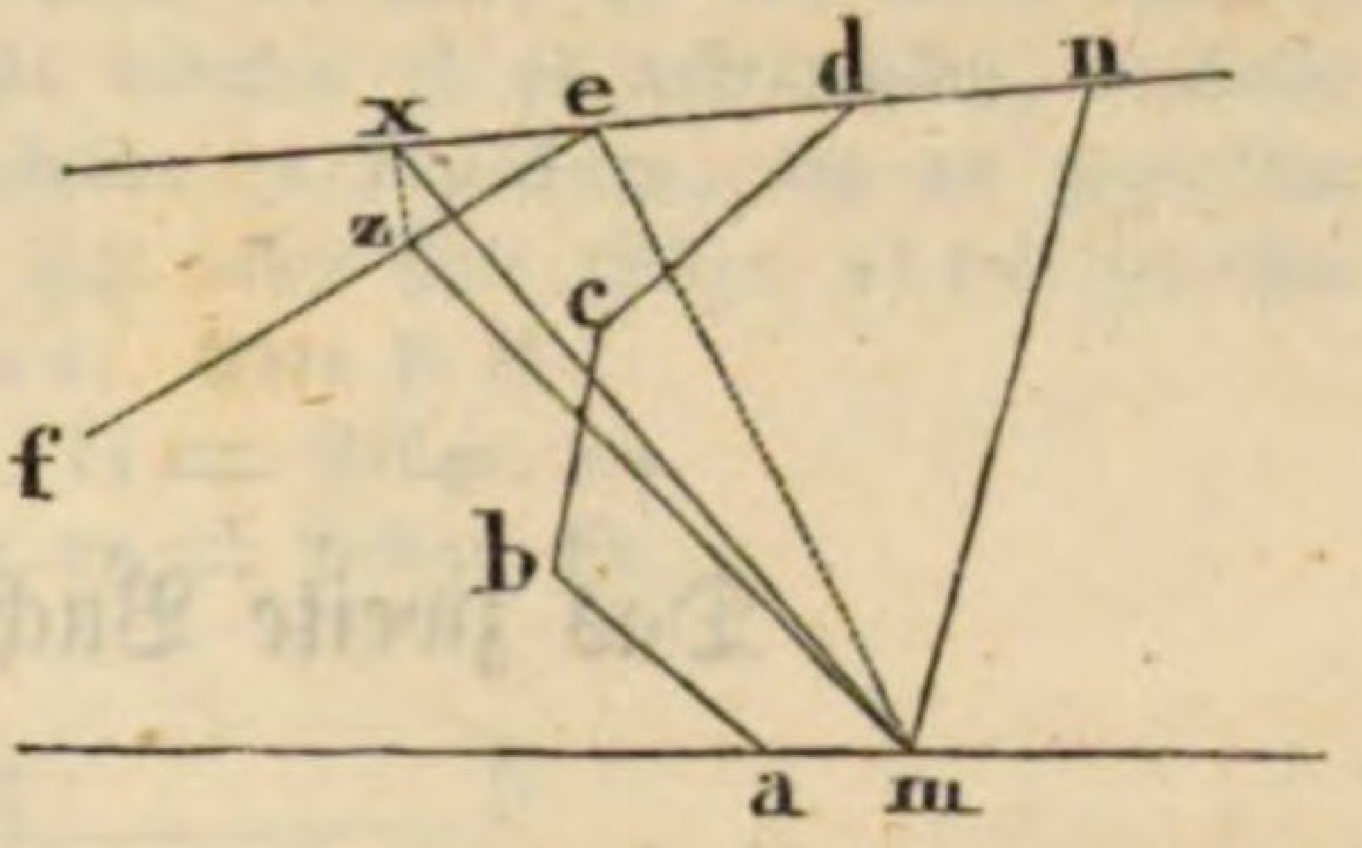


Auflösung. Ist abcd das gegebene Viereck, so verwandele dasselbe in $a\beta c\delta$, das $\Delta\, a\beta c = \Delta\, a\delta c$ (Aufg. 159.); nimm nun auf ac die $m\alpha = m\gamma = \frac{1}{2}$ ac, und verbinde α und γ mit β und δ: so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Viereck.

Zusatz. Es ist $m\alpha = m\gamma$ und $m\beta = m\delta$; woraus folgt, „daß $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Parallelogramm seyn muß". Folglich läßt sich jedes Viereck in ein Parallelogramm verwandeln, das mit dem gegebenen Viereck gleiche Diagonalen hat, die sich in beiden Figuren unter demselben Winkel schneiden.

Aufgabe 161. Zwei Grundstücke haben die gebrochene Grenze **abcd** gemeinschaftlich; man soll dieselben so trennen, daß eine von **m** aus gezogene gerade Linie die gemeinschaftliche Grenze wird.

Auflösung. Ziehe **mn**, und verwandele die Figur **mabcdn** in ein Dreieck **mnx**, dessen Spitze in **m** liegt und dessen Grundlinie die verlängerte **nd** wird: so ist nun **mx** die verlangte Grenze.



Zusatz. Ist die Seitengrenze **nd** in **e** gebrochen, so daß sie von hieraus die Richtung **ef** nimmt, so zieht man durch **x** eine Linie **xz** parallel **em**; und schneidet diese die **ef** in **z**, so ist nun **mz** die neue Grenze.

Das zweite Buch der Elemente.

Erklärungen.

1) Von jedem rechtwinkligen Parallelogramme sagt man, „es sey unter den beiden, den rechten Winkel einschließenden Seiten enthalten“.

2) In einem Parallelogramme nennt man „Eins der beiden, um die Diagonale herum liegenden Parallelogramme“, mit den beiden Ergänzungen zusammen „ein Gnomon“.

Anmerkungen 1) Die Bestimmungsstücke für ein Parallelogramm sind: „die beiden Seiten, und ein von denselben eingeschlossener Winkel“. Durch diese drei Stücke ist ein Prllgr. immer der Größe und Art nach bestimmt; so daß, wenn zwei Prllgr. diese drei Stücke gleich haben, dieselben sich decken müssen. Ist der Winkel ein für allemal bestimmt, so ist alsdann die Figur, ihrer Größe und Art nach, nur noch von den beiden Seiten abhängig, die diesen Winkel einschließen. Da nun bei dem rechtwinkligen Prllgr., also bei dem Rechteck, jeder Winkel $= R$ ist: so hängt die Größe und Art desselben nur noch von den beiden Seiten ab, die den rechten Winkel einschließen; und es ist daher vollkommen bestimmt, wenn die beiden Seiten desselben gegeben sind.

2) Sind a und b die beiden Seiten eines Rechtecks, so wird dasselbe durch $a \times b$ bezeichnet; und es ist hierdurch die Figur sowohl ihrer Größe, als ihrer Art nach, ausgedrückt. Der Ausdruck $a \times b$ bedeutet also das unter den Linien a und b enthaltene Rechteck. Eben so wird ein Rechteck, dessen Seiten die Linien **AB** und **BC** sind, bezeichnet durch $AB \times BC$.

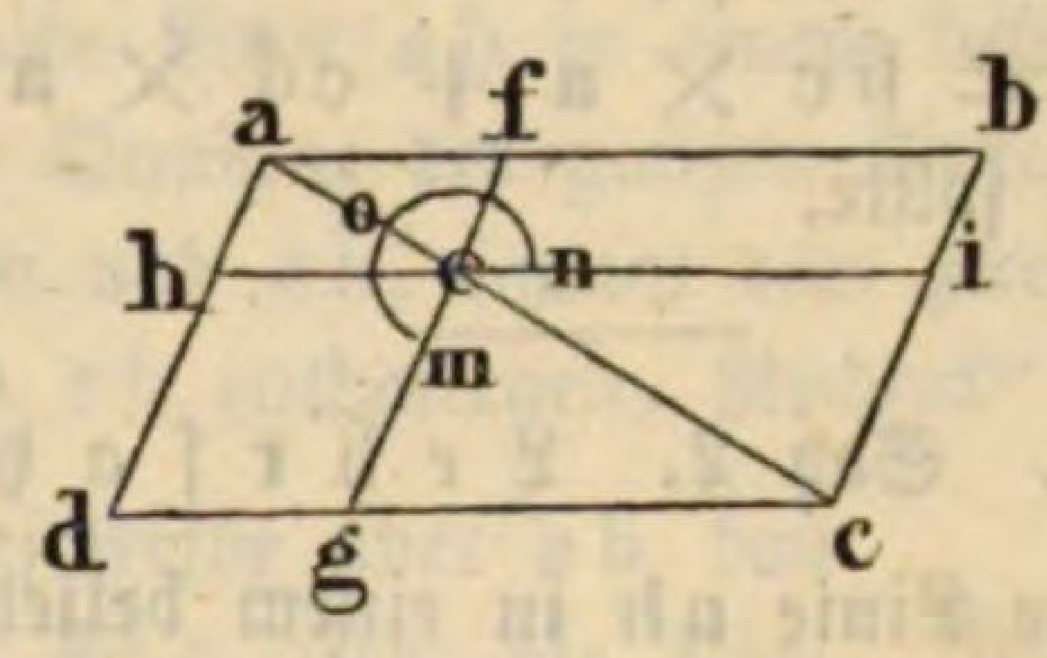
3) Sind die beiden Seiten eines Rechtecks gleich groß, so wird dasselbe ein Quadrat; und es ist daher, wenn die Seite eines Quadrats $= AB$ ist, $\square AB = AB \times AB$; und eben so ist für die Seite des Quadrats $= a$, $\square a = a \times a$. Statt $a \times a$ ist es gebräuchlich a^2 zu setzen; und es soll daher das Quadrat der Seite a durch a^2 bezeichnet werden. Ist **AB** die Seite des Quadrats (wo also **A** und **B** die beiden, an den

Endpunkten der Seite des Quadrats stehenden Buchstaben sind) so soll, bei dem Gebrauche dieser Bezeichnung, **AB** in Klammern eingeschlossen, und das Quadrat von **AB** durch $(AB)^2$ bezeichnet werden. Hiernach ist

$$\square AB = AB \times AB = (AB)^2.$$

4) Ein gegebenes Prllgr. wird durch die vier, an den Ecken desselben befindlichen, Buchstaben bezeichnet; indessen ist es gebräuchlich, „dasselbe statt dessen nur durch zwei Buchstaben zu bezeichnen, die an gegenüber liegenden Ecken stehen"; und man sagt daher statt „Prllgr. **abcd**" gewöhnlich nur Prllgr. **ac** oder Prllgr. **bd**. Eben so ist

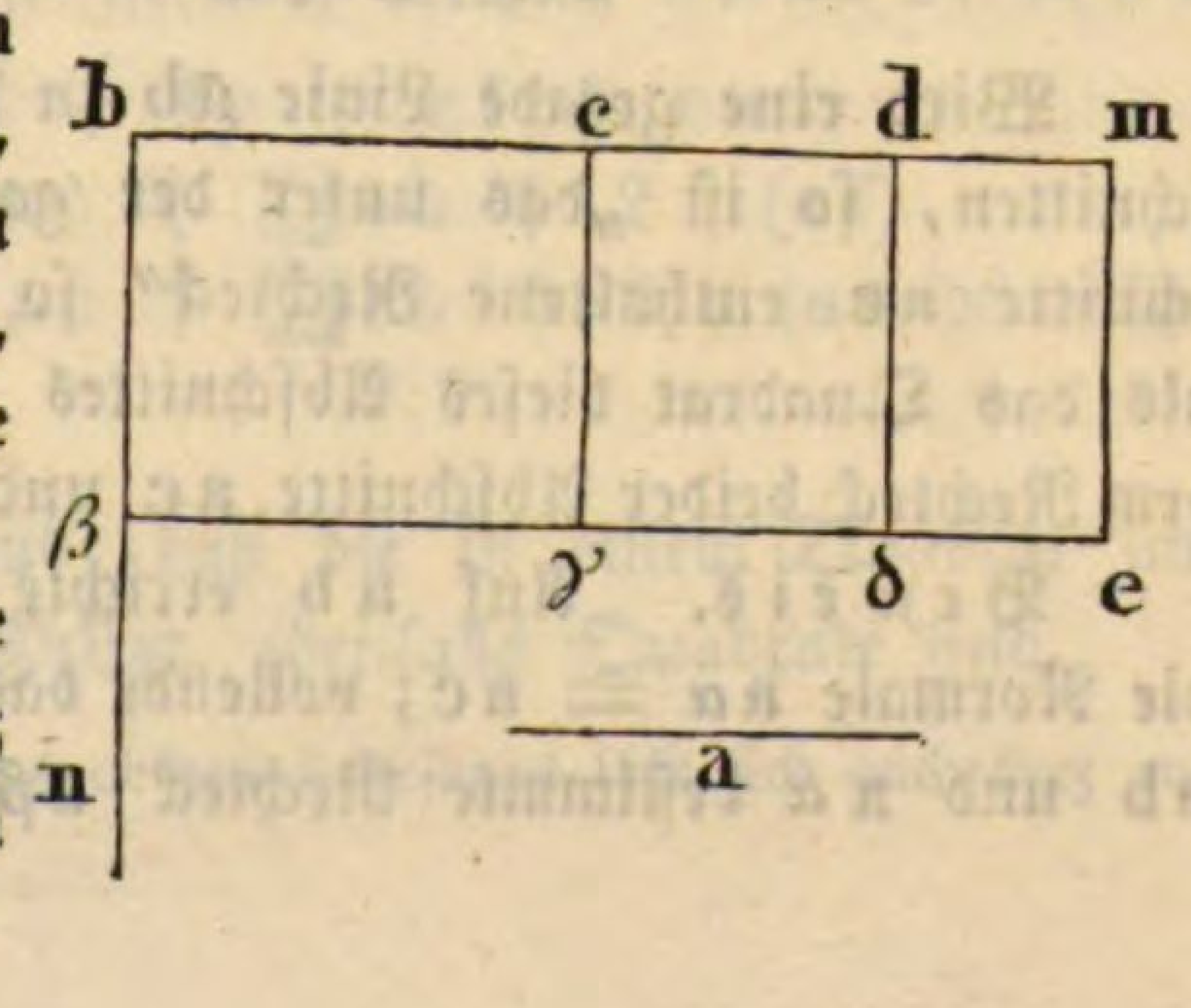
Prllgr. **fbie** = Prllgr. **fi** = Prllgr: **be**
und Prllgr. **afeh** = Prllgr. **ae** = Prllgr. **fh**.



5) Zieht man in dem Prllgr. **bd** die Diagonale **ac**, und durch einen beliebigen Punkt **e** derselben die Parallelen **fg** und **hi** mit den Seiten: so wird dasselbe dadurch in vier Prllgr. zerlegt, von welchen die beiden **fh** und **ig** um die Diagonale liegen, uud die beiden anderen **hg** und **fi** die Ergänzungen sind (I. 43.) Diese beiden Ergänzungen nun, und Eins der um die Diagonale liegenden Prllgr. bilden zusammen ein Gnomon, welches gewöhnlich dadurch bezeichnet wird: daß man die an einander liegenden Winkel der drei Prllgr., aus welchen der Gnomon besteht, durch einen Kreisbogen einschließt, und die an diesem Bogen stehenden Buchstaben angiebt. So besteht Gnomon **mon** aus den Prllgr. **gh**, **hf** und **fi**.

II. Satz 1. Lehrsatz.

Wenn, von zwei geraden Linien **a** und **bm**, die Eine **bm** in beliebig viele Abschnitte **bc**, **cd**, **dm** getheilt wird: so ist „das unter den beiden Linien **a** und **bm** enthaltene Rechteck" eben so groß, als die unter der ungetheilten **a**, und jedem der Abschnitte **bc**, **cd**, **dm** enthaltenen, Rechtecke zusammen.



Beweis. In **b** errichte auf **bm** eine Normale **bn** (I. 11.); schneide auf derselben $b\beta = a$

ab (I. 3.); vollende das durch bm und $b\beta = a$ bestimmte Rechteck $bme\beta$, und ziehe durch c und d die $c\gamma$ $d\delta$ der bn parallel: so ist

$$c\gamma = d\delta = b\beta = a \quad (I.\ 34.)$$

Da nun Rechteck $be = b\gamma + c\delta + de$

und Rechteck $be = bm \times b\beta = bm \times a$

so ist auch $bm \times a = b\gamma + c\delta + de.$

Und da $b\gamma = bc \times b\beta = bc \times a$

$c\delta = cd \times c\gamma = cd \times a$

und $de = dm \times d\delta = dm \times a$

so ist $bm \times a = bc \times a + cd \times a + dm \times a$; was bewiesen werden sollte.

II. Satz 2. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab in einem beliebigen Punkte c geschnitten, so sind „die unter der ganzen ab, und jedem der beiden Abschnitte ac und cb enthaltenen, Rechtecke zusammen" dem Quadrate der ganzen Linie ab gleich.



Beweis. Beschreibe von ab das Quadrat $ab\beta\alpha$ dieser Linie (I. 46.) und ziehe durch c die $c\gamma$ parallel $a\alpha$ (I. 31.), und also auch der $b\beta$ (I. 30.): so ist

$$\text{Rechteck } ab \times a\alpha = ac \times a\alpha + cb \times a\alpha \quad (1.).$$

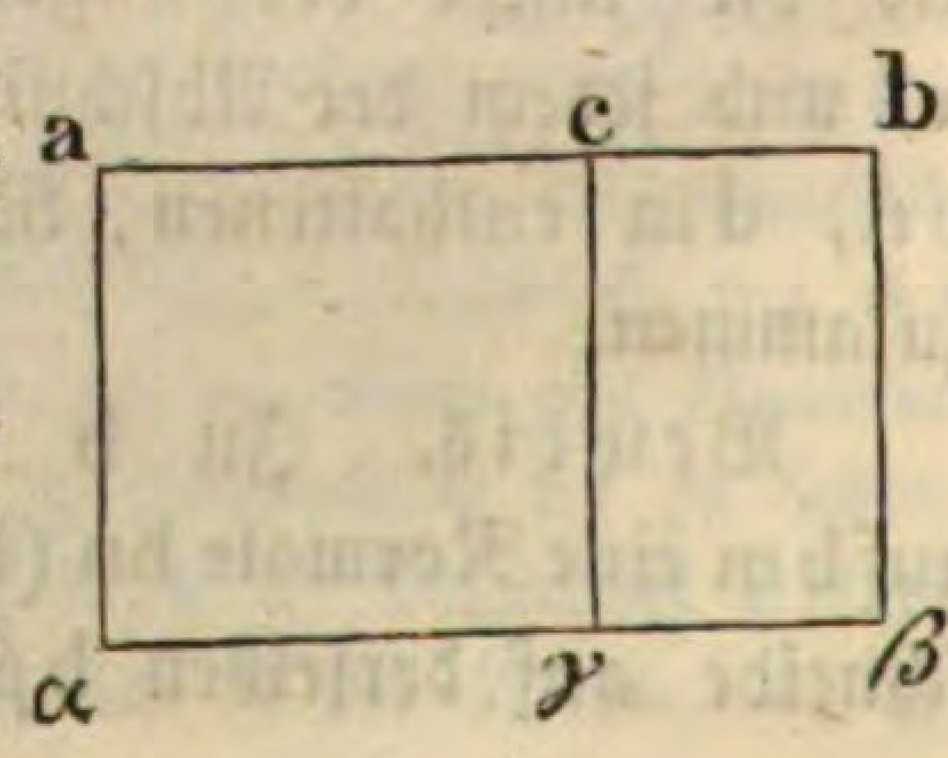
Und da $a\alpha = ab$ (p. c.)

so ist $ab \times ab = ac \times ab + cb \times ab$;

nämlich es ist $(ab)^2 = ac \times ab + cb \times ab.$

II. Satz 3. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab in einem beliebigen Punkte c geschnitten, so ist „das unter der ganzen ab und dem einen Abschnitte ac enthaltene Rechteck" so groß, als das Quadrat dieses Abschnittes sammt dem Rechteck beider Abschnitte ac und cb.



Beweis. Auf ab errichte in a die Normale $a\alpha = ac$; vollende das durch ab und $a\alpha$ bestimmte Rechteck $a\beta$, und

ziehe durch c die $c\gamma$ parallel $a\alpha$ (I. 31.), und also auch der $b\beta$ (I. 30.): so ist $c\gamma = a\alpha = ac$, und

das Rechteck $ab \times a\alpha = ac \times a\alpha + cb \times a\alpha$ (1.)

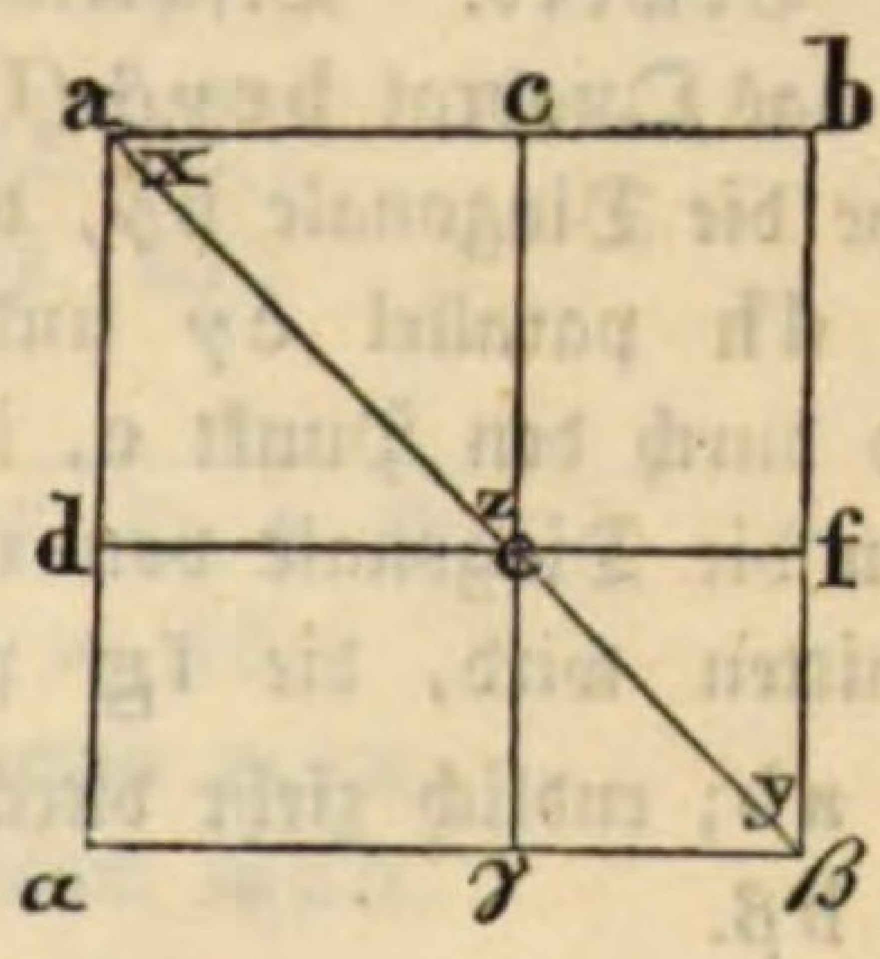
Und da $a\alpha = ac$ (p. c.)

so ist $ab \times ac = ac \times ac + cb \times ac$;

nämlich es ist $ab \times ac = (ac)^2 + cb \times ac$.

II. Satz 4. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab in einem beliebigen Punkte c geschnitten, so ist das Quadrat der ganzen Linie ab „den Quadraten beider Abschnitte ac und cb, sammt dem zweifachen, unter beiden Abschnitten ac und cb enthaltenen, Rechteck" gleich.



Beweis. Beschreibe über ab das Quadrat $ab\beta\alpha$ (I. 46.), ziehe die Diagonale $a\beta$, durch c die $c\gamma$ parallel $a\alpha$ und $b\beta$ (I. 31.); und durch den Punkt e, in welchem die Diagonale von $c\gamma$ geschnitten wird, ziehe df parallel ab und $\alpha\beta$.

Da $ba = b\beta$ (p. c.), so ist $\llcorner x = \llcorner y = \frac{1}{2} R$ (I. 5.)

weil $x + y + b = 2R$ (I. 32.), und $b = R$.

Da nun $\llcorner z = \llcorner y$ (I. 29.), so ist auch $\llcorner x = \llcorner z$

und daher $ce = ca$; folglich ist das Prllgr. aced gleichseitig. Es ist aber auch rechtwinklig, weil $\llcorner ace = \llcorner b = R$, folglich ist dasselbe ein Quadrat; und zwar ist $aced = \square ac$, und aus gleichen Gründen ist auch $ef\beta\gamma = \square ef = \square cb$.

Da $ce = ca$, so ist Rechteck $cf = ac \times cb$;

und weil $cf = e\alpha$ (I. 43.), so ist auch Rechteck $e\alpha = ac \times cb$.

Nun ist $\square ab = cd + f\gamma + cf + e\alpha$

es ist also auch $\square ab = \square ac + \square cb + 2 \,.\, (cf)$

oder $\square ab = \square ac + \square cb + 2 \,.\, (ac \times cb)$;

was bewiesen werden sollte.

Zusatz. Es folgt hieraus: daß die in einem Quadrat um die Diagonale herumliegenden Prllgr. ebenfalls Quadrate sind.

Anmerkung. Die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes läßt sich auch kurz auf folgende Art beweisen:

Es ist

$$(ab)^2 = ac \times ab + cb \times ab \quad (2.)$$

aber $ac \times ab = (ac)^2 + ac \times cb$ (3.)

und $cb \times (ab) = (cb)^2 + cb \times ac$ (3.)

Folglich ist auch

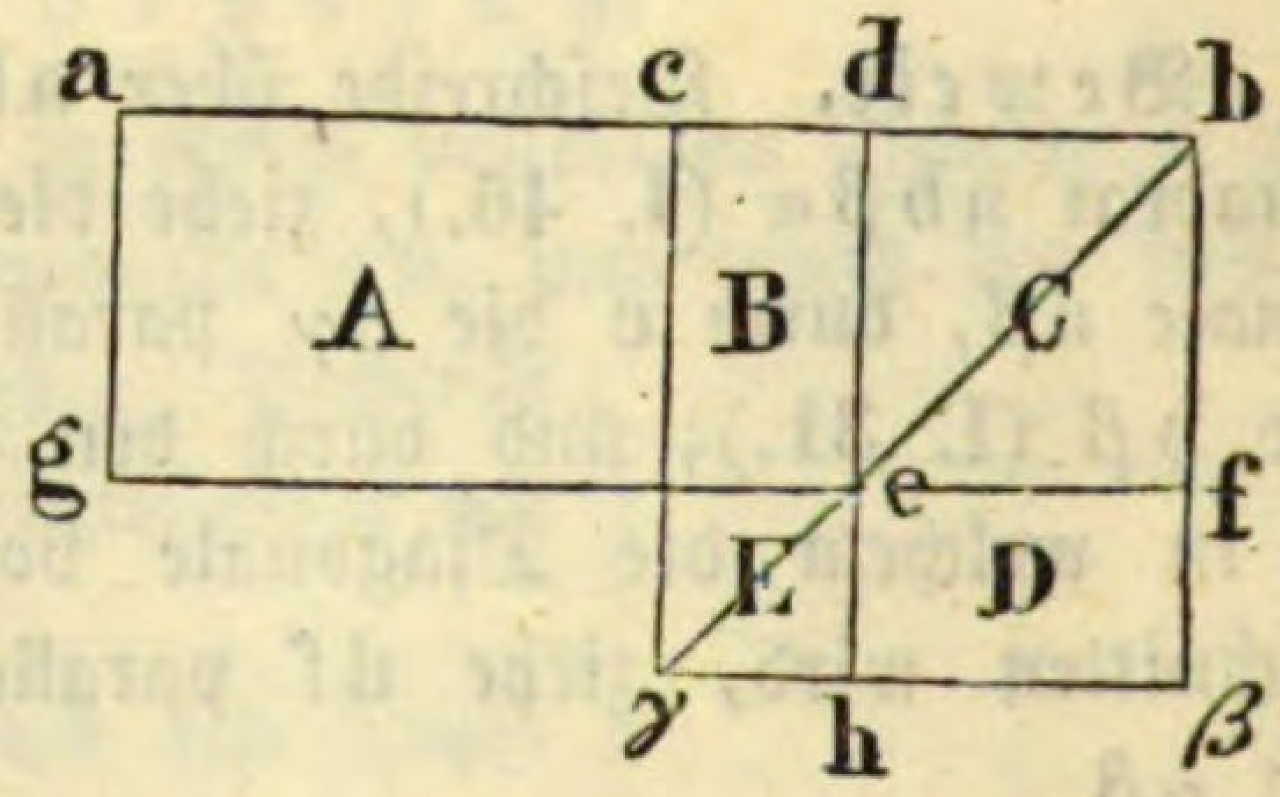
$(ab)^2 = (ac)^2 + ac \times cb + (cb)^2 + cb \times ac$;

also $(ab)^2 = (ac)^2 + (cb)^2 + 2 . (ac \times cb)$.

II. Satz 5. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab bei c in gleiche und bei d in ungleiche Stücke geschnitten: so ist „das unter den ungleichen Stücken ad und db enthaltene Rechteck, sammt dem Quadrate des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stückes cd" dem Quadrate der halben Linie cb gleich.

Beweis. Beschreibe über bc das Quadrat bc$\gamma\beta$ (I. 46.); ziehe die Diagonale bγ, durch d die dh parallel cγ und bβ; und durch den Punkt e, in welchem die Diagonale von dh geschnitten wird, die fg parallel der ab; endlich ziehe durch a die ag parallel cγ, und also auch der bβ.



Da ac = cb (p. h.), so ist A = B + C (I. 36.)

Und da B = D (I. 43.)

so folgt A + B = B + C + D (G. 2.)

Es ist aber A + B = ad × de

und weil de = db (4.), so ist A + B = ad × db

folglich ist auch ad × db = B + C + D

Da nun E = E

so ist ad × db + E = B + C + D + E

nämlich es ist ad × db + E = □cb.

Und weil E = □cd (4.)

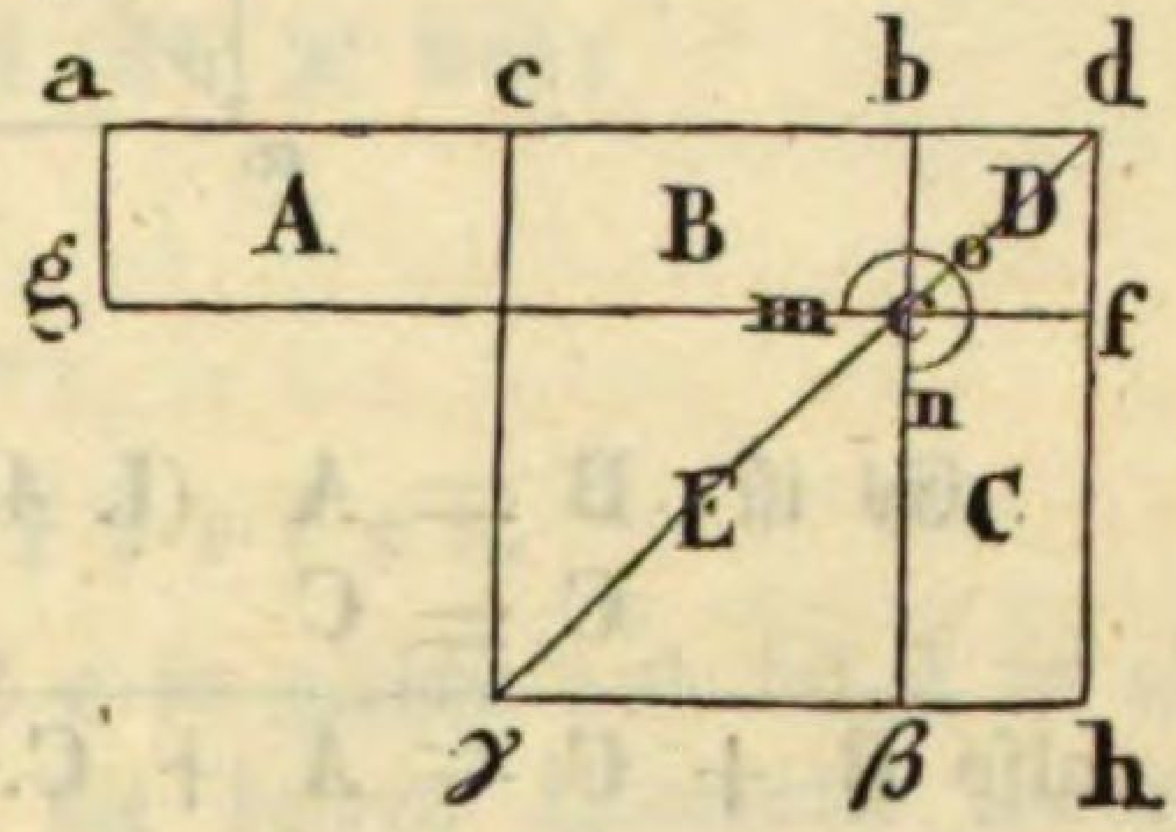
so ist endlich ad × db + □cd = □cb;

was bewiesen werden sollte.

Zusatz. Wird also eine gegebene gerade Linie ab in c in gleiche, und in d in ungleiche Stücke geschnitten: so ist immer „das unter den gleichen Stücken enthaltene Rechteck ac × cb" größer als das Rechteck ad × db, welches unter den ungleichen Stücken enthalten ist.

II. Satz 6. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab in c halbirt, und derselben in gerader Richtung ein Stück bd angesetzt: so ist „das unter der angesetzten bd und der ganzen verlängerten Linie ad enthaltene Rechteck, sammt dem Quadrate der halben Linie cb" dem Quadrate der aus der halben und der angesetzten bestehenden Linie cd gleich.



Beweis. Beschreibe über cd das Quadrat cdhγ (I. 46.); ziehe die Diagonale dγ; durch b die bβ parallel cγ und dh (I. 31.), und durch den Punkt e, in welchem die Diagonale von bβ geschnitten wird; ziehe fg parallel da und hγ, und ziehe durch a die ag parallel cγ.

Da ca = cb (p. h.), so ist A = B (I. 36.)
Ferner ist B = C (I. 43.)
und D = D

folglich ist A + B + D = B + C + D
Und weil A + B + D = ad × df
und B + C + D = Gnomon mon
so ist ad × df = Gnomon mon.
Es ist aber df = bd (4.)

also auch ad × bd = Gnomon mon.
Hierzu $(bc)^2$ = E (4.)

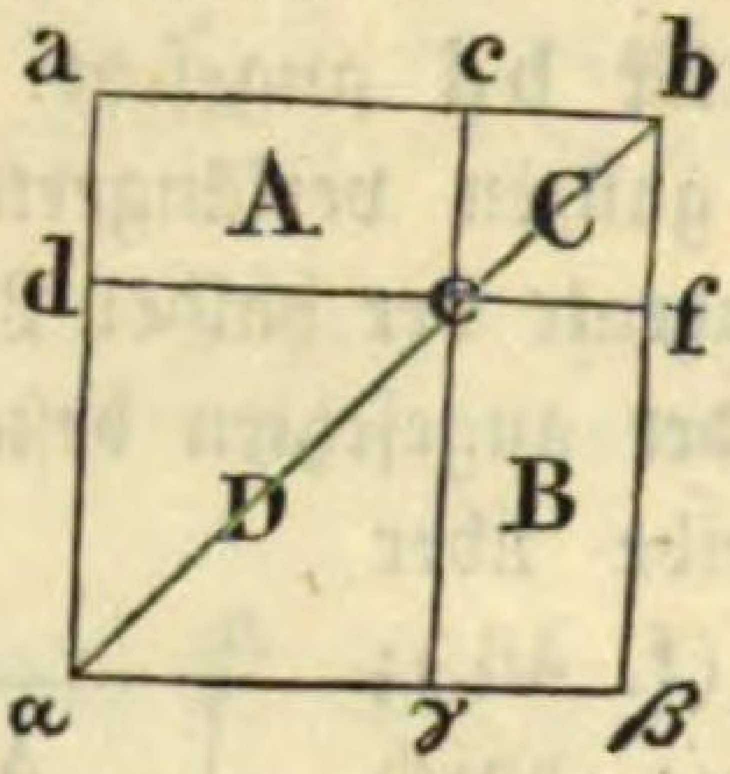
giebt ad × bd + $(bc)^2$ = Gnomon mon + E.
Und weil Gnomon mon + E = $(cd)^2$ (p c.)

so ist endlich ad × bd + $(bc)^2 = (cd)^2$;
was bewiesen werden sollte.

II. Satz 7. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab in einem beliebigen Punkte c geschnitten: so sind die beiden Quadrate, der ganzen Linie ab und des einen Abschnittes bc, zusammen eben so groß, als „das zweifache, unter der ganzen ab und dem gedachten Abschnitte bc enthaltene Rechteck, sammt dem Quadrate des zweiten Abschnittes ac".

Beweis. Beschreibe über ab das Quadrat $ab\beta\alpha$ (I. 46.), und vollende die Figur in gleicher Art, wie bei Satz 4.



$$\begin{aligned} \text{Es ist } B &= A \quad (I.\ 43.) \\ C &= C \end{aligned}$$

$$\text{also } B + C = A + C.$$

$$\text{Und weil } A + C = ab \times bf = ab \times bc \quad (4.)$$

$$\text{so ist } A + C + B + C = 2\,(ab \times bc)$$

$$D = (ac)^2 \quad (4.)$$

$$\text{daher } D + A + C + B + C = 2\,(ab \times bc) + (ac)^2.$$

$$\text{Da nun } D + A + C + B = (ab)^2 \text{ und } C = (bc)^2.$$

$$\text{so ist } (ab)^2 + (bc)^2 = 2\,(ab \times bc) + (ac)^2.$$

Zusatz. Da $2\,(ab \times bc) + (ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$
so folgt, wenn man $2\,(ab \times bc)$ auf beiden Seiten wegnimmt

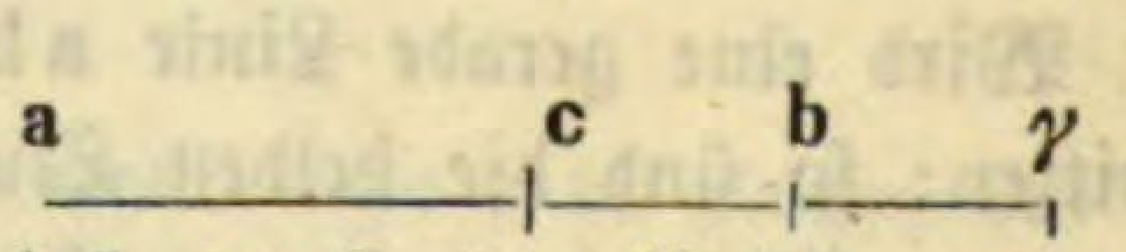
$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 - 2\,(ab \times bc).$$

Das Quadrat des einen Abschnittes ac wird also erhalten, wenn man „von der Summe der Quadrate der ganzen Linie ab und des anderen Abschnittes bc" das zweifache Rechteck dieser Linien ab und bc abzieht.

II. Satz 8. Lehrsatz.

Wird von einer geraden Linie ab ein beliebiges Stück bc abgeschnitten, und derselben ein eben so großes Stück $b\gamma$ angesetzt: so ist „das Quadrat der verkürzten Linie ac, sammt dem vierfachen, unter der ganzen ab und dem abgeschnittenen Stücke bc enthaltenen Rechteck" so groß, als das Quadrat der verlängerten Linie $a\gamma$.

Beweis. Es ist



$$(a\gamma)^2 = (ab)^2 + (b\gamma)^2 + 2\,(ab \times b\gamma) \quad (4.).$$

$$\text{Und da } b\gamma = bc \quad (p.\ h.)$$

$$(a\gamma)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + 2\,(ab \times bc)$$

Und weil $(ab)^2 = (ac)^2 + (bc)^2 + 2\,(ac \times bc)$ (4.)
so ist auch $(a\gamma)^2 = (ac)^2 + 2(bc)^2 + 2(ac \times bc) + 2(ab \times bc)$.

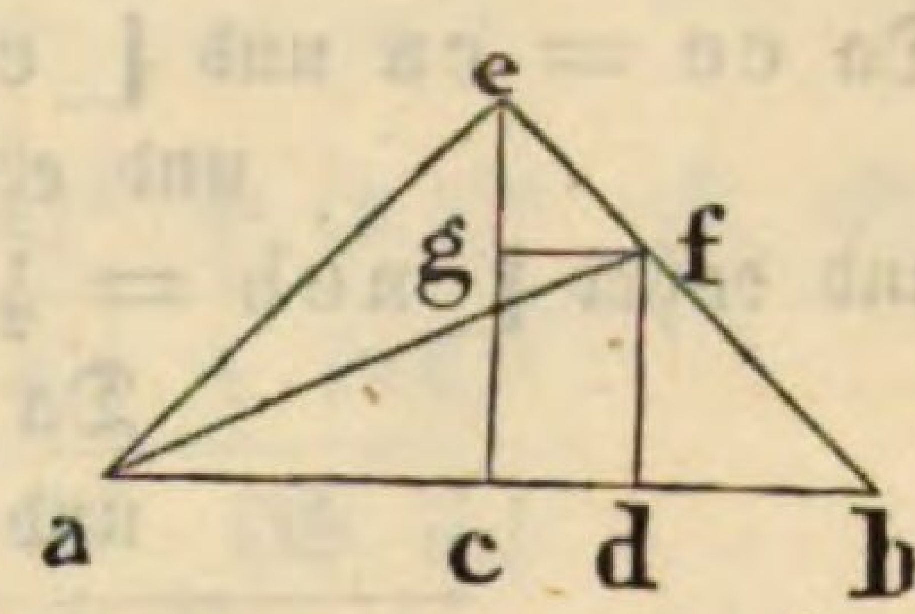
Nämlich es ist
$(a\gamma)^2 = (ac)^2 + 2\,[\,(bc)^2 + ac \times bc\,] + 2\,(ab \times ba)$
und da $(bc)^2 + ac \times bc = ab \times bc$. (3.)
so wird $(a\gamma)^2 = (ac)^2 + 2\,(ab \times bc) + 2\,(ab \times bc)$.

Nämlich es ist
$$(a\gamma)^2 = (ac)^2 + 4\,(ab \times bc);$$
was bewiesen werden sollte.

II. Satz 9. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab bei c in gleiche und bei d in ungleiche Stücke geschnitten: so sind die beiden Quadrate der ungleichen Stücke ad und db zwei Mal so groß, als „die beiden Quadrate der halben Linie ac, und des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stückes cd".

Beweis. In c errichte auf ab die Normale ce; mache ce = ca = cb, und ziehe ea und eb. Durch d ziehe df parallel ce, und durch f die fg parallel ba, und ziehe af.



Da $ce = ca$ und $\angle eca = R$
so ist $\angle cae = \angle cea = \frac{1}{2}\,R$ (I. 32.)
und aus gleichen Gründen $\angle cbe = \angle ceb = \frac{1}{2}\,R$
also $\angle aeb = \frac{1}{2}\,R + \frac{1}{2}\,R = R$.

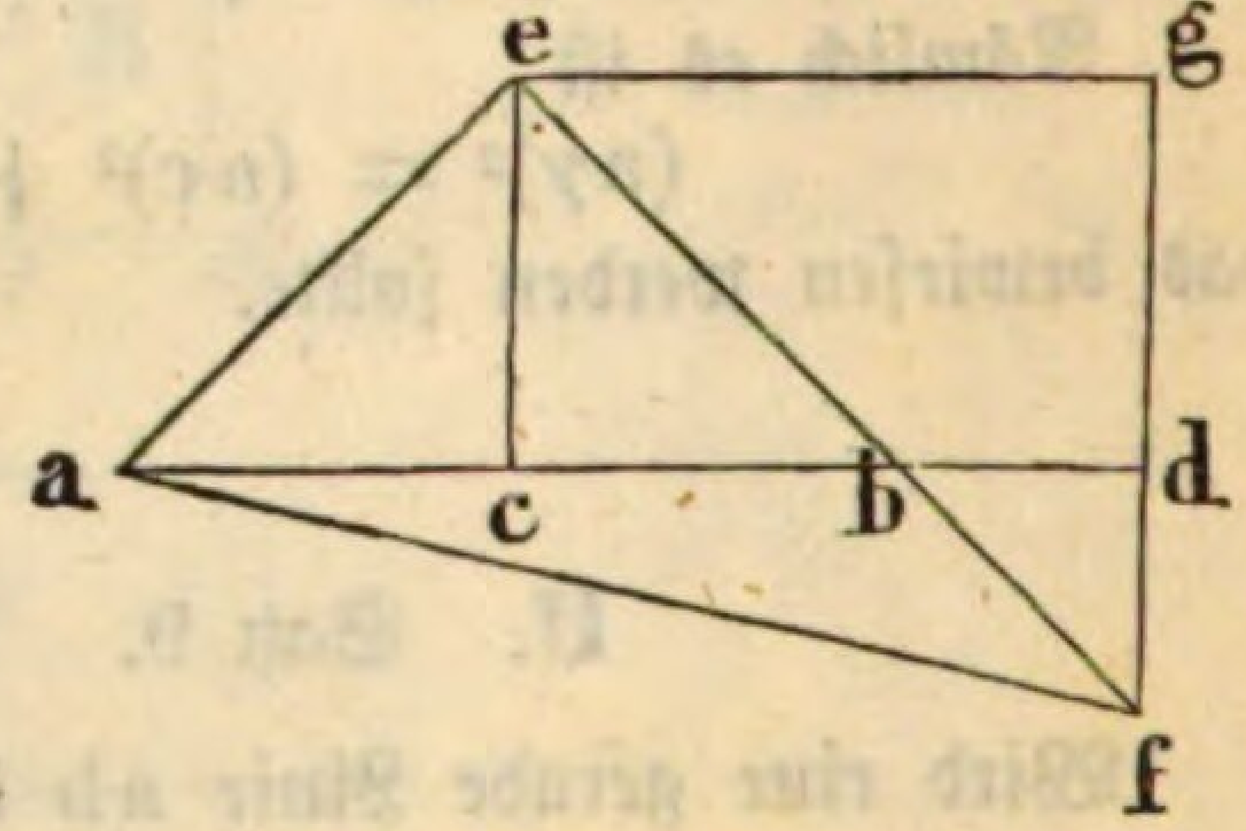
Da nun $\angle bdf = R$ (p. c.) und $\angle b = \frac{1}{2}\,R$, so ist $\angle dfb = \frac{1}{2}\,R$ (I. 32), und daher $df = db$,
und aus gleichen Gründen ist auch $gf = ge$.

Es ist $(af)^2 = (ae)^2 + (ef)^2$ (I. 47.)
und auch $(af)^2 = (ad)^2 + (df)^2$ „
also $(ad)^2 + (df)^2 = (ae)^2 + (ef)^2$
und weil $df = db$
$(ad)^2 + (db)^2 = (ae)^2 + (ef)^2$.

Nun ist aber $(ae)^2 = (ac)^2 + (ce)^2 = 2\,(ac)^2$
und $(ef)^2 = (gf)^2 + (ge)^2 = 2\,(gf)^2$
folglich ist auch $(ad)^2 + (db)^2 = 2\,(ac)^2 + 2\,(gf)^2$.
Und da $gf = cd$ (I. 34.)
so ist $(ad)^2 + (db)^2 = 2\,(ac)^2 + 2\,(cd)^2$.

II. Satz 10. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie ab in c halbirt, und ihr ein Stück bd in gerader Richtung angesetzt: so sind die beiden Quadrate, der angesetzten bd und der aus der ganzen und der angesetzten bestehenden ad, zusammen zwei Mal so groß, als „die beiden Quadrate der halben Linie bc, und der aus der halben und der angesetzten bestehenden cd".



Beweis. Errichte in c auf ab die Normale ce = ca = cb, und ziehe ae und eb. Durch e ziehe eg parallel ad, und durch d die gf parallel ec:

so ist $\angle dge + \angle gec = 2R$ (I. 29.)

daher $\angle dge + \angle geb < 2R$

und folglich treffen eb und gd verlängert zusammen; es sey f der Durchschnittspunkt. Man ziehe af.

Da ce = ca und $\angle c = R$, so ist $\angle cea = \angle cae = \frac{1}{2}R$

und eben so ist auch $\angle ceb = \angle cbe = \frac{1}{2}R$

und daher $\angle aeb = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R = R$

Da $\angle dbf = \angle ebc$ (I. 15.)

und $\angle ebc = \frac{1}{2}R$

so ist auch $\angle dbf = \frac{1}{2}R$

aber $\angle bdf = R$

folglich ist $\angle bfd = \frac{1}{2}R$. (I. 32.)

Es ist also $\angle dbf = \angle bfd$, und daher df = db (I. 6.); und aus gleichen Gründen ist auch fg = ge.

Nun ist $(af)^2 = (ae)^2 + (ef)^2$

und auch $(af)^2 = (ad)^2 + (df)^2$;

folglich ist $(ad)^2 + (df)^2 = (ae)^2 + (ef)^2$

und weil df = db

$(ad)^2 + (db)^2 = (ae)^2 + (ef)^2$

Es ist aber $(ae)^2 = (ac)^2 + (ce)^2 = 2\,(ac)^2$

und $(ef)^2 = (gf)^2 + (ge)^2 = 2\,(ge)^2$

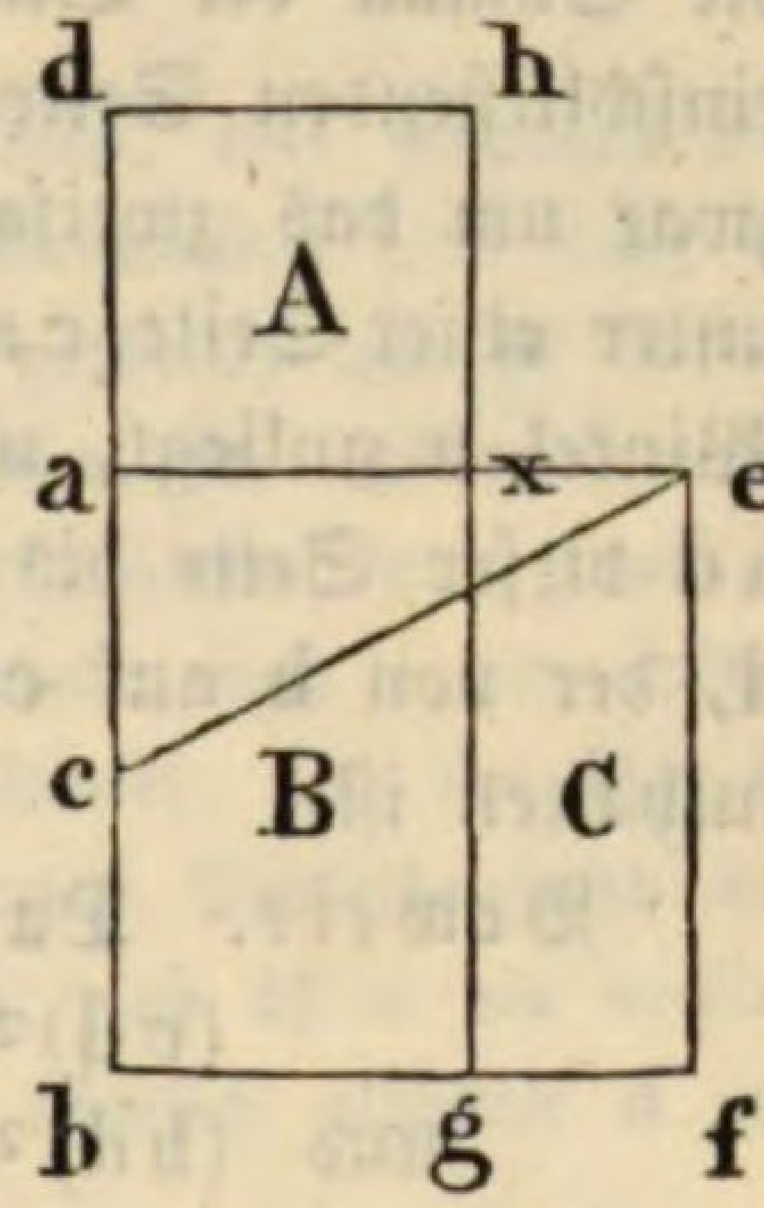
folglich ist $(ad)^2 + (db)^2 = 2\,(ac)^2 + 2\,(ge)^2$

und weil ge = cd (I. 34.)

so ist endlich $(ad)^2 + (db)^2 = 2\,(ac)^2 + 2\,(cd)^2$; was bewiesen werden sollte.

II. Satz 11. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie ae soll in x so geschnitten werden, daß „das unter der ganzen ae, und dem einen Abschnitte ex, enthaltene Rechteck“ dem Quadrate des andern Abschnittes ax gleich wird.



Auflösung. Von ae beschreibe das Quadrat aefb; halbire ab in c, ziehe ce, verlängere ca, bis cd = ce; von ad beschreibe das Quadrat adhx: so ist ae in x so geschnitten, daß

$$ae \times ex = (ax)^2.$$

Beweis. Da ab in c halbirt und ihr in gerader Richtung das Stück ad angesetzt ist: so ist

$$bd \times da + (ac)^2 = (cd)^2 \quad (6.)$$

und da $da = dh$ und $cd = ce$ (p. c.)

$$bd \times dh + (ac)^2 = (ce)^2$$

Es ist aber $(ce)^2 = (ae)^2 + (ac)^2$ (I. 47.)

folglich ist auch $bd \times dh + (ac)^2 = (ae)^2 + (ac)^2$

und daher $bd \times dh = (ae)^2$ (G. 3.)

nämlich es ist $A + B = B + C$

und also auch $A \quad = C$.

Nun ist $A = (ax)^2$ und $C = fe \times ex = ae \times ex$

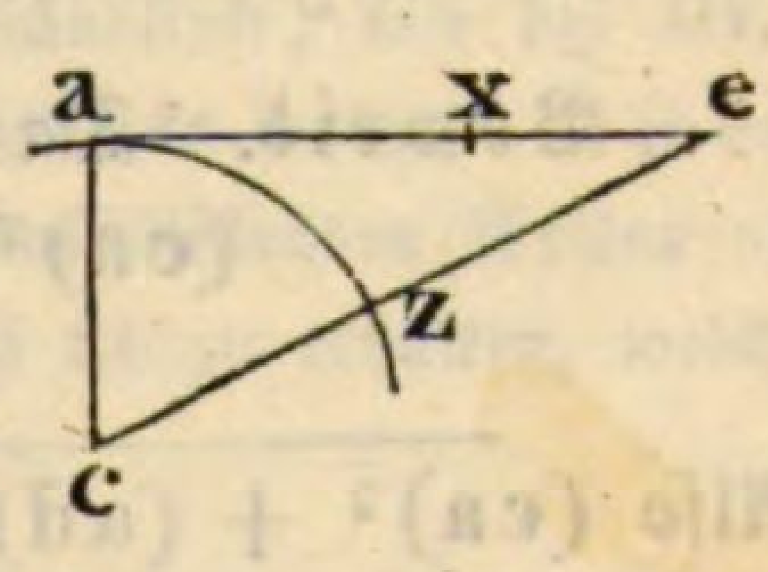
folglich ist $(ax)^2 = ae \times ex$.

Zusatz. Da $cd = ce$, und $ca = \frac{1}{2}(ae)$

so ist $ad = ce - \frac{1}{2}(ae)$

aber $ax = ad$

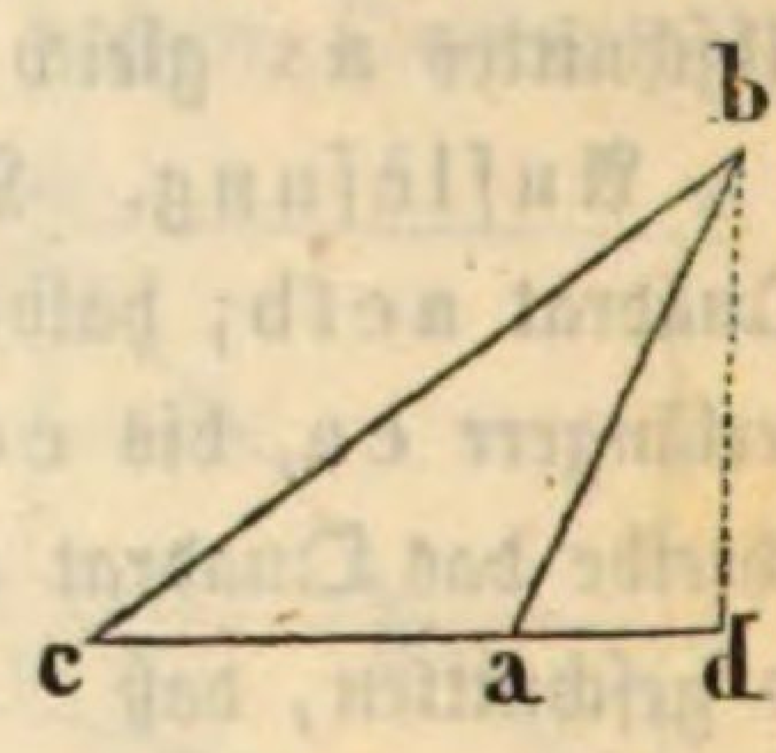
es ist also auch $ax = ce - \frac{1}{2}(ae)$



In dem rechtwinkligen Dreieck aec ist aber $ac = \frac{1}{2}(ae)$ und ce die Hypotenuse; das Stück ax wird also gefunden, wenn man in a auf ae eine Normale $ac = \frac{1}{2}(ae)$ errichtet, ce zieht, und auf dieser Linie $cz = ca$ nimmt; ez ist alsdann dem gesuchten Abschnitte ax gleich.

II. Satz 12. Lehrsatz.

In jedem stumfwinkligen Dreieck **bac** ist „das Quadrat der dem stumpfen Winkel **a** gegenüberliegenden Seite **bc**“ größer, als die Summe der Quadrate der beiden übrigen, den stumpfen Winkel einschließenden Seiten **ac** und **ab**; und zwar um das zweifache Rechteck, welches unter einer Seite **ca**, die an dem stumpfen Winkel **a** anliegt, und der Verlängerung **ad** dieser Seite bis zu dem Fußpunkte **d**, der von **b** auf **ca** gefällten Normale, enthalten ist.



Beweis. Da **cd** in **a** geschnitten wird, so ist

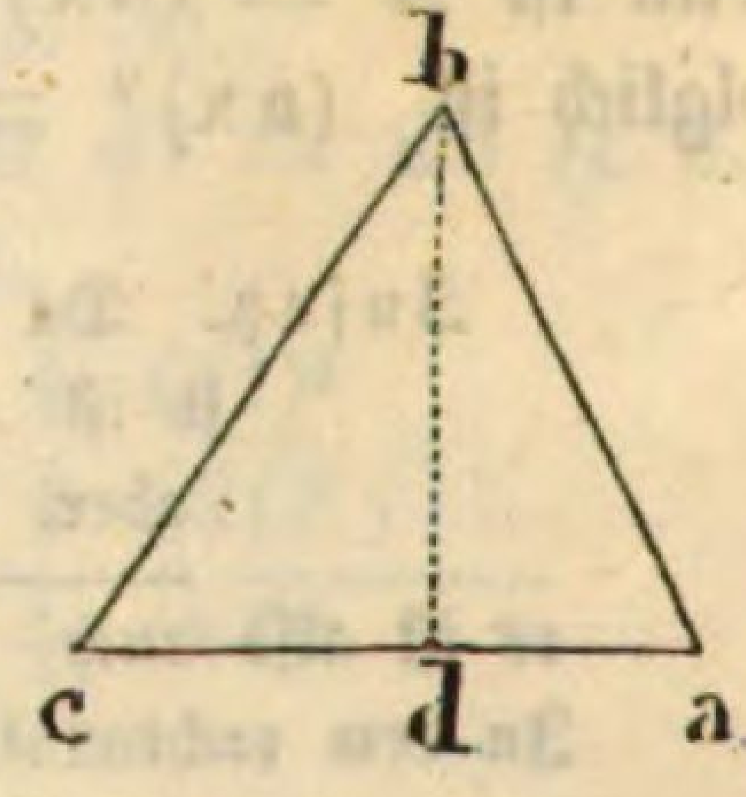
$$(cd)^2 = (ca)^2 + (ad)^2 + 2\,(ca \times ad) \quad (4.)$$
$$\text{und } (bd)^2 = (bd)^2$$

$$\text{Daher } \underbrace{(cd)^2 + (bd)^2} = (ca)^2 + \underbrace{(ad)^2 + (bd)^2} + 2\,(ca \times ad)$$
$$\text{folglich } (cb)^2 = (ca)^2 + (ab)^2 + 2\,(ca \times ad);$$

(I. 47.). Was bewiesen werden sollte.

II. Satz 13. Lehrsatz.

In jedem Dreieck **bac** ist „das Quadrat der einem spitzen Winkel **a** gegenüber liegenden Seite **bc**“ kleiner, als die Summe der Quadrate der beiden, diesen Winkel einschließenden Seiten **ac** und **ab**; und zwar um das zweifache Rechteck, welches unter einer, an dem spitzen Winkel **a** anliegenden Seite **ca** und dem Theile **ad** dieser Linie, der zwischen dem Scheitel **a** des spitzen Winkels und dem Fußpunkte **d** der von **b** auf **ca** gefällten Normale liegt, enthalten ist.



Beweis. Da **ac** in **d** getheilt ist, so hat man

$$(ca)^2 + (ad)^2 = (cd)^2 + 2\,(ca \times ad) \quad (7).$$
$$(bd)^2 = (bd)^2$$

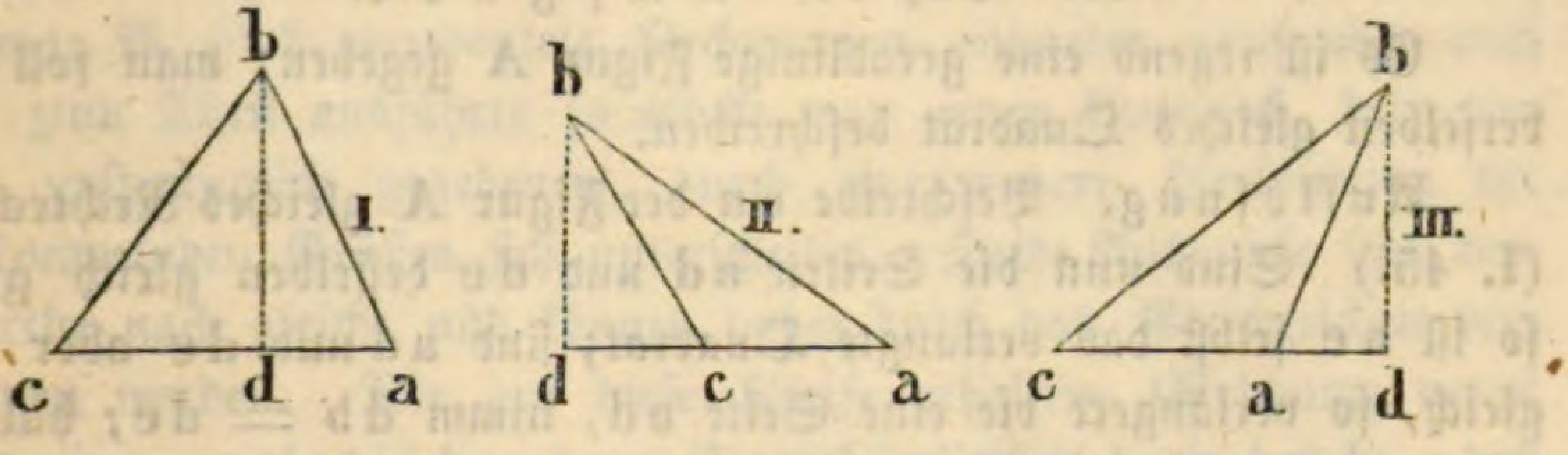
$$\text{Also } (ca)^2 + \underbrace{(ad)^2 + (bd)^2} = \underbrace{(cd)^2 + (bd)^2} + 2\,(ca \times ad)$$
$$\text{und } (ca)^2 + (ab)^2 = (bc)^2 + 2\,(ca \times ad).$$

Man muß also zu $(bc)^2$, d. i. zu dem Quadrate der dem spitzen Winkel **a** gegenüber liegenden Seite **bc** noch $2 \times (ca \times ad)$

hinzuthun, wenn eben so viel herauskommen soll, als „die Summe der Quadrate der beiden übrigen, den spitzen Winkel a einschließenden Seiten" beträgt; und es ist daher

$$(bc)^2 < (ac)^2 + (ab)^2 \text{ um } 2\,(ac \times ad).$$

Zusatz. Zieht man, von der Spitze b eines Dreiecks, eine Normale bd auf die gegenüberliegende Seite ac, welche die Grundlinie seyn soll: so wird diese dadurch in zwei Abschnitte ad und dc getheilt, und es ist ad der an dem Winkel a anliegende Abschnitt der Grundlinie. Ist nun a ein spitzer Winkel, so fällt ad mit der Grundlinie zusammen; und zwar ist dieser Abschnitt nur ein Theil der Grundlinie, wenn auch c ein spitzer Winkel ist, wie bei I. Ist aber c ein stumpfer Winkel, wie bei II.: so wird der Abschnitt ad größer, als die Grundlinie. Derselbe wird der Grundlinie gleich, wenn c ein rechter Winkel ist; und ist a ein rechter Winkel, so wird der Abschnitt ad = o; es fällt nämlich alsdann d mit a zusammen.



Ist a ein stumpfer Winkel, so fällt ad nicht mit der Grundlinie zusammen; sondern er liegt alsdann in der über a hinaus verlängerten Grundlinie.

„Das unter der Grundlinie ac und dem an a anliegenden Abschnitte ad enthaltene Rechteck, zweimal genommen" muß nun von der Summe der Quadrate der beiden, den Winkel a einschließenden Seiten ab und ac abgezogen werden, um „das Quadrat der dem Winkel a gegenüber liegenden Seite bc" zu erhalten, wenn ad mit der Grundlinie zusammenfällt; wenn also $\llcorner a < R$ ist wie dieses bei I. und II. der Fall ist. Liegt der Abschnitt ad aber in der rückwärts verlängerten Grundlinie, wie bei III., ist also $\llcorner a > R$: so muß „das Zweifache des Rechtecks $ac \times ad$" zu der Summe der Quadrate der den stumpfen Winkel einschließenden Seiten ac und ab addirt werden, um das Quadrat der Seite bc zu erhalten, welche dem Winkel a gegenüber liegt.

Daher ist für die Figuren I. und II.

$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2\,(ac \times ad)$$

und für die Figur III. ist

$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 + 2\,(ac \times ad).$$

Diese Sätze sind auch noch alsdann gültig, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.

Ist $\llcorner a = R$, so wird $ad = o$, und daher

$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2\,(ac \times o).$$

Es ist also ein Rechteck zu addiren, dessen eine Seite $= o$, und das daher selbst $= o$ ist; man hat also in diesem Falle nichts zu addiren, und es ist

$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2;$$

welches der Satz I. 47. ist

Ist $\llcorner c = R$, so wird $ad = ac$, und daher

$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2\,(ac \times ac)$$

also $(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2\,(ac)^2$

und folglich ist

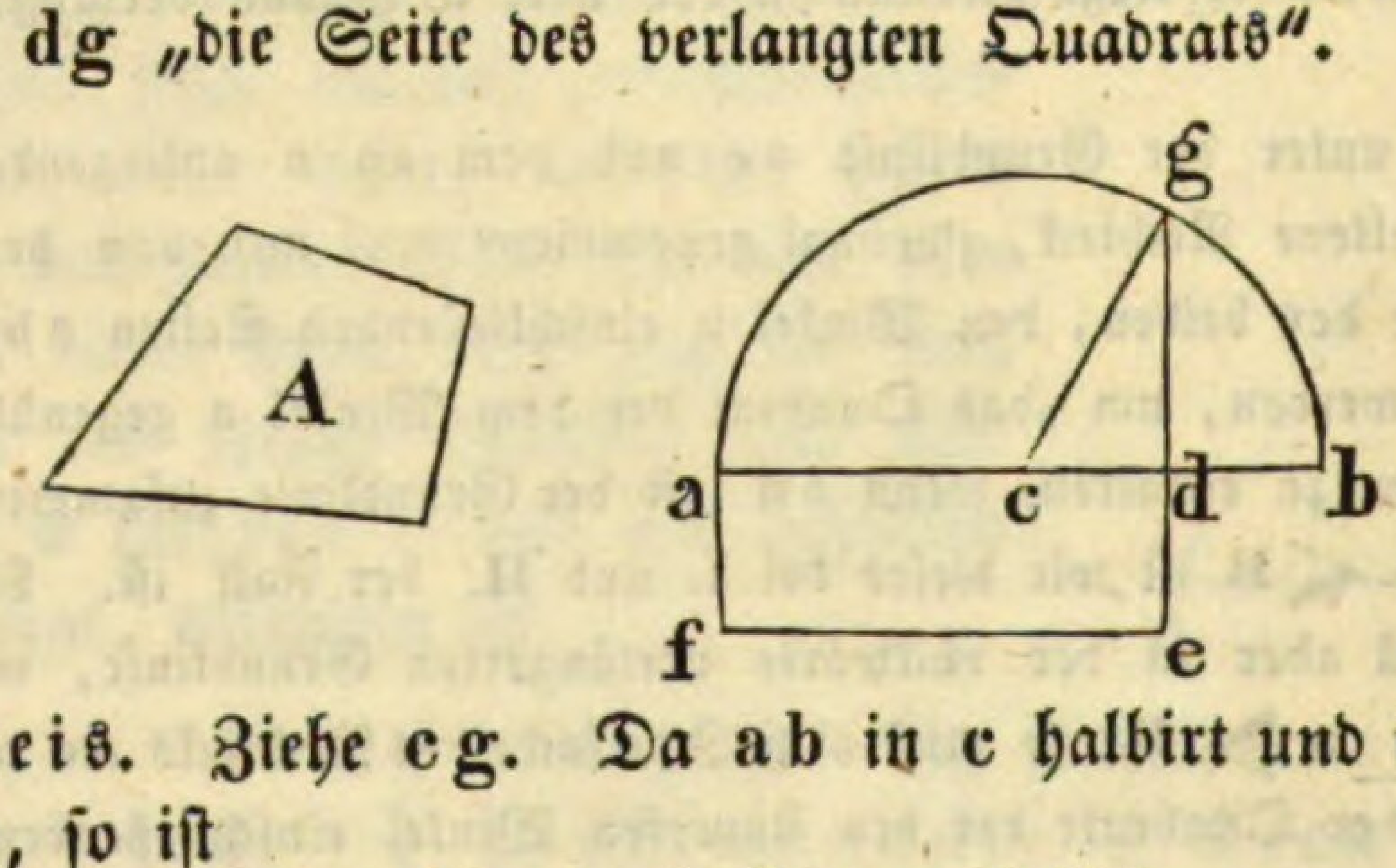
$$(bc)^2 = (ab)^2 - (ac)^2$$

Man muß also von dem Quadrate der Seite ab, die dem rechten Winkel c gegenüber liegt „das Quadrat der einen, an $\llcorner c$ anliegenden Seite ac" abziehen, um das Quadrat der andern, an $\llcorner c$ anliegenden Seite zu erhalten; wie ebenfalls unmittelbar aus I. 47. folgt.

II. Satz 14. Aufgabe.

Es ist irgend eine geradlinige Figur A gegeben; man soll ein derselben gleiches Quadrat beschreiben.

Auflösung. Beschreibe ein der Figur A gleiches Rechteck ae (I. 45.) Sind nun die Seiten ad und de desselben gleich groß, so ist ae selbst das verlangte Quadrat; sind ad und de aber ungleich, so verlängere die eine Seite ad, nimm $db = de$, halbire ab in c, und beschreibe aus c, mit $ca = cb$, den Halbkreis bga. Verlängert man nun ed, bis diese Linie den Halbkreis in g schneidet: so ist dg „die Seite des verlangten Quadrats".



Beweis. Ziehe cg. Da ab in c halbirt und in d ungleich getheilt ist, so ist

$$ad \times db + (cd)^2 = (cb)^2 \ldots \quad (5.)$$

und weil $db = de$ und $cb = cg$ (p. c.)

$$ad \times de + (cd)^2 = (cg)^2$$

Es ist aber $(cg)^2 = (dg)^2 + (cd)^2$ (I. 47.)

folglich ist auch $ad \times de + (cd)^2 = (dg)^2 + (cd)^2$

und daher $ad \times de = (dg)^2$ (G. 3.)

Da nun $ad \times de = A$ (p. c.)

so ist auch $A = (dg)^2$

was bewiesen werden sollte.

Anmerkung. In I. 45. ist nachgewiesen, „daß jede geradlinige Figur in ein Rechteck sich verwandeln läßt“; und hier in Satz 14. wird gezeigt, „wie es möglich ist, ein Quadrat zu construiren, das einem gegebenen Rechteck gleich ist“. Durch beide Sätze zusammen ist also nachgewiesen: daß es möglich ist, „für eine jede gegebene geradlinige Figur ein ihr gleiches Quadrat zu construiren“.

Beilagen zu dem zweiten Buche.

IX. Das Wesen des zweiten Buches der Elemente.

Wird irgend ein mathematischer Ausdruck umgeformt, so daß man z. B. bloß angedeutete Rechnungen entweder ganz oder auch nur zum Theil ausführt: so erhält man einen Ausdruck, der, von dem ursprünglich gegebenen, durch eine andere Verbindung der vorkommenden Größen sich unterscheidet. Beide Ausdrücke sind dem Werthe nach gleich, und können daher durch das Gleichzeichen verbunden werden. Die auf diese Weise erhaltene Gleichung nennt man eine analytische; deren Eigenthümlichkeit darin besteht, „daß die beiden Theile derselben nothwendig gleich seyn müssen“, während bei der algebraischen Gleichung die beiden Theile derselben nur „vermöge der Bedingungen einer Aufgabe gleich seyn sollen“. Die beiden Theile der analytischen Gleichung sind nur der Form nach verschieden, so daß der eine Theil aus dem andern gefunden werden kann; die der algebraischen Gleichung aber sind wesentlich verschieden von einander.

Jede analytische Gleichung drückt ein allgemeines Gesetz aus, das als ein Lehrsatz aufgestellt und bewiesen werden kann. Diese Gesetze sind für die ganze Mathematik von großer Wichtigkeit, und werden auch in der Geometrie vielfach gebraucht; und gerade die aus den einfachsten Formen entstehenden analytischen Gleichungen führen zu den wichtigsten und einflußreichsten Gesetzen, die bei jeder Gelegenheit mit dem besten Erfolg sich anwenden lassen.

Erläuterung. Es sey der einfache Ausdruck gegeben

$$(a + b) + (a - b)$$

so kann für denselben auch gesetzt werden

$$a + b + a - b$$

und da $+ b$ und $- b$ sich heben, so bleibt $a + a = 2a$; und es ist daher

$$(a + b) + (a - b) = 2a;$$

woraus folgt, wenn man durch 2 theilt

$$\frac{(a + b) + (a - b)}{2} = a.$$

Diese analytische Gleichung drückt das Gesetz aus: „Wird zu der Summe $(a + b)$ zweier Größen a und b ihre Differenz $(a - b)$ addirt, und man nimmt hiervon die Hälfte, so erhält man die größere der beiden Größen"; und eben so findet man

$$\frac{(a + b) - (a - b)}{2} = b.$$

„Die kleinere der beiden Größen wird also erhalten, wenn man, von der Summe Beider, ihre Differenz abzieht, und von dem Reste die Hälfte nimmt". Ist z. B. die Summe zweier Größen $= 38$ und ihre Differenz $= 12$, so ist

die größere $= \frac{38 + 12}{2} = \frac{50}{2} = 25$

die kleinere $= \frac{38 - 12}{2} = \frac{26}{2} = 13.$

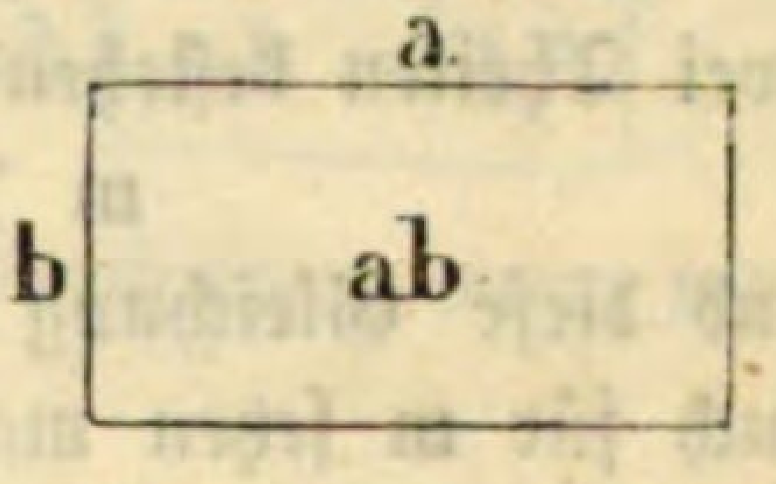
Diese Regel ist bereits bei der Auflösung mehrerer Aufgaben in §. 7. der Beilage VI. zum ersten Buche benutzt worden.

Die wichtigsten und einflußreichsten analytischen Gleichungen werden durch nähere Betrachtung der, bei der Multiplication vorkommenden Größen erhalten; und es sind dieselben für die Geometrie eben so wichtig, wie für alle übrigen Theile der Mathematik. Um nun diese Sätze nicht „als Lehnsätze", da wo von denselben Gebrauch gemacht werden soll, aufstellen zu müssen, ist es nothwendig, sie in der Geometrie selbst, auf eine dieser Wissenschaft eigenthümliche Art, abzuleiten. Dieses ist der Zweck des zweiten Buches der Elemente, in welchem die aus den bei der Multiplication vorkommenden Größen sich ergebenden analytischen Gleichungen, als Lehrsätze aufgestellt und geometrisch bewiesen werden. Das zweite Buch enthält die sämmtlichen, auf diese Weise sich ergebenden Lehrsätze vollständig; und sie werden sogleich benutzt, um einige wichtige

geometrische Sätze zu beweisen, welche nothwendige Ergänzungen zu dem ersten Buche enthalten.

Bei der Multiplication zweier Factoren hängt die Größe des Produktes von der Größe der Factoren so ab: daß, wenn der eine Factor 2 oder 3 Mal so groß wird, das Produkt ebenfalls einen 2 oder 3 Mal so großen Werth erhält. Ganz auf dieselbe Weise hängt die Fläche eines Rechtecks von den Seiten desselben ab; die Fläche desselben wird ebenfalls 2 oder 3 Mal so groß, wenn man die eine Seite desselben 2 oder 3 Mal so groß nimmt. *Werden daher zwei begrenzte gerade Linien als Stellvertreter zweier Factoren angesehen: so ist „das unter diesen Linien enthaltene Rechteck" das geometrisch construirte Produkt dieser beiden Faktoren.* Die analytische Gleichung

$$a \times b = ab$$



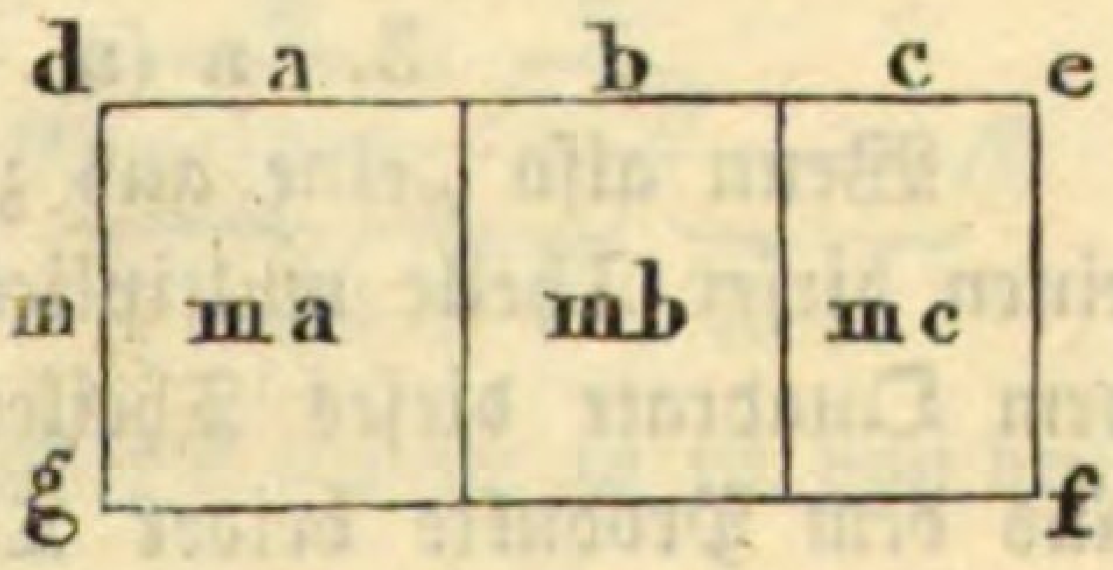
läßt sich daher durch das beistehende Rechteck geometrisch construiren; wo a und b die Seiten, und ab die Fläche desselben bedeuten.

Dieser Satz bildet die Grundlage für die sämmtlichen Sätze des zweiten Buches der Elemente.

Die erste Multiplication, welche näher erörtert werden muß, ist diejenige, bei welcher der eine Factor eine mehrgliedrige Größe ist. Wird dieser Factor $= (a + b + c)$ angenommen, und ist der andere Factor $= m$: so erhält man die analytische Gleichung

$$1. \quad m \times (a + b + c) = ma + mb + mc.$$

Diese Gleichung drückt das Gesetz aus: Wird ein Factor m mit einem anderen $(a + b + c)$, der aus mehreren Theilen besteht, multiplicirt: so kömmt eben so viel heraus, als wenn man m mit jedem der Theile a, b, c, besonders multiplicirt, und die Produkte in eine Summe vereinigt.

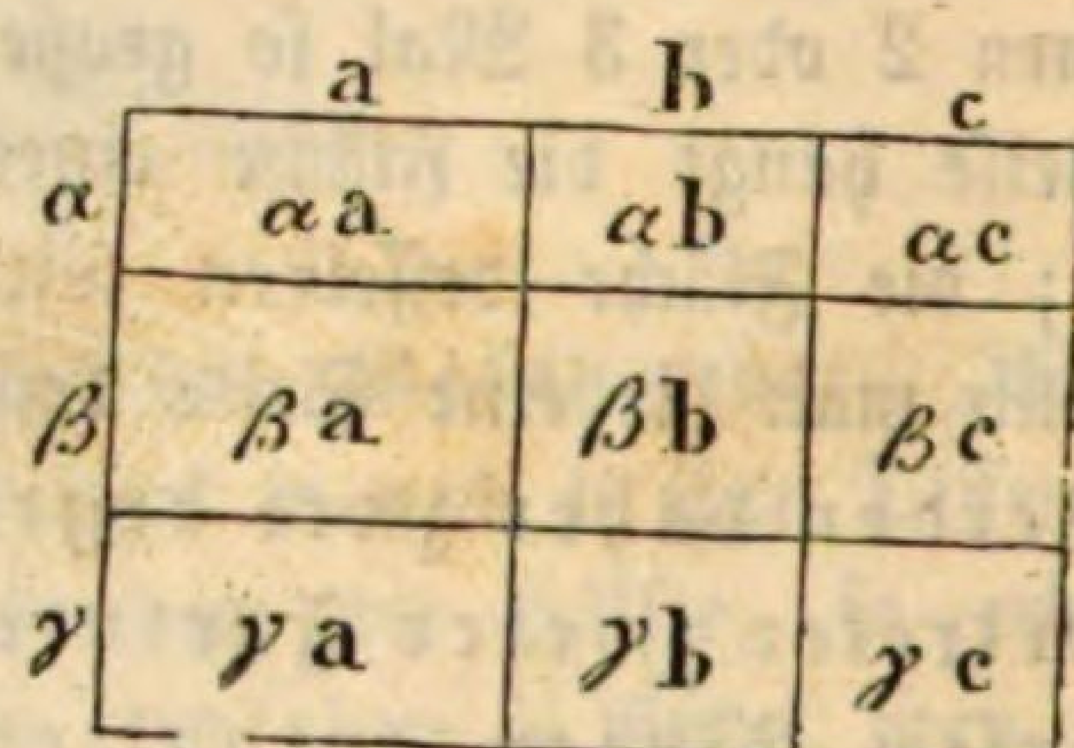


Dieses Gesetz wird durch das Rechteck **defg** geometrisch construirt; wo die eine Seite $dg = m$ ist, und die andere Seite aus den Theilen a, b und c, besteht. Das ganze Rechteck **defg** besteht aus den 3 Rechtecken, deren Flächen **ma**, **mb** und **mc** sind; und es ist Dieses der *erste Satz des zweiten Buches.*

Anmerkung. Der erste Satz läßt sich noch unter einer allgemeineren Form darstellen, wenn man auch den ersten Factor **m** als aus mehreren Theilen bestehend annimmt. Setzt man $m = (\alpha + \beta + \gamma)$, so wird

$$(\alpha + \beta + \gamma) \times (a + b + c) =$$
$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot a + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot b + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot c$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha a + \beta a + \gamma a \\ + \alpha b + \beta b + \gamma b \\ + \alpha c + \beta c + \gamma c \end{array} \right\}$$

eine analytische Gleichung, die durch das beistehende Rechteck geometrisch construirt wird.



Wird in der ersten Gleichung der zweite Factor „als nur aus zwei Theilen bestehend" angenommen: so erhält man

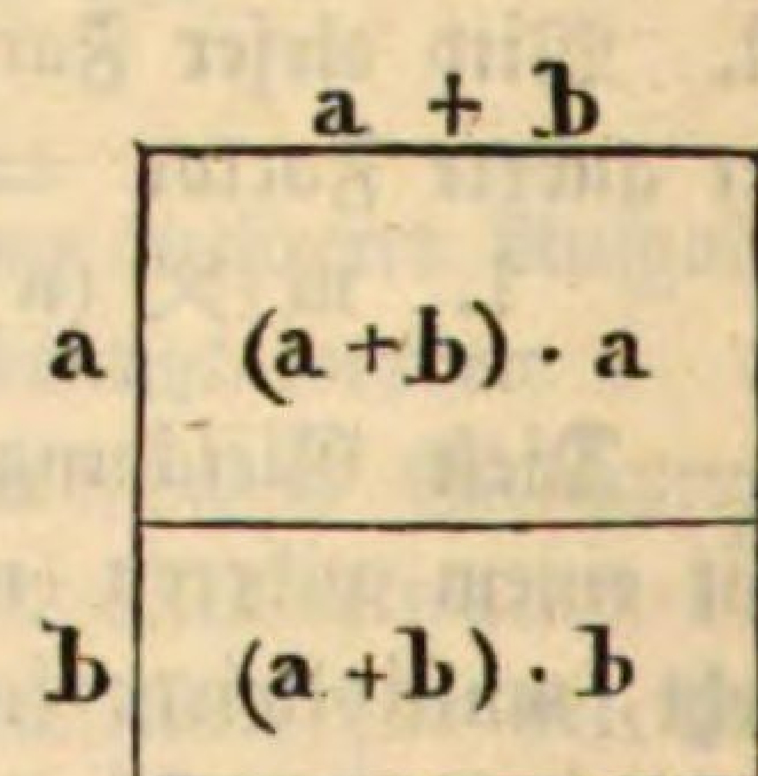
$$m \times (a + b) = ma + mb$$

und diese Gleichung behält ihre Gültigkeit, welchen Werth man auch für **m** setzen mag. Um aus dieser Gleichung besondere Formen abzuleiten, kann man entweder $m = a + b$ oder $m = a$ annehmen.

Für $m = a + b$ wird erhalten

$$2.\quad (a + b)^2 = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b.$$

Wird also eine Größe beliebig in zwei Theile getheilt: so besteht das Quadrat dieser Größe aus der Summe der Produkte, welche erhalten werden, wenn man die Größe selbst mit jedem ihrer beiden Theile multiplicirt; und Dieses ist

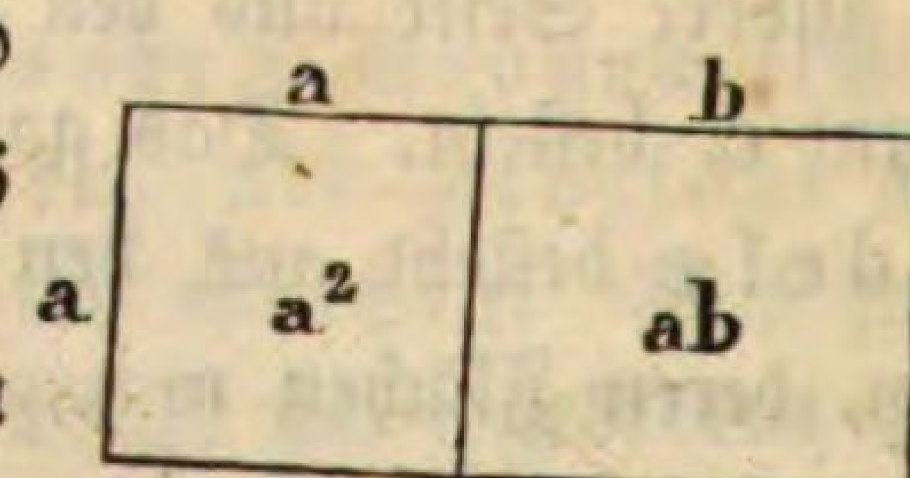


der zweite Satz des zweiten Buches, der durch das beistehende Rechteck geometrisch construirt wird.

Wird aber $m = a$ angenommen, so erhält man

$$3.\quad a\,(a + b) = a^2 + ab.$$

Wenn also „eine aus zwei Theilen bestehende Größe" mit dem einen dieser Theile multiplicirt wird: so besteht das Produkt aus dem Quadrate dieses Theiles $= a^2$ und aus dem Produkte beider Theile $= ab$; und es ist Dieses



der dritte Satz des zweiten Buches.

Nach dem zweiten Satze ist

$$(a + b)^2 = a\,(a + b) + b\,(a + b).$$

Da nun nach dem dritten Satze

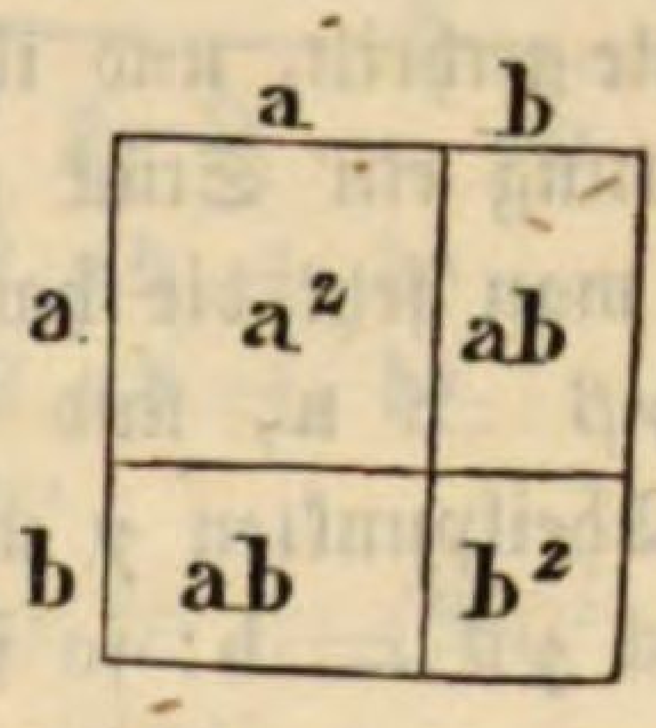
$$a\,(a + b) = a^2 + ab$$
$$\text{und}\;\; b\,(a + b) = \qquad ab + b^2$$

$$\text{so ist}\;\; a\,(a + b) + b\,(a + b) = a^2 + 2\,ab + b^2$$

und daher auch

$$4.\;\; (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2.$$

Das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht also aus „der Summe der Quadrate beider Theile, sammt dem zweifachen Produkte derselben", und es ist Dieses der vierte Satz des zweiten Buches, der durch die beistehende Figur construirt wird.



Die folgende Form für die Factoren wird erhalten, wenn man in der allgemeinen Gleichung

$$m\,(a + b) = ma + mb$$

$m = a - b$ setzt. Für diesen Werth von m wird

$$(a - b)\,(a + b) = a\,(a + b) - b\,(a + b)$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2$$

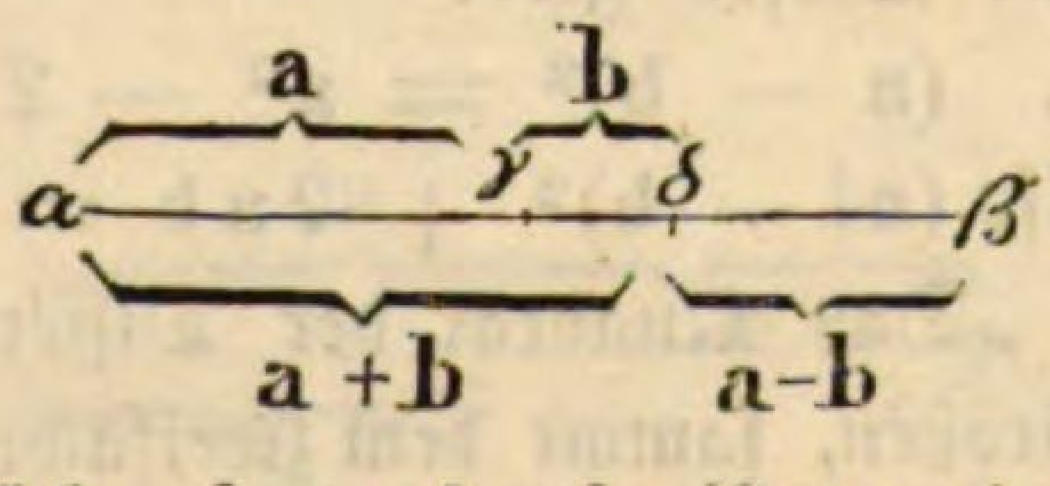
und es ist daher

$$5.\;\; (a - b)\,(a + b) = a^2 - b^2.$$

Und eben so erhält man, wenn $m = b - a$ gesetzt wird

$$6.\;\; (b - a)\,(b + a) = b^2 - a^2.$$

Wird also die Summe zweier Größen $(a + b)$ mit ihrer Differenz $(a - b)$ oder $(b - a)$ (je nachdem $a > b$ oder $b > a$ ist) multiplicirt: so giebt das Produkt die Differenz der Quadrate dieser Größen. Und diese Gleichungen geben den fünften und sechsten Satz des zweiten Buches, wie sich aus Folgendem ergiebt:



Wird die Linie $\alpha\beta$ in γ in gleiche und in δ in ungleiche Theile getheilt, und man setzt die halbe Linie $\alpha\gamma = \gamma\beta = a$, und das zwischen den Theilpunkten γ und δ liegende Stück $\gamma\delta = b$: so ist von den ungleichen Theilen

$$\alpha\delta = a + b \;\text{ und }\; \delta\beta = a - b.$$

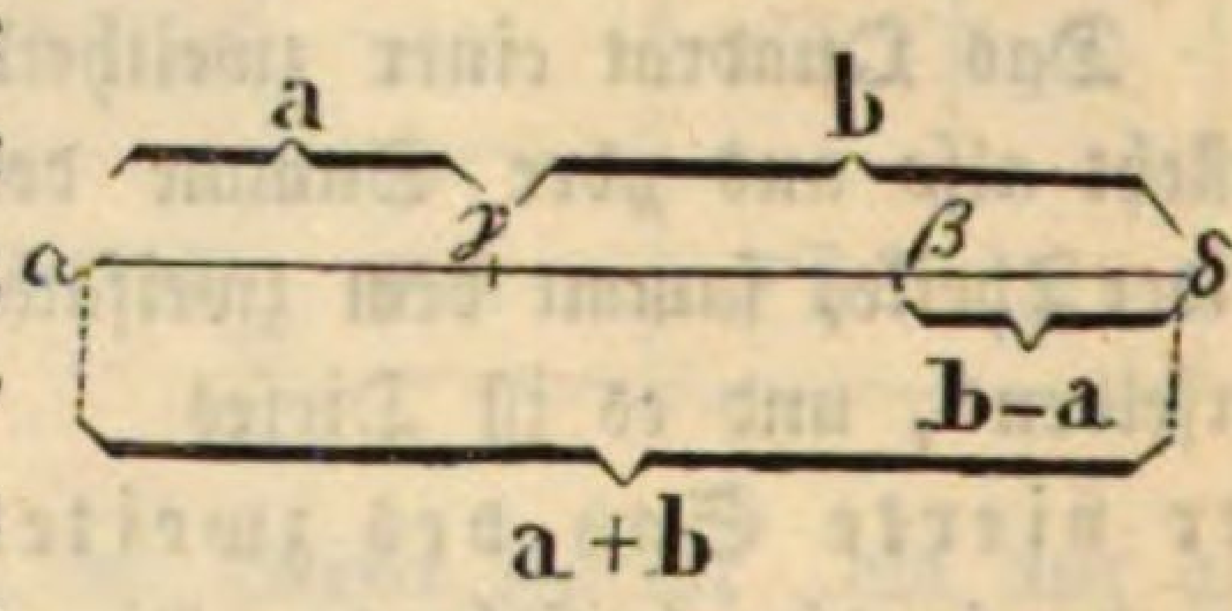
Das Rechteck der ungleichen Theile ist also

$$\alpha\delta \times \delta\beta = (a + b)\,(a - b).$$

Da nun $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
so ist auch $\alpha\delta \times \delta\beta = a^2 - b^2$.
Es ist aber $a^2 = (\beta\gamma)^2$ und $b^2 = (\gamma\delta)^2$
folglich ist $\alpha\delta \times \delta\beta = (\beta\gamma)^2 - (\gamma\delta)^2$
und daher $\alpha\delta \times \delta\beta + (\gamma\delta)^2 = (\beta\gamma)^2$
wie in dem fünften Satze geometrisch bewiesen wird.

Die Uebereinstimmung des sechsten Satzes, mit der in Nr. 6 angegebenen Gleichung, läßt sich auf gleiche Art nachweisen.

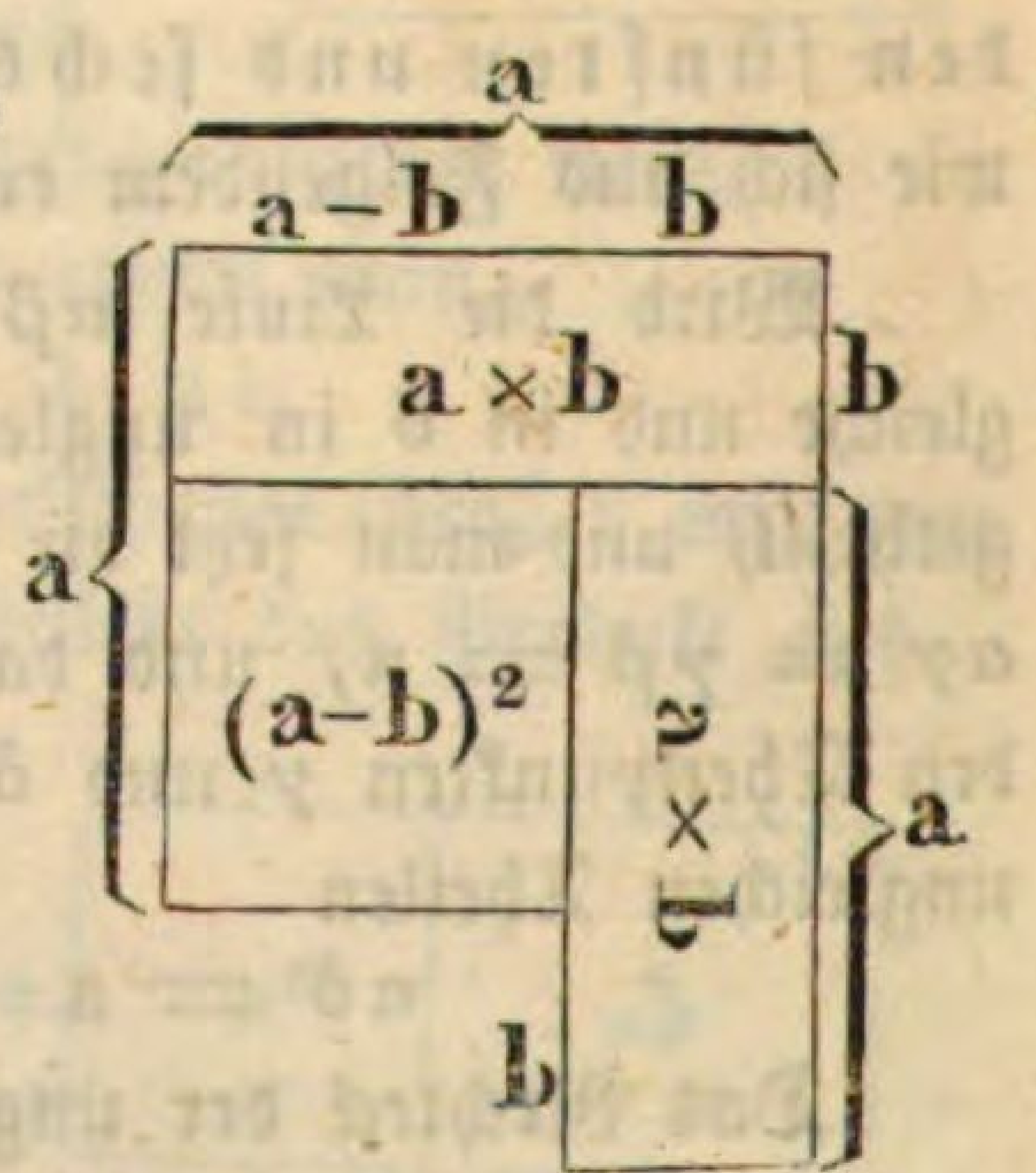
Wird die Linie $\alpha\beta$ in γ in gleiche Theile getheilt, und ihr in gerader Richtung ein Stück $\beta\delta$ angesetzt; und man setzt die halbe Linie $\alpha\gamma = \gamma\beta = a$, und das zwischen den Theilpunkten γ und δ liegende Stück $\gamma\delta = b$: so ist



das angesetzte Stück $\beta\delta = b - a$
und die ganze verlängerte Linie $\alpha\delta = a + b$.
Das Rechteck Beider ist also
$\beta\delta \times \alpha\delta = (b - a)(a + b)$.
Und da $(b - a)(a + b) = b^2 - a^2$
so ist auch $\beta\delta + \alpha\delta = b^2 - a^2$.
Da nun $b^2 = (\gamma\delta)^2$ und $a^2 = (\beta\gamma)^2$
so folgt $\beta\delta \times \alpha\delta = (\gamma\delta)^2 - (\beta\gamma)^2$
und es ist daher $\beta\delta \times \alpha\delta + (\beta\gamma)^2 = (\gamma\delta)^2$
wie in dem sechsten Satze geometrisch bewiesen wird.

Da bisher die Eigenthümlichkeiten der Produkte $(a + b)^2$ und $(a + b)(a - b)$ näher betrachtet worden sind: so bleibt nun noch übrig, „auch die Eigenschaften von dem Produkte $(a - b)^2$ anzugeben". Es ist aber

$(a - b)^2 = (a - b)\,a - (a - b)\,b$
und Dieses giebt



7. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
also $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$

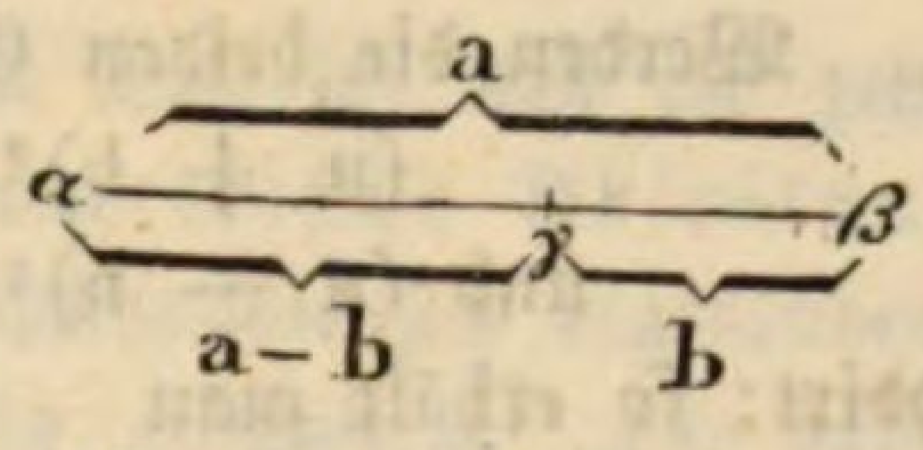
„Das Quadrat der Differenz zweier Größen, sammt dem zweifachen Produkte derselben", besteht also aus der Summe der Quadrate dieser Größen; und Dieses ist der siebente Satz des zweiten Buches,

der durch die beistehende Figur construirt wird; die aus $a^2 + b^2$ besteht, und zugleich auch aus den 3 Theilen $(a - b)^2$, $a \times b$ und $a \times b$; woraus unmittelbar folgt, daß

$$(a - b)^2 + 2\,ab = a^2 + b^2.$$

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes läßt sich auch auf folgende Art nachweisen:

Man schneide die Linie $\alpha\beta$ in γ beliebig, setze $\alpha\beta$ an a, und den Abschnitt $\beta\gamma$ derselben = b: so ist der Abschnitt $\alpha\gamma = (a - b)$.



$$\text{Nun ist } (a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$
$$\text{also auch } (\alpha\gamma)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$
$$\text{und daher } (\alpha\gamma)^2 + 2\,ab = a^2 + b^2$$

Da aber $ab = \alpha\beta \times \beta\gamma$, $a^2 = (\alpha\beta)^2$ und $b^2 = (\beta\gamma)^2$
so ist $(\alpha\gamma)^2 + 2\,(\alpha\beta \times \beta\gamma) = (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2$
und Dieses ist die Form, unter welcher der siebente Satz vorkömmt.

Nachdem „die verschiedenen Formen der Produkte zweitheiliger Factoren" aufgefunden sind, bleibt nur noch übrig: zu untersuchen, „was herauskömmt, wenn diese Produkte entweder von einander abgezogen oder addirt werden".

Da nun $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ nach Nr. 4.
und $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ „ Nr. 7.

so erhält man, wenn beide Gleichungen von einander abgezogen werden

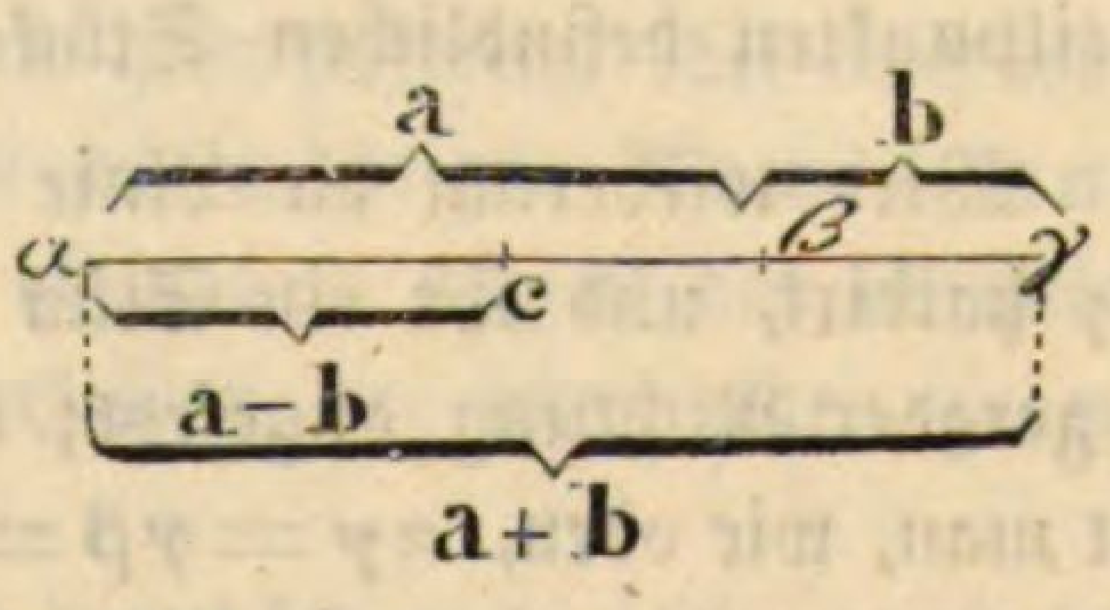
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4\,ab$$

und es ist daher

$$8.\quad (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,ab.$$

„Das Quadrat der Summe zweier Größen" besteht also aus „dem Quadrate der Differenz dieser Größen, sammt dem vierfachen Produkte derselben"; und Dieses ist der achte Satz des zweiten Buches.

Es werde von der Linie $\alpha\beta$ beliebig ein Stück βc abgeschnitten, und derselben ein eben so großes Stück $\beta\gamma = \beta c$ in gerader Richtung angesetzt: so ist, wenn man setzt



$$\alpha\beta = a \text{ und } \beta c = \beta\gamma = b$$
$$\alpha\gamma = a + b \text{ und } \alpha c = a - b$$

und es ist nun nach Nr. 8.

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,ab$$

folglich ist auch $(\alpha\gamma)^2 = (\alpha c)^2 + 4\,ab$

Und weil $ab = \alpha\beta \times \beta\gamma = \alpha\beta \times \beta c$

so ist $(\alpha\gamma)^2 = (\alpha c)^2 + 4\,(\alpha\beta \times \beta c)$

und Dieses ist die Form, unter welcher der achte Satz vorgetragen wird.

Werden die beiden Gleichungen Nr. 4. und Nr. 7.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

und $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$

addirt: so erhält man

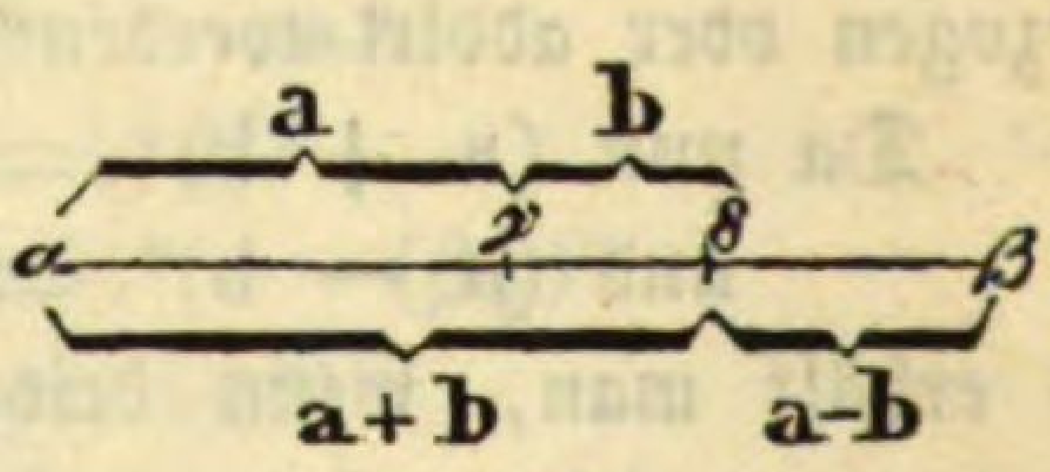
9. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2$

und eben so findet man auch

10. $(a + b)^2 + (b - a)^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2$.

Addirt man also zu dem Quadrate der Summe zweier Größen „das Quadrat ihrer Differenz": so wird die zweifache Summe der Quadrate dieser Größen erhalten, und diese Gleichungen geben den neunten und zehnten Satz des zweiten Buches, wie auf folgende Art nachgewiesen werden kann.

Wird die Linie $\alpha\beta$ in γ in gleiche und in δ in ungleiche Theile getheilt, und man setzt die halbe Linie $\alpha\gamma = \gamma\beta = a$, und das zwischen den Theilpunkten γ und δ liegende Stück derselben $\gamma\delta = b$: so ist



$$\alpha\delta = a + b \text{ und } \beta\delta = a - b.$$

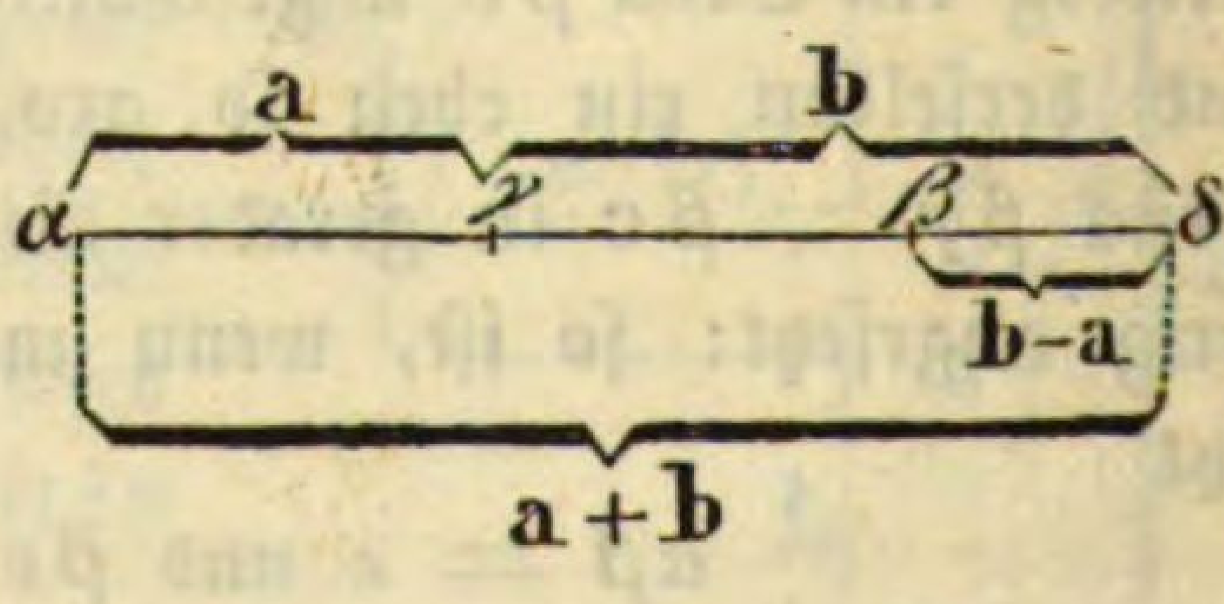
Da nun nach Nr. 9. ist

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2$$

so ist auch $(\alpha\delta)^2 + (\beta\delta)^2 = 2\,(\alpha\gamma)^2 + 2\,(\gamma\delta)^2$.

„Die Summe der Quadrate der ungleichen Theile" ist also zweimal so groß, „als die Quadrate der halben Linie $\alpha\gamma$, und des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stückes $\gamma\delta$"; welches der neunte Satz ist.

Wird wiederum die Linie $\alpha\beta$ in γ halbirt, und ihr ein Stück $\beta\delta$ in gerader Richtung angesetzt; und setzt man, wie oben, $\alpha\gamma = \gamma\beta = a$, und das zwischen den Theilpunkten γ und δ liegende Stück $\gamma\delta = b$: so ist $\alpha\delta = a + b$, und $\beta\delta = b - a$.



Da nun nach Nr. 10.

$$(a + b)^2 + (b - a)^2 = 2 a^2 + 2 b^2$$

so ist auch

$$(\alpha\delta)^2 + (\beta\delta)^2 = 2 (\alpha\gamma)^2 + 2 (\gamma\delta)^2$$

und Dieses ist der zehnte Satz.

Die bisherige Untersuchung giebt den Beweis: daß die zehn ersten Sätze des zweiten Buches „die geometrische Ableitung der einfachen, aus Betrachtung der Multiplication sich ergebenden, analytischen Gleichungen" vollständig enthalten. Die durch die zehn ersten Sätze bewiesenen Gesetze sind der Reihe nach die in den folgenden Gleichungen enthaltenen Regeln:

1. $m (a + b + c \ldots) = ma + mb + mc \ldots$
2. $(a + b) (a + b) = (a + b) a + (a + b) b$
3. $a (a + b) = a^2 + ab$
4. $(a + b)^2 = a^2 + 2 ab + b^2$
5. $(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$
6. $(a + b) (b - a) = b^2 - a^2$
7. $(a - b)^2 = a^2 - 2 ab + b^2$
8. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4 ab$
9. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 a^2 + 2 b^2$
10. $(a + b)^2 + (b - a)^2 = 2 a^2 + 2 b^2$.

In den noch übrigen vier Sätzen des zweiten Buches wird nun sogleich gezeigt: wie diese Sätze sich benutzen lassen, um einige wichtige geometrische Sätze zu beweisen.

Zuerst wird mit Hülfe des sechsten Satzes die wichtige Aufgabe Satz 11. gelös't:

„Eine Linie so zu theilen, daß das Quadrat des einen Theils eben so groß werde, als das unter dem anderen Theile und der ganzen Linie enthaltene Rechteck".

Diese Aufgabe wird von den Alten „der goldene, oder auch wohl der göttliche Schnitt" genannt; wegen der wichtigen Anwendung, die von derselben gemacht wird (IV. 10.), und wegen des mannichfachen Gebrauchs, den man von derselben bei schwierigen geometrischen Untersuchungen machen kann.

Die beiden folgenden Sätze, also der 12te und 13te, enthalten die Erweiterungen, welche der pythagoräische Lehrsatz (I. 47.) zuläßt. Während dort bloß gezeigt wird, „wie in einem rechtwinkligen

Dreieck das Quadrat der, dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seiten von den Quadraten der beiden übrigen Seiten abhängt": wird hier mit Hülfe der Sätze 4. und 7. nachgewiesen, „wie überhaupt das Quadrat einer Seite eines Dreiecks, die einem stumpfen oder einem spitzen Winkel gegenüber liegt, von den Quadraten der beiden übrigen diesen Winkel einschließenden Seiten abhängt".

Endlich wird durch den 14ten Satz die Theorie „von der Verwandlung der Figuren" durch die Auflösung der Aufgabe ergänzt: „eine geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln".

Die Auflösung dieser Aufgabe beruhet auf dem fünften Satze; und während man durch die Aufgaben (I. 42., 44. und 45.) berechtigt wird, „für jede geradlinige Figur, die nur ihrer Größe nach berücksichtiget werden soll, ein Rechteck zu substituiren": so kann man jetzt für jede solche Figur das einfachste aller Rechtecke, das Quadrat, setzen.

Das ganze zweite Buch besteht aus zwölf Lehrsätzen und zwei Aufgaben. Die zehn ersten dieser Lehrsätze enthalten die geometrische Ableitung aller der Regeln, welche durch die einfachsten analytischen Gleichungen ausgedrückt werden; und in den beiden übrigen wird von einigen dieser Sätze Gebrauch gemacht, um „die Abhängigkeit der Quadrate der Seiten eines Dreiecks von einander" vollständig zu bestimmen. Die Bedeutung dieser beiden Lehrsätze, so wie die der beiden in diesem Buche vorkommenden Aufgaben, soll in den folgenden Beilagen näher erläutert werden.

X. Das Wesen und die Anwendung der beiden Aufgaben des zweiten Buches.

Durch die beiden Aufgaben in den Sätzen 11. und 14. wird gelehrt:

1) eine begrenzte gerade Linie so zu theilen, daß das Quadrat des einen Theils „dem Rechteck aus dem andern Theile und der ganzen Linie" gleich wird; und

2) die Seite eines Quadrates zu finden, das einem gegebenen Rechteck gleich ist.

Beide Aufgaben werden mit Hülfe der Sätze 6. und 5., und also mit Hülfe der analytischen Gleichung $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ gelös't.

Aus der Auflösung der ersten Aufgabe, wie sie in Satz 11. gegeben ist, folgt: daß nicht nur in der zu diesem Satze gehörigen Figur

$$A = C, \text{ sondern auch } A + B = B + C.$$

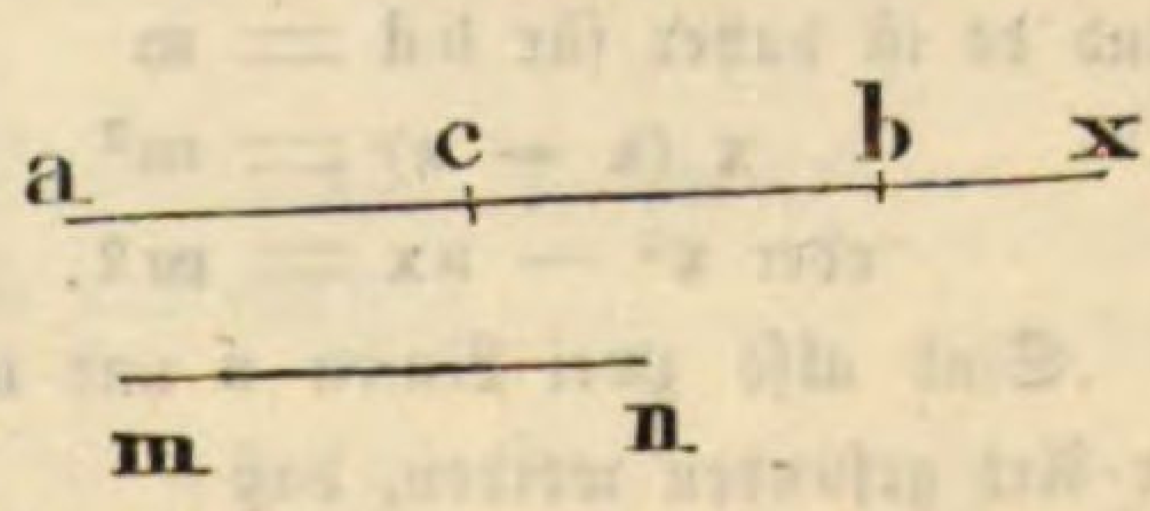
Es ist also $(ax)^2 = ae \times ex$
und zugleich $bd \times da = (ab)^2$.

In beiden Fällen kömmt es darauf an, „aus $ae = ab$ den Werth von $ax = ad$ zu finden"; und die ganze Auflösung besteht darin, „daß man $ac = \frac{1}{2}(ab)$ nimmt, c mit e verbindet, und $cd = ce$ macht"; es ist alsdann der Ueberschuß der cd über ca, also ad, die gesuchte Linie.

Der Ausdruck $bd \times da = (ab)^2$ enthält die Aufgabe: „eine Linie ba soll verlängert werden; so daß das Rechteck, das unter der verlängerten Linie und dem angesetzten Stücke enthalten ist, also $bd \times da$, dem Quadrate der gegebenen Linie gleich werde". Diese Aufgabe läßt sich noch unter einer allgemeineren Form darstellen, und es ist alsdann die Auflösung im Wesentlichen noch immer dieselbe. Also:

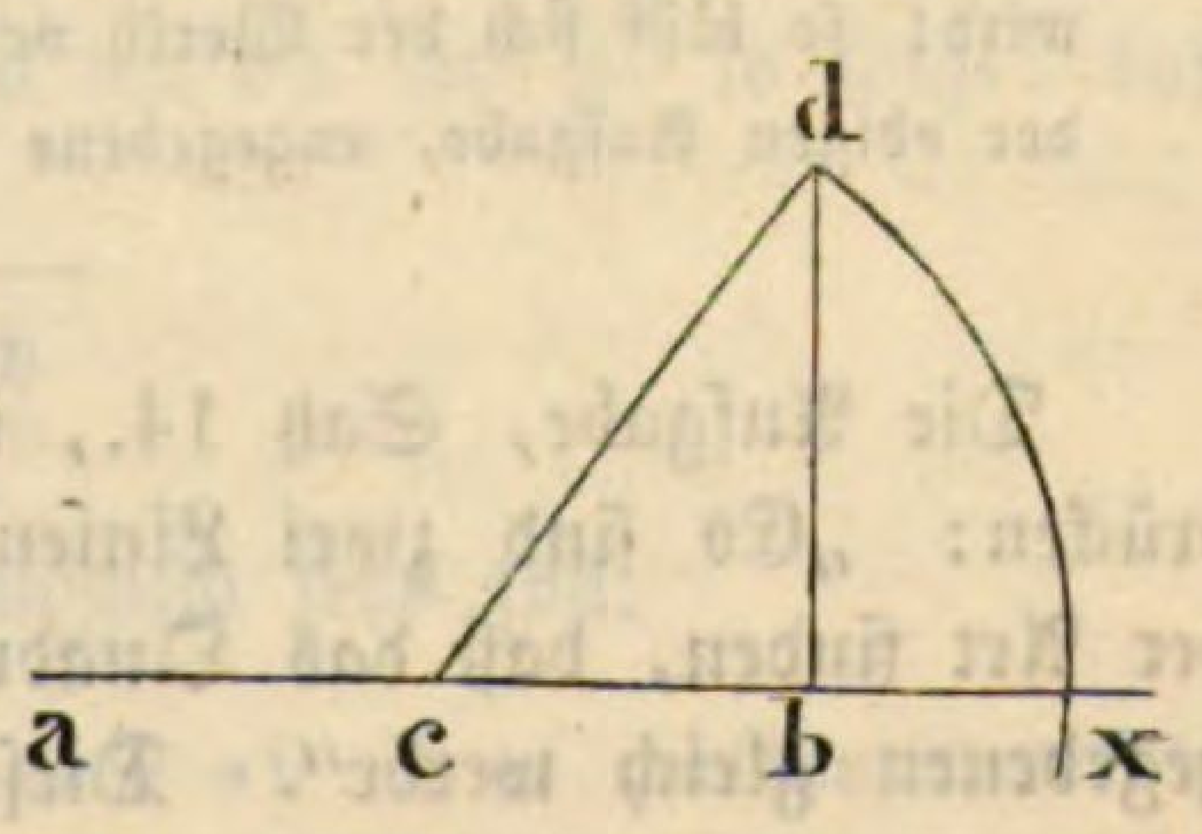
Aufgabe 1. Man soll die gegebene Linie ab in gerader Richtung verlängern; so daß das Rechteck, welches unter der verlängerten Linie und deren Verlängerung enthalten ist, „dem Quadrate einer zweiten gegebenen Linie mn" gleich wird.

Analysis. Ist bx die gesuchte Verlängerung, und man halbirt ab in c: so ist



$$(cx)^2 = ax \times bx + (bc)^2. \quad (6.)$$

Da nun $ax \times bx = (mn)^2$ werden soll: so ist auch $(cx)^2 = (mn)^2 + (bc)^2$; nun ist mn und bc gegeben, folglich auch cx; und da cb gegeben ist, so ist bx bestimmt.



Auflösung. Halbire ab in c; errichte in b auf ab eine Normale

bd = mn; ziehe cd und nimm cx = cd: so ist bx „die gesuchte Verlängerung der Linie ab".

Beweis. Es ist $(cd)^2 = (bd)^2 + (cb)^2$ (I. 47.)
folglich auch $(cx)^2 = (mn)^2 + (cb)^2$ (p. c.)
Da nun $(cx)^2 = ax \times bx + (cb)^2$ (6.)

so folgt $ax \times bx + (cb)^2 = (mn)^2 + (cb)^2$
und daher $ax \times bx = (mn)^2$
wie verlangt wird.

Zusatz 1. Setzt man die zu verlängernde Linie $ab = a$, also $cb = \frac{1}{2} a$, $bd = mn = m$, und die gesuchte Verlängerung $bx = x$: so ist
$ax = a + x$ und $cx = cd = \frac{1}{2} a + x$.
Da nun $(cd)^2 = (cb)^2 + (bd)^2$
so ist auch $(\frac{1}{2} a + x)^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + m^2$.
Und da $(\frac{1}{2} a + x)^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + 2 . \frac{1}{2} ax + x^2$ (4.)
$= (\frac{1}{2} a)^2 + ax + x^2$
so ist auch $(\frac{1}{2} a)^2 + ax + x^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + m^2$
Und hieraus folgt $ax + x^2 = m^2$
oder $(a + x) x = m^2$
nämlich es ist $(ax) \times (bx) = (bd)^2 = (mn)^2$.

Zusatz 2. Sind zwei Linien a und m gegeben, und soll eine dritte Linie x von der Art gefunden werden, daß
$$x^2 + ax = m^2$$
wird: so läßt sich der Werth von x immer durch die, bei der Auflösung der obigen Aufgabe, angegebene Construction finden.

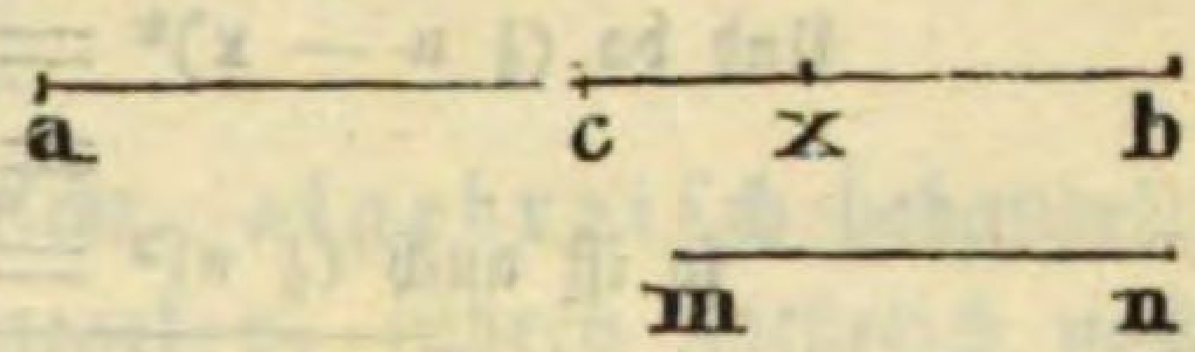
Zusatz 3. Da $ax \times bx = (bd)^2$
so ist auch, wenn man $ax = x$ setzt
und $ab = a$, $bx = x - a$
Und es ist daher für $bd = m$
$x (x - a) = m^2$
oder $x^2 - ax = m^2$.

Sind also zwei Linien a und m gegeben, und soll eine dritte x von der Art gefunden werden, daß
$$x^2 - ax = m^2$$
wird: so läßt sich der Werth von x ebenfalls durch die, bei der Auflösung der obigen Aufgabe, angegebene Construction bestimmen.

Die Aufgabe, Satz 14., läßt sich auch unter der Form ausdrücken: „Es sind zwei Linien gegeben; man soll eine dritte von der Art finden, daß das Quadrat derselben dem Rechteck der beiden gegebenen gleich werde". Diese Aufgabe führt unmittelbar zu der folgenden, deren Auflösung ebenfalls von Satz 14. abhängt.

Aufgabe 2. Eine gegebene Linie ab soll in x so getheilt werden: daß „das unter den beiden Abschnitten enthaltene Rechteck" dem Quadrate einer zweiten gegebenen Linie mn gleich werde.

Analysis. Es soll ab in x so getheilt werden, daß



$$ax \times xb = (mn)^2$$

Man halbire ab in c, so ist

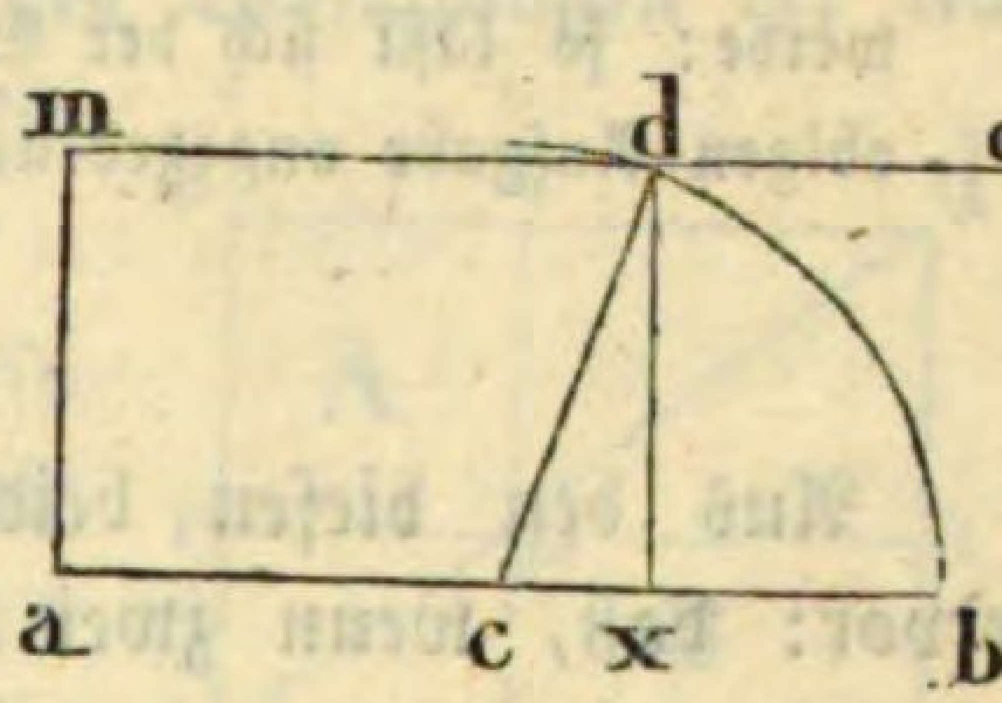
$$ax \times xb + (cx)^2 = (cb)^2 \quad (5.)$$

und daher auch $(mn)^2 + (cx)^2 = (cb)^2$

folglich wird $(cx)^2 = (cb)^2 - (mn)^2$.

Da nun cb und mn gegeben sind, so ist auch cx gegeben; und da c der Lage nach bekannt ist, so ist auch x der Lage nach bestimmt.

Auflösung. Halbire ab in c; errichte in a auf ab eine Normale am = mn, und ziehe durch m die me parallel der ab. Aus c beschreibe mit cb einen Kreisbogen, der die me in d schneidet; und von d fälle die Normale dx auf ab: so trifft diese die ab in dem gesuchten Punkte x.



Beweis. Es ist $(cd)^2 = (cx)^2 + (xd)^2$
und da $cd = cb$ und $dx = am = mn$
so ist auch $(cb)^2 = (cx)^2 + (mn)^2$.
Nun ist $(cb)^2 = ax \times xb + (cx)^2$ (5.)
folglich ist auch

$$ax \times xb + (cx)^2 = (cx)^2 + (mn)^2$$

und daher $ax \times xb = (mn)^2$

wie verlangt wird.

Determination. Es kann nicht seyn $dx > cd$ (I. 18.) und da $dx = am = mn$ und $cd = ca = \frac{ab}{2}$, so folgt: daß nicht seyn darf

$$mn > \frac{ab}{2}$$

wenn eine Auflösung der Aufgabe möglich seyn soll.

Zusatz 1. Setzt man die zu theilende Linie $ab = a$, und den einen Abschnitt derselben $bx = x$: so ist der andere Abschnitt $ax = a - x$, ch

$= cd = \frac{1}{2} a$, und $cx = \frac{1}{2} a - x$. Wird also $xd = am = mn = m$ gesetzt, so folgt aus der Gleichung

$$(cd)^2 = (cx)^2 + (xd)^2$$

$$\text{daß } (\tfrac{1}{2} a)^2 = (\tfrac{1}{2} a - x)^2 + m^2$$

$$\text{Und da } (\tfrac{1}{2} a - x)^2 = (\tfrac{1}{2} a)^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2} ax + x^2 \quad (7.)$$

$$= (\tfrac{1}{2} a)^2 - ax + x^2$$

$$\text{so ist auch } (\tfrac{1}{2} a)^2 = (\tfrac{1}{2} a)^2 - ax + x^2 + m^2$$

$$\text{also } ax - x^2 = m^2$$

$$\text{und } (a - x)\, x = m^2$$

Nämlich es ist $(ax) \times (xb) = (mn)^2$ wie verlangt wird.

Zusatz 2. Sind zwei Linien a und m gegeben, und soll eine dritte Linie $= x$ von der Art gefunden werden, daß

$$ax - x^2 = m^2$$

werde: so läßt sich der Werth von x immer durch „die bei Auflösung der obigen Aufgabe angegebene Construction" finden.

Aus den diesen beiden Aufgaben beigefügten Zusätzen geht hervor: daß, wenn zwei Linien a und m gegeben sind, und eine dritte x gefunden werden soll, welche von den beiden gegebenen so abhängt, daß entweder ist

1. $x^2 + ax = m^2$ oder
2. $x^2 - ax = m^2$ oder endlich
3. $ax - x^2 = m^2$

sich die gesuchte Linie immer mit Hülfe der Constructionen finden läßt, die bei Auflösung der obigen beiden Aufgaben gebraucht werden; und man benutzt in den beiden ersten Fällen die Aufgabe Nr. 1., welche von der Aufgabe Satz 11. nicht wesentlich verschieden ist; und in dem dritten Falle wird die Aufgabe Nr. 2. benutzt, deren Auflösung unmittelbar aus der Aufgabe Satz 14. folgt.

In den beiden ersten Fällen findet durchaus keine Beschränkung statt; in dem dritten Falle aber darf m nicht größer als $\frac{1}{2}$ a seyn, wenn die Aufgabe sich soll lösen lassen.

Zusatz. Da jede geradlinige Figur $= A$ in ein Quadrat sich verwandeln läßt, so folgt: daß der Werth von x auch alsdann durch das angegebene Verfahren gefunden werden kann, wenn die Gleichungen sind

$$x^2 + ax = A$$

$$x^2 - ax = A$$

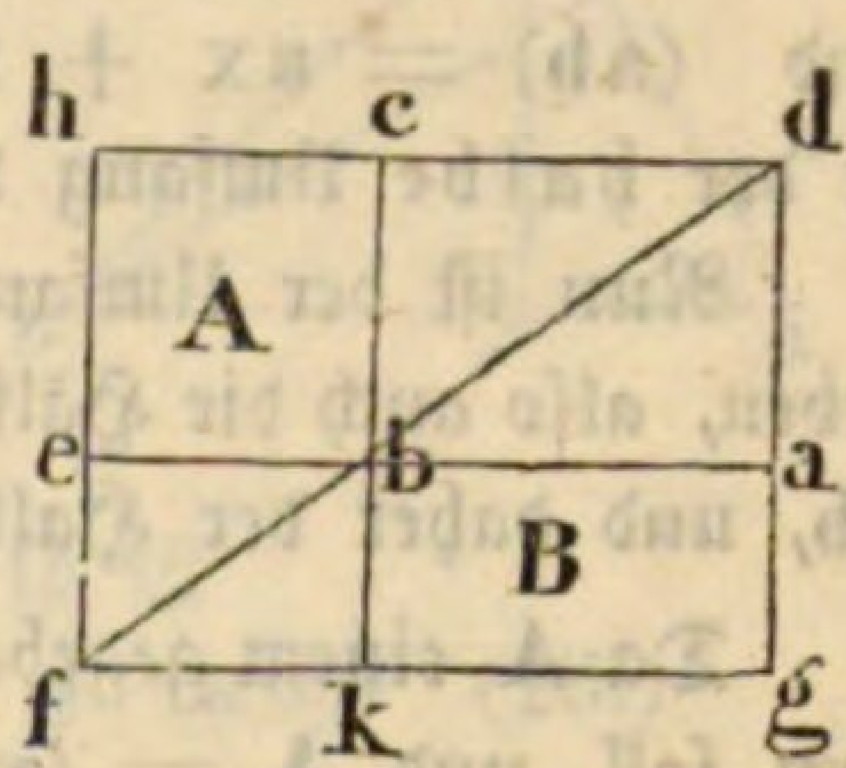
$$\text{oder } ax - x^2 = A$$

Da nun diese drei Ausdrücke alle verschiedenen Formen der quadratischen Gleichungen enthalten, so folgt: daß jede geometrische Aufgabe, die algebraisch zu einer quadratischen Gleichung führt, mit Hülfe der obigen beiden Aufgaben, welche unmittelbar aus den Sätzen 11. und 14. sich ergeben, gelöst werden kann.

Die geometrischen Aufgaben, welche, algebraisch behandelt, eine Gleichung des ersten Grades gegeben, führen natürlich noch zu einfacheren Constructionen; und es verdient in dieser Beziehung hier noch folgende Aufgabe gelös't zu werden:

Aufgabe 3. Ein gegebenes Rechteck soll in ein anderes verwandelt werden, in welchem eine gegebene Seite vorkömmt.

Analysis. Ist **A** das gegebene Rechteck und **ba** die Seite des gesuchten Rechtecks **B**; und man setzt **ab** an **eb**, so daß beide in gerader Linie liegen: so entspricht **B** den Bedingungen der Aufgabe, wenn **A** und **B** die Ergänzungen eines Parallelogramms **gh** sind (I. 43.)



Es ist aber **ba** und **bc** gegeben, also auch das Rechteck **abcd**, und daher die Diagonale **df** der Lage nach; aber auch **he** ist der Lage nach gegeben, folglich der Durchschnittspunkt **f**. Daher ist Δ **dhf** gegeben, und folglich auch das Rechteck **dhfg**; wodurch **B** bestimmt ist.

Auflösung. Man verlängere die Seite **eb** des gegebenen Rechtecks **A**; mache **ba** der gegebenen Seite des gesuchten Rechtecks gleich; vollende das Rechteck **abcd**, ziehe die Diagonale **db** und verlängere dieselbe, bis sie die verlängerte **he** in **f** schneidet. Durch **f** ziehe **fg** parallel **hd**, bis sie die verlängerte **da** in **g** trifft, und verlängere **cb** bis **k**: so ist **abkg** = **B** „das gesuchte Rechteck".

Beweis. Es ist **B** = **A**. (I. 43.)

Zusatz. Diese Aufgabe enthält zwar bloß einen besondern Fall von der Aufgabe I. 44.; es ist aber, wenn man die beiden Seiten des gegebenen Rechtecks **A** mit a und b, die gegebene Seite des gesuchten Rechtecks **B** = c, und die gesuchte Seite desselben = x setzt:

$$A = a \times b \text{ und } B = c \times x.$$

Soll also **A** = **B** werden, so muß seyn

$$cx = ab.$$

Sind also drei Linien a, b und c, gegeben; und soll eine vierte = x von der Art gefunden werden, daß cx = ab werde, so läßt sich die gesuchte Linie durch die so eben angegebene Construction finden.

Fortsetzung der Aufgaben.

§. 13.

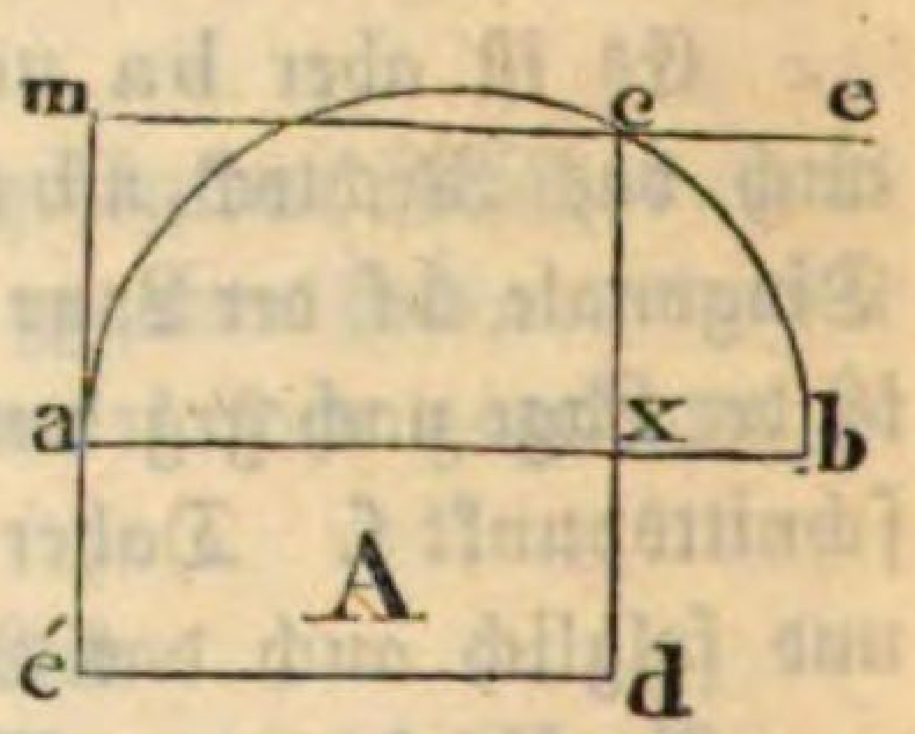
Aufgaben, die von den Sätzen 11. und 14. des zweiten Buches abhängen.

Aufgabe 162. Von einem Rechteck kennt man den Umfang; man soll dasselbe so construiren, daß es einem gegebenen Quadrate gleich wird.

Analysis. Ist A das gesuchte Rechteck, und man verlängert ax, macht xb = xd, beschreibt über ab einen Halbkreis, und verlängert dx, bis sie denselben in c schneidet: so ist

$$A = (xc)^2 \quad (14.)$$

und $(ab) = ax + xb = ax + xd = ed + ea$
ist der halbe Umfang des Rechtecks.



Nun ist der Umfang des Rechtecks gegeben, also auch die Hälfte desselben; folglich ab, und daher der Halbkreis acb.

Da A einem gegebenen Quadrate gleich seyn soll, und $A = (xc)^2$: so ist xc gegeben, also die me der Lage nach, welche durch c der ab parallel ist; und folglich ist der Punkt c, und daher auch x gegeben.

Auflösung. Nimm ab als die Hälfte des gegebenen Umfanges, und beschreibe über dieselbe einen Halbkreis. In a errichte auf ab die Normale am; mache dieselbe so groß, als die Seite des gegebenen Quadrates ist; ziehe durch m die me parallel ab, und fälle von dem Punkte c, in welchem dieselbe die Kreislinie schneidet, die Normale cx auf ab: so sind ax und xb „die Seiten des gesuchten Rechtecks".

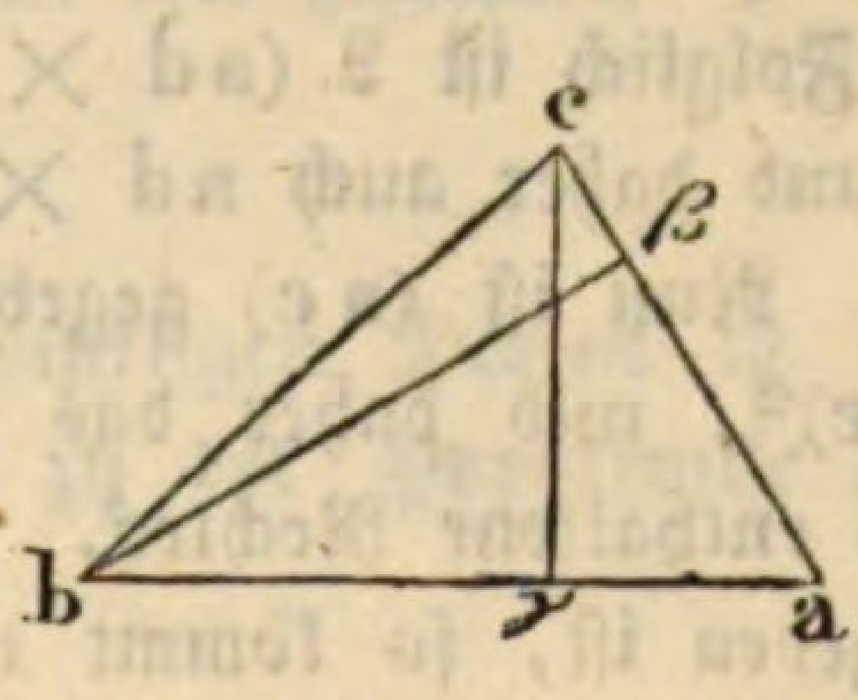
Determination. Die Seite am des gegebenen Quadrates darf nicht größer seyn, als der Radius des Kreises; und da ab der halbe Umfang des Rechtecks ist, so ist der Radius $\frac{1}{4}$ desselben; die Seite des gegebenen Quadrates darf also nicht größer seyn, als $\frac{1}{4}$ von dem Umfange des Rechtecks.

Folgerung. Von allen Rechtecken, die denselben Umfang haben, hat das Quadrat den größten Inhalt.

Aufgabe 163. Es soll „ein Rechteck von gegebenem Umfang" verzeichnet werden, das einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

Aufgabe 164. Von einem Dreieck ist die Grundlinie gegeben, und die Abschnitte, in welche dieselbe durch die dazu gehörige Normale getheilt wird. Außerdem kennt man, von einer der beiden übrigen Seiten, den durch die Normale derselben bestimmten Abschnitt dieser Linie, der an der bekannten Grundlinie nicht anliegt; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben von Δ **abc**, in welchem **c**γ und **b**β normal auf **ab** und **ac** sind, die Abschnitte **a**γ und **b**γ der Grundlinie **ab**; und also diese Linie selbst, und der Abschnitt **c**β der Seite **ac**.



Gesucht wird **ca** und $\llcorner$ **a**, wodurch Δ **abc** bestimmt ist. (Aufg. 1.).

Analysis. Da **ab**, **a**γ und **b**γ, gegeben sind: so kennt man die Lage des Punktes γ, und weiß also, „ob **a** ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist".

Es sey **b**γ < **ba**, also $\llcorner$ **a** < **R**: so ist

$$(cb)^2 + 2\,(a\gamma \times ab) = (ac)^2 + (ab)^2 \quad (13.)$$

und eben so ist auch

$$(cb)^2 + 2\,(a\beta \times ac) = (ac)^2 + (ab)^2 \quad ,,$$

Folglich ist $2\,(a\gamma \times ab) = 2\,(a\beta \times ac)$

und daher auch $a\gamma \times ab = a\beta \times ac$.

Nun ist **a**γ und **ab** gegeben, also auch das unter diesen Linien enthaltene Rechteck; und folglich auch die Seite des Quadrates, das diesem Rechteck gleich ist (14.). Hiernach muß **ac** $\times$ **a**β einem bekannten Quadrate gleich werden; also kömmt es bloß darauf an, „die gegebene **c**β bis **a** so zu verlängern, daß das unter der verlängerten Linie **ca**, und der Verlängerung β**a** derselben enthaltene Rechteck" einem gegebenen Quadrat gleich werde; und Dieses ist die erste Aufgabe der gegenwärtigen Beilage.

Liegt γ in der Verlängerung von **ba**, so läßt sich die Auflösung auf gleiche Weise finden.

Zusatz. Sind **c**γ und **b**β Normalen auf **ab** und **ac**, so ist immer **ac** $\times$ **a**β = **ab** $\times$ **a**γ.

Aufgabe 165. In einem rechtwinkligen Dreieck ist, von dem Scheitel des rechten Winkels, eine Normale auf die Hypotenuse gefället; und es ist der eine Abschnitt derselben gegeben, und die an diesem Abschnitte nicht anliegende Kathete; man soll die Hypotenuse finden.

Gegeben, in dem bei c rechtwinkligen Dreiecke abc, der Abschnitt bd der Grundlinie, und die Kathete ac.

Gesucht die Hypotenuse ab.

Analysis. Es ist

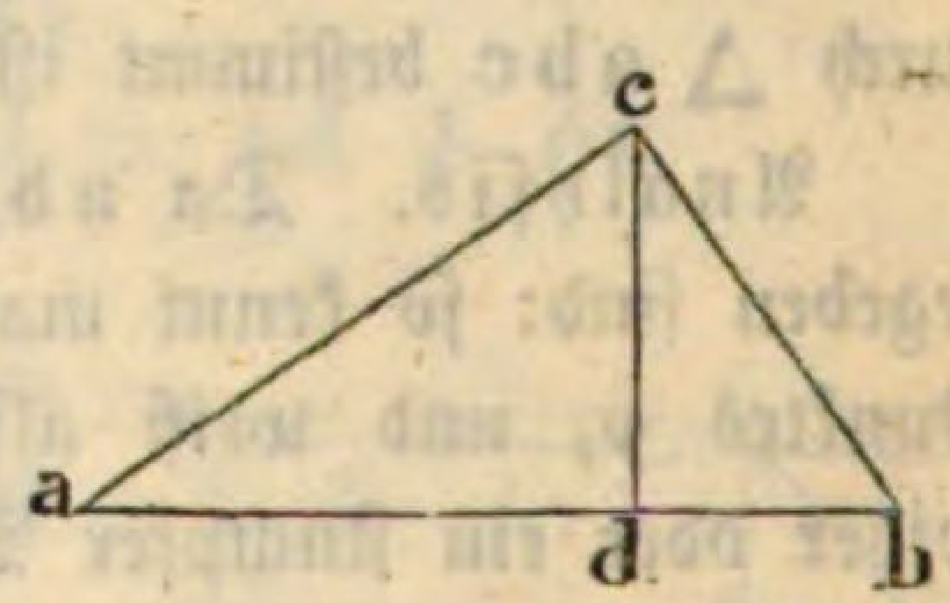
$(bc)^2 + 2\,(ad \times ab) = (ab)^2 + (ac)^2 \ldots$ (13.)

und da $(ab)^2 = (ac)^2 + (bc)^2$ (I. 47.)

$(bc)^2 + 2\,(ad \times ab) = (ac)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$

Folglich ist $2\,(ad \times ab) = 2\,(ac)^2$

und daher auch $ad \times ab = (ac)^2$.



Nun ist (ac) gegeben; also auch $(ac)^2$, und daher das unter ad und ab enthaltene Rechteck. Da nun bd gegeben ist, so kömmt es bloß darauf an, „diese Linie bis a zu verlängern", daß das, unter der verlängerten Linie ba und der Verlängerung da derselben enthaltene, Rechteck $ba \times da$ einem gegebenen Quadrate $(ca)^2$ gleich werde; und die erforderliche Verlängerung wird durch die Anleitung der Aufgabe 1. der gegenwärtigen Beilage gefunden.

Aufgabe 166. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gegeben, und die Normale, welche von dem Scheitel des rechten Winkels auf dieselbe gefället werden kann; man soll die beiden übrigen Seiten dieses Dreiecks finden.

Gegeben, in dem rechtwinkligen Dreieck abc, die Hypotenuse ab und die Normale cd.

Gesucht die Seiten ca und cb.

Analysis. Es ist $(ac)^2 = ad \times ab$ (Aufg. 165.)

und auch $(ac)^2 = (ad)^2 + (cd)^2$ (I. 47.)

Folglich ist $(ad)^2 + (cd)^2 = ad \times ab$

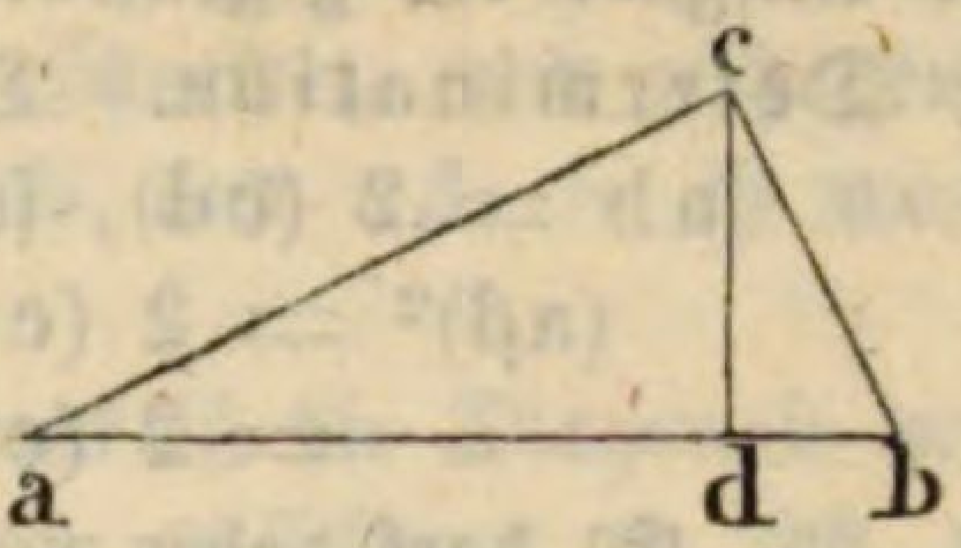
also $(cd)^2 = ad \times ab - (ad)^2$

und $(cd)^2 = ad \times [ab - ad]$

Nämlich es ist

$$(cd)^2 = ad \times db.$$

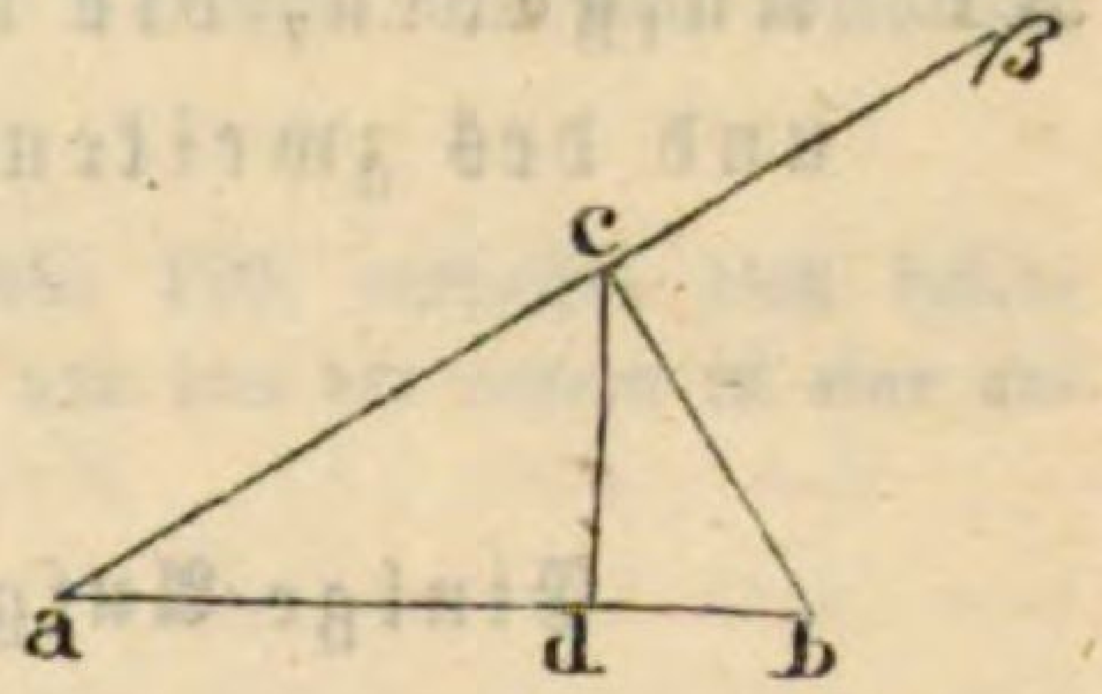
Nun ist cd gegeben, und auch $ab = ad + db$; also kömmt es bloß darauf an, „die gegebene ab in d so zu theilen, daß das Rechteck der beiden Theile dem Quadrate der gegebenen Linie cd gleich werde"; und Dieses ist die zweite Aufgabe der gegenwärtigen Beilage.



Determination. Es darf nicht seyn $cd > \frac{ab}{2}$.

Anmerkung. Diese Aufgabe kömmt bereits als Aufgabe 34. vor; doch ist hier die Auflösung wesentlich verschieden von der dort gegebenen.

Aufgabe 167. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe beider Katheten gegeben, und die zu der Hypotenuse gehörige Normale; es soll die Hypotenuse dieses Dreiecks gefunden werden.



Gegeben, von dem bei c rechtwinkligen Dreieck abc, die Summe der Seiten $ac + cb = a\beta$, und die Normale cd.

Gesucht die Hypotenuse ab.

Analysis. Es ist $ac \times cb = 2 \,.\, \Delta abc$ (I. 41.)

und auch $ab \times cd = 2 \,.\, \Delta abc$ „

daher $ac \times cb = ab \times cd$

folglich auch $2\,(ac \times cb) = 2\,(ab \times cd)$

Und es ist hiernach auch

$$2\,(ac \times cb) = ab \times 2\,(cd)$$

Da nun $(ac)^2 \quad + (cb)^2 = (ab)^2$

so ist $(ac)^2 + 2\,(ac \times cb) + (cb)^2 = (ab)^2 + ab \times 2\,(cd)$

also auch nach (4.) $(ac + cb)^2 = ab \times [ab + 2\,(cd)]$

Und weil $ac + cb = ac + c\beta = a\beta$, so ist

$$(a\beta)^2 = ab \times [ab + 2\,(cd)].$$

Nun ist $a\beta$ und cd, also auch 2 (cd) gegeben; folglich kann ab gefunden werden. Es kömmt darauf bloß an „ 2 (cd) um die gesuchte ab zu verlängern": so daß „das unter der verlängerten

$2\,(cd) + ab$ und ihrer Verlängerung ab enthaltene Rechteck" dem Quadrate der gegebenen Linie $(a\beta)$ gleich werde; welches die erste Aufgabe der gegenwärtigen Beilage ist.

Determination. Da wenigstens seyn muß

$$ab = 2\,(cd),\text{ so ist auch wenigstens}$$

$$(a\beta)^2 = 2\,(cd) \times [2\,(cd) + 2\,(cd)]$$

$$= 2\,(cd) \times 4\,(cd) = 8\,(cd)^2$$

Es darf daher nicht seyn $(a\beta)^2 < 8\,(cd)^2$ wenn eine Auflösung der Aufgabe möglich seyn soll.

Aufgabe 168. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Differenz beider Katheten gegeben, und die zu der Hypotenuse gehörige Normale; es soll die Hypotenuse dieses Dreiecks gefunden werden.

Anmerkung. Die Auflösung kann auf eine gleiche Weise, wie bei der vorigen Aufgabe, gefunden werden.

XI. Aufgaben, die mit Hülfe der Sätze des ersten und des zweiten Buches sich lösen lassen.

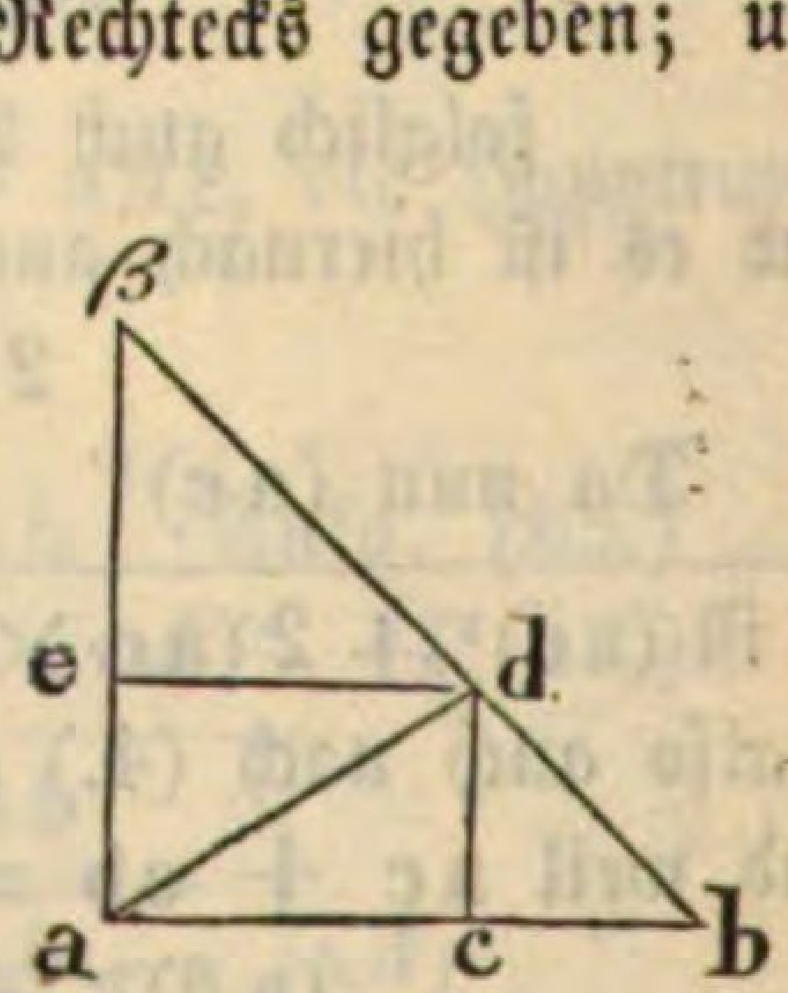
---

§. 14.

Einige Aufgaben von dem Rechteck.

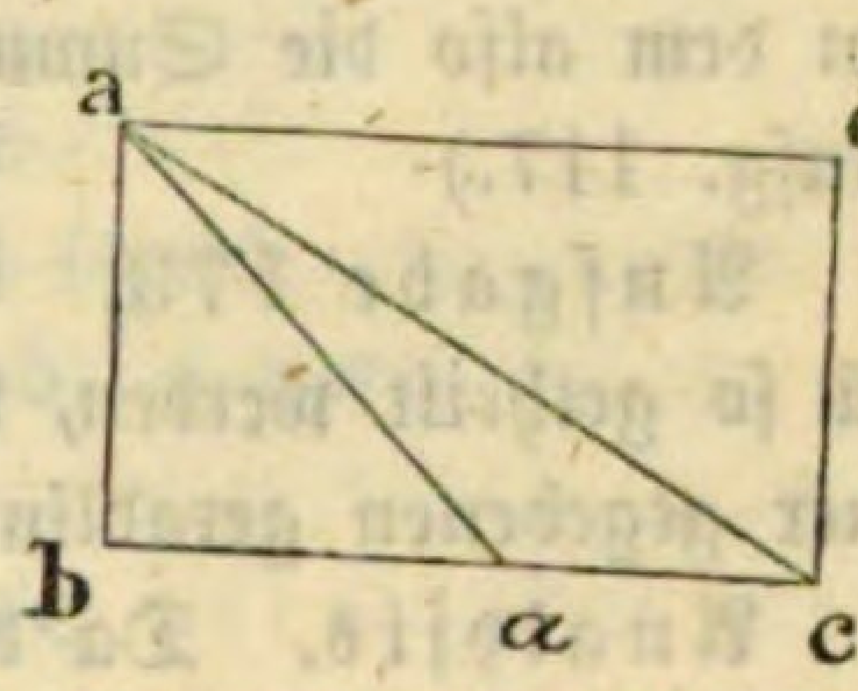
Aufgabe 169. Von einem Rechteck ist der Umfang und die Diagonale gegeben; es soll Dasselbe verzeichnet werden.

Analysis. Ist $acde$ das Rechteck, und man nimmt auf der Verlängerung von ac die $cb = cd$: so ist $ab = ac + cd$ der halbe Umfang des Rechtecks gegeben; und wird nun bd gezogen, so ist Δbcd gleichschenklig und rechtwinklig. Daher ist $\llcorner b = \frac{1}{2} R$, und $\llcorner bae = R$; also müssen ae und bd, verlängert, in β sich schneiden (G. 11.), und es ist $\Delta ab\beta$ ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig; also $a\beta = ab$, und daher $\Delta ba\beta$ gegeben. Aber auch die Diagonale ad des Rechtecks ist gegeben; folglich der Punkt d, in welchem „der mit ad aus a beschriebene Kreis" die $b\beta$ schneidet; und hierdurch ist das Rechteck $acde$ bestimmt.



Auflösung. Mache ab dem halben Umfange des Rechtecks gleich; errichte in a auf ab die Normale $a\beta = ab$, und ziehe $b\beta$. Aus a, als Mittelpunkt, beschreibe mit der gegebenen Diagonale des Rechtecks einen Kreis, der die $b\beta$ in d schneidet, und ziehe durch d die de und dc parallel den Linien ab und $a\beta$: so ist acde das gesuchte Rechteck.

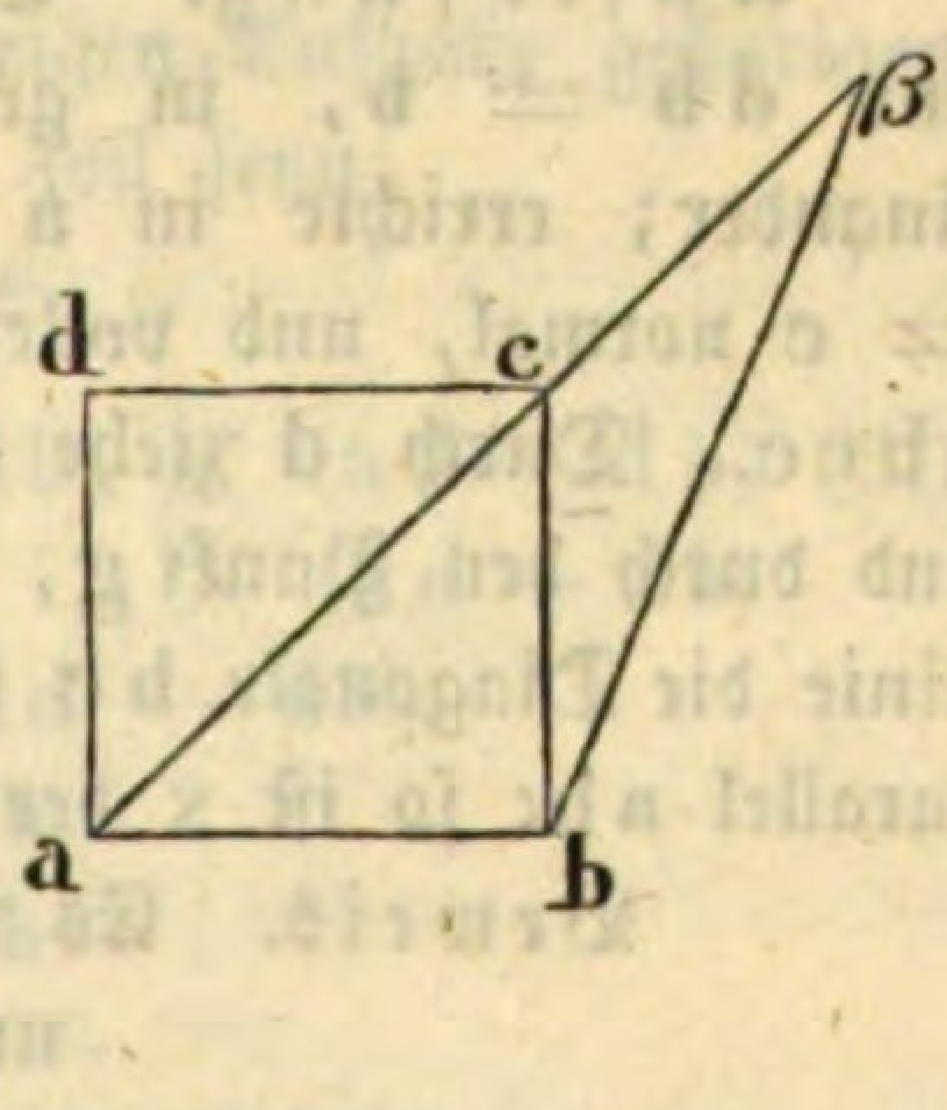
Aufgabe 170. Von einem Rechteck ist die Diagonale gegeben, und die Differenz der beiden Seiten desselben; es soll das Rechteck verzeichnet werden.



Analysis. Ist abcd das gesuchte Rechteck, und man nimmt $b\alpha = ba$, so ist αc die Differenz der Seiten also gegeben, und $\angle a\alpha b = \frac{1}{2}R$; daher ist auch $\angle a\alpha c$ gegeben. Aber auch die Diagonale ac ist gegeben, also das Dreieck $a\alpha c$ (Aufg. 4.); und hierdurch der Punkt b, in welchem die verlängerte $c\alpha$ von der Normale aus a getroffen wird; und es sind hierdurch die Seiten bc und ba des Rechtecks bestimmt.

Anmerkung. Die beiden Aufgaben 169. und 170. enthalten bloß besondere Fälle von den Aufgaben 94. und 95; und von der erstern ist eine andere Auflösung bei Aufgabe 122. gegeben.

Aufgabe 171. Von einem Quadrate ist die Summe der Seite und der Diagonale gegeben; es soll die Seite dieses Quadrats gefunden werden.



Analysis. Ist abcd das Quadrat, ac die Diagonale desselben; und man verlängert dieselbe, macht $c\beta = cb$: so ist $a\beta$ die Summe der Seite und der Diagonale gegeben, und auch $\angle \beta ab = \frac{1}{2}R$ ist gegeben. Da nun

$$\angle \beta = \angle cb\beta \quad \text{(I. 5.)}$$
$$\text{und } \angle acb = \angle \beta + \angle cb\beta \quad \text{(I. 32.)}$$
$$\text{so ist } \angle \beta = \tfrac{1}{2}\angle acb$$

Und da $\angle acb = \frac{1}{2}R$, so ist $\angle \beta$ ebenfalls gegeben.

Von $\triangle ab\beta$ sind also zwei Winkel gegeben und die von denselben eingeschlossene Seite; und es ist daher $\triangle ab\beta$ gegeben (Aufg. 2.), und folglich auch die Seite ab desselben, welches „die Seite des gesuchten Quadrates" ist.

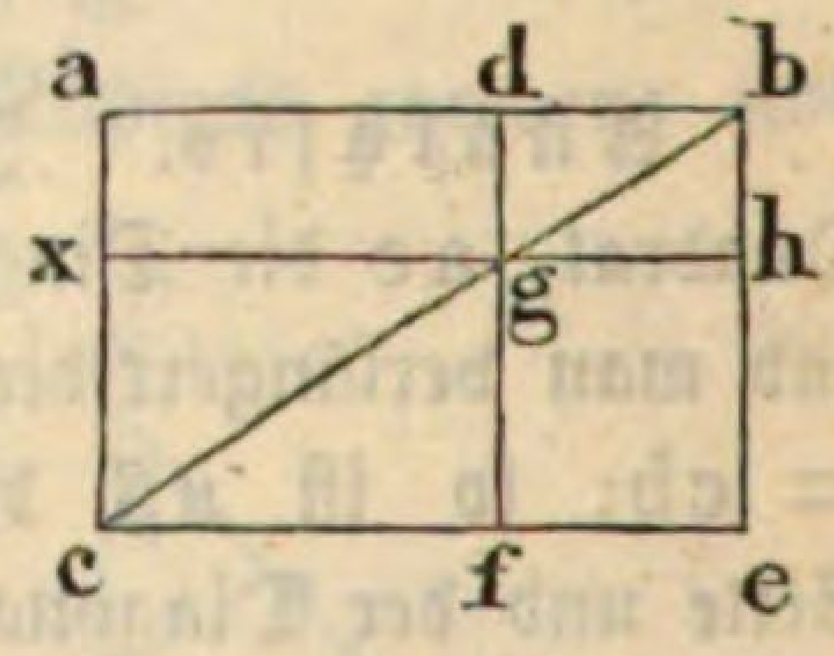
Aufgabe 172. Eine gegebene begrenzte gerade Linie soll so getheilt werden, daß das Quadrat des einen Abschnittes zweimal so groß, als das des andern wird.

Analysis. Der eine Abschnitt der gegebenen Linie ist die Diagonale, und der andere die Seite eines Quadrates (Aufg 114.); von dem also die Summe der Seite und der Diagonale gegeben ist (Aufg. 117.)

Aufgabe 173. Eine gegebene begrenzte gerade Linie soll so getheilt werden, daß die Summe der Quadrate beider Theile einer gegebenen geradlinigen Figur gleich wird.

Analysis. Da die Figur gegeben ist, der die Summe der Quadrate beider Theile gleich werden soll: so ist auch die Seite eines Quadrates gegeben, das dieser Figur gleich ist (14.), und also auch der Summe der Quadrate beider Theile der zu theilenden Linie; die Seite dieses Quadrates ist daher die Diagonale, und die zu theilende Linie der halbe Umfang eines Rechtecks; und die Aufgabe wird hierdurch auf Aufgabe 121. zurück geführt.

Aufgabe 174. Drei begrenzte gerade Linien a, b und c, sind gegeben; man soll die dritte dieser Linien, also c, so theilen: daß „das unter a und dem einen Theile enthaltene Rechteck" eben so groß sey, als das Rechteck, welches unter b und dem andern Theile enthalten ist.



Auflösung. Setze ad = a, und db = b, in gerader Linie an einander; errichte in a auf ab die ac = c normal, und vollende das Rechteck abec. Durch d ziehe df parallel be; und durch den Punkt g, in welchem diese Linie die Diagonale bc schneidet, die hx parallel ab: so ist x der gesuchte Theilpunkt der Linie ac = c.

Beweis. Es ist $ag = ax \times ad$

und $ge = gf + gh = xc \times db$

Da nun $ag = ge$ (I. 43.)

so ist auch $ax \times ad = xc \times db$

also $(ax) \times a = xc \times b$.

Aufgabe 175. Die größere Seite eines Rechtecks soll in zwei Abschnitte getheilt werden, so daß „die Summe der Quadrate beider Abschnitte" **dem Rechteck** gleich wird.

Auflösung. Diese Aufgabe enthält bloß einen besondern Fall von Aufgabe 173.

Determination. Ist d der gesuchte Theilpunkt, und wird die Seite ab in c halbirt: so ist

$$(ad)^2 + (db)^2 = 2\,(ac)^2 + 2\,(cd)^2 \quad (9.)$$

also $(ad)^2 + (db)^2 > 2\,(ac)^2$.

Da nun seyn soll

$$(ad)^2 + (db)^2 = ab \times be$$

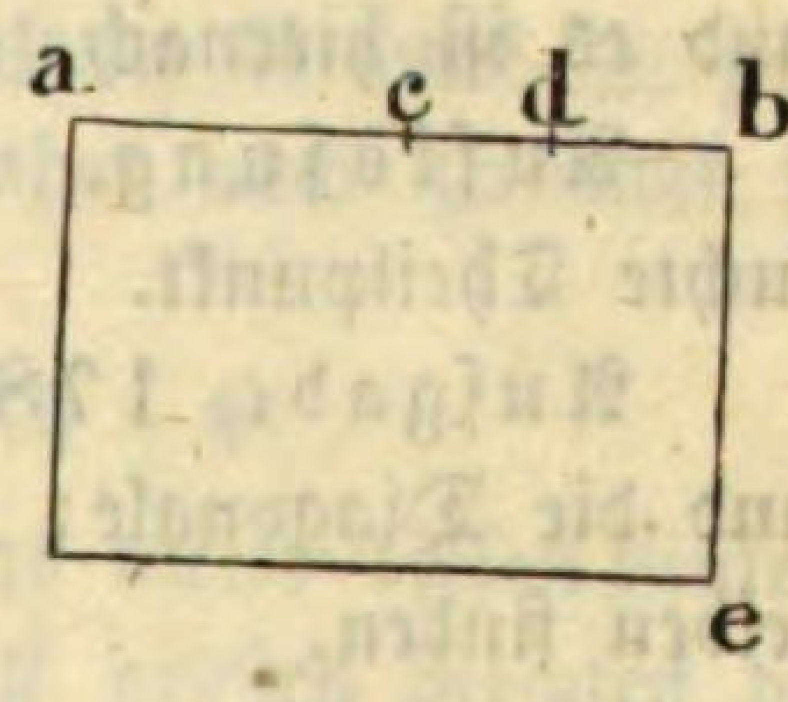
so darf $ab \times be$ nicht kleiner seyn, als $2\,(ac)^2$

Und weil $2\,(ac)^2 = 2\,(ac) \times ac = ab \times ac$

so darf nicht seyn

$$ab \times be < ab \times ac$$

und folglich auch nicht $be < ac$.



Soll also die größere Seite ab des Rechtecks sich in zwei Theile zerlegen lassen, daß die Summe der Quadrate beider Theile dem Rechteck gleich werde: so darf die kleinere Seite dieses Rechtecks nicht kleiner seyn, als die Hälfte der größeren Seite desselben.

Aufgabe 176. Die größere Seite eines Rechtecks soll so geschnitten werden, daß die Differenz der Quadrate beider Abschnitte dem Rechteck gleich werde.

Analysis. Ist, in der zu der vorigen Aufgabe gehörigen Figur d, der Theilpunkt der Seite ab: so soll seyn

$$(ad)^2 - (db)^2 = ab \times be.$$

Nun ist $(ad)^2 - (db)^2 = (ad + db) \times (ad - db)$ (5.)
$= ab \times (ad - db)$

also muß auch seyn $ab \times be = ab \times (ad - db)$

und daher $be = ad - db$

Da nun $ab = ad + db$

so ist $ab + be = 2\,(ad)$

und da ab und be gegeben sind, so ist auch ad gegeben.

Auflösung. Der größere Theil ad der Linie ab ist „der **halben Summe** beider Seiten des Rechtecks" gleich.

Aufgabe 177. Eine gegebene begrenzte gerade Linie soll so in zwei Abschnitte getheilt werden, daß „das Quadrat des einen Abschnittes, sammt dem unter diesem Abschnitte und der ganzen Linie enthaltene Rechteck" dem Quadrate des zweiten Abschnittes gleich werde.



Analysis. Ist ab die gegebene Linie, und d der gesuchte Theilpunkt: so soll seyn

$(ad)^2 + ad \times ab = (db)^2$.

Da nun $db = ab - ad$ und daher

$$(db)^2 = (ab)^2 - 2 (ab \times ad) + (ad)^2 \quad (7.)$$

so muß werden

$$(ad)^2 + ad \times ab = (ab)^2 - 2 (ab \times ad) + (ad)^2$$

und folglich $ad \times ab = (ab)^2 - 2 (ab \times ad)$.

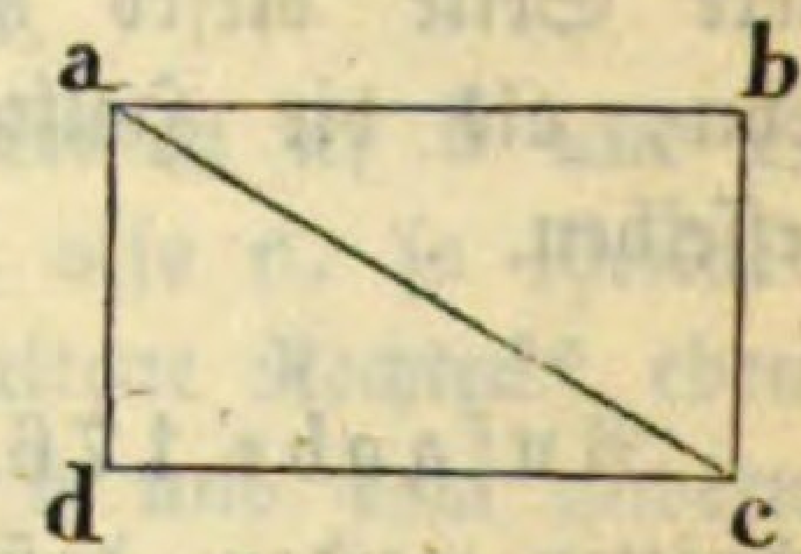
Daher auch $3 (ad \times ab = (ab)^2$,

also $3 (ad) \times ab = ab \times ab$

und es ist hiernach $3 (ad) = ab$

Auflösung. Man nehme $ad = \frac{1}{3} (ab)$, so ist d der gesuchte Theilpunkt.

Aufgabe 178. Von einem Rechteck ist die Fläche gegeben, und die Diagonale; man soll die Seite desselben finden.



Analysis. Sind ab und bc die Seiten des Rechtecks, so ist gegeben ac und $ab \times bc$;

daher ist $(ab)^2 + (bc)^2 = (ac)^2$ gegeben

und auch $2 (ab \times bc). = 2 (ab \times bc)$.

Sucht man also die Seite m eines Quadrats

$$= (ac)^2 + 2 (ab \times bc)$$

und die Seite n von einem Quadrate $= (ac)^2 - 2 (ab \times bc)$

so ist $(ab)^2 + 2.(ab \times bc) + (bc)^2 = m^2$ gegeben

und $(ab)^2 - 2 (ab \times bc) + (bc)^2 = n^2$ „

Nämlich es ist $(ab + bc)^2 = m^2 \quad (4.)$

und $(ab - bc)^2 = n^2 \quad (7.)$

Folglich ist $ab + bc = m$ gegeben

und auch $ab - bc = n$ „

---

und daher auch $2 (ab) = m + n$

und $2 (bc) = m - n$.

§. 15.

Construction der Dreiecke von gegebenem Flächeninhalt.

Jede gegebene geradlinige Figur läßt sich in ein Quadrat verwandeln; und es kann daher immer die Seite eines Quadrates angegeben werden, das einen bestimmten Flächeninhalt hat. Ist daher der Flächeninhalt einer Figur gegeben: so kann derselbe immer dadurch bestimmt werden, „daß man die Seite q eines Quadrates von gleicher Fläche als gegeben annimmt"; und es kann daher der Flächeninhalt eines Dreiecks immer durch q^2 bezeichnet werden.

Aufgabe 179. Die Höhe eines Dreiecks ist gegeben; es soll die Grundlinie desselben so bestimmt werden, daß es einen gegebenen Flächeninhalt fasse.

Gegeben die Höhe des Dreiecks; also die zu der einen Seite gehörige Normale $= \gamma$ und die Fläche $= q^2$.

Gesucht die Grundlinie C.

Analysis. Das unter γ und C enthaltene Rechteck $= \gamma C$ ist zweimal so groß, als das Dreieck; und daher auch zweimal so groß, als q^2. Es ist also

$$\gamma \, . \, C = 2\, q^2 \text{ oder } \gamma \, . \, C = 2 q \, . \, q.$$

Nun ist q und 2 q gegeben, also auch das unter diesen Linien enthaltene Rechteck; und da von einem gleich großen Rechteck die eine Seite γ gegeben ist, so kann die andere Seite C desselben gefunden werden, nach Anleitung der Aufgabe 3. Beilage. X.

Anmerkung. Ist von dem Dreieck die Grundlinie C und die Fläche $= q^2$ gegeben, so kann auf gleiche Weise auch die Höhe γ gefunden werden.

Aufgabe 180. Zwei Seiten eines Dreiecks sind gegeben; es soll dasselbe so construirt werden, daß es einen bestimmten Flächeninhalt fasse.

Gegeben A, C und q^2.

Analysis. Da C und q^2 gegeben sind, so kann γ gefunden werden (Aufg. 179.); und es läßt sich nun aus A, C und γ, das Dreieck construiren (Aufg. 22.)

Determination. Es kann nicht seyn $\gamma > A$; und also auch nicht $\gamma \times C > A \times C$. Da nun ist $\gamma \times C = 2\, q^2$, so darf nicht seyn $2\, q^2 > A \times C$, wenn eine Auflösung möglich seyn soll.

Aufgabe 181. Von einem Dreieck ist eine Seite gegeben, ein an derselben anliegender Winkel, und die Fläche; es soll dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben C, $\llcorner$ b und q^2.

Analysis. Da C und q^2 gegeben sind, so kann γ gefunden werden (Aufg. 179.); und durch C, $\llcorner$ b und γ ist das Dreieck bestimmt. (Aufg. 25.)

Aufgabe 182. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, die zu einer andern Seite gehörige Normale, und die Fläche; es soll Dasselbe construirt werden.

Gegeben A, γ und q^2.

Analysis. Da γ und q^2 gegeben sind, so ist auch C gegeben (Aufg. 179.)

Aufgabe 183. Man kennt von einem Dreieck Einen Winkel, eine zu einem andern Winkel gehörige Normale, und die Fläche; es soll Dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben $\llcorner$ a, γ und q^2.

Aufgabe 184. Von einem Dreieck sind zwei Normalen gegeben, und die Fläche; es soll Dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben α, γ und q^2.

Analysis. Da γ und q^2 gegeben sind, so ist auch C gegeben, und daher α, γ und C; wodurch das Dreieck bestimmt ist. (Aufg. 28.)

Aufgabe 185. Von einem Dreieck ist gegeben die Summe zweier Seiten, und die zu der einen dieser Seiten gehörige Normale; es soll Dasselbe so construirt werden, daß es einen gegebenen Flächeninhalt fasse.

Gegeben B + C, γ und q^2.

Analysis. Da γ und q^2 gegeben sind, so ist auch C gegeben; und folglich, da man B + C kennt, auch B.

Aufgabe 186. Man kennt, von einem Dreieck, die Differenz zweier Seiten, die zu der einen dieser Seiten gehörige Normale, und die Fläche; es soll Dasselbe verzeichnet werden.

Gegeben C — B oder B — C, γ und q^2.

Aufgabe 187. Von einem Dreieck kennt man die Grundlinie, die Differenz der Quadrate der beiden übrigen Seiten, und die Fläche; es soll das Dreieck construirt werden.

Gegeben C, $A^2 - B^2$ und q^2.

Analysis. Zieht man die Normale $cd = \gamma$, und setzt $bd = m$ und $ad = n$: so ist

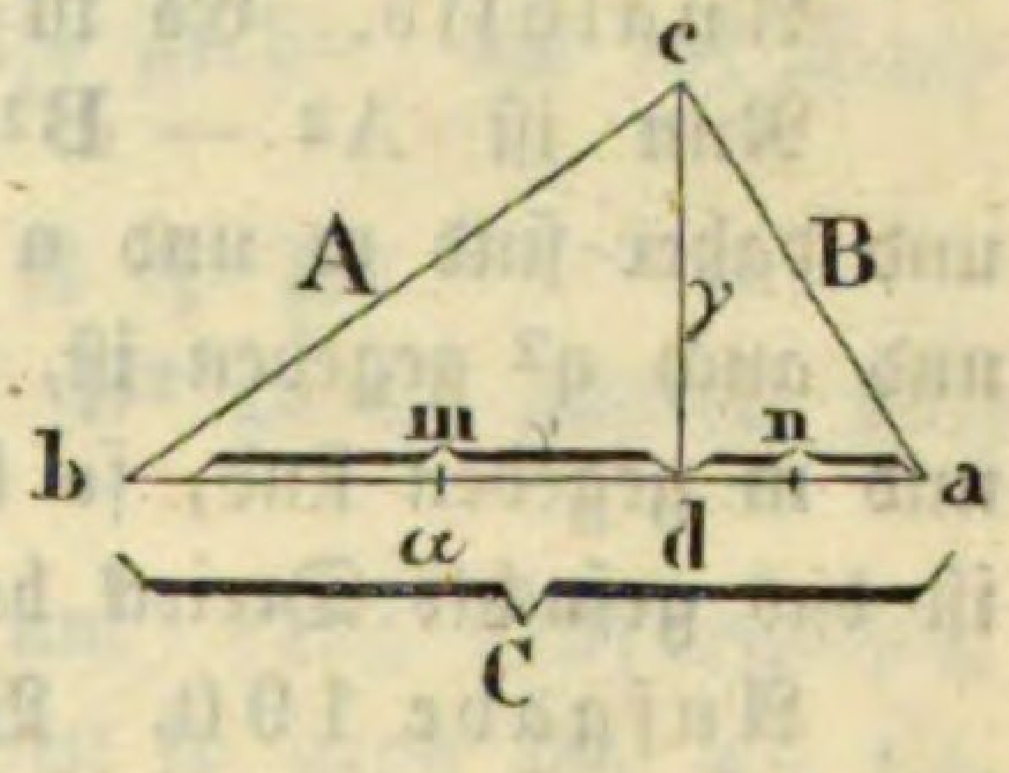
$$A^2 = m^2 + \gamma^2 \quad (I. 47.)$$
$$\text{und } B^2 = n^2 + \gamma^2$$

daher $A^2 - B^2 = m^2 - n^2$.

Da nun $A^2 - B^2$ gegeben ist, so ist $m^2 - n^2$ ebenfalls gegeben. Nun ist

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) \quad (5.)$$

und $m + n = (ab) = C$ gegeben, also kann $m - n$ gefunden werden; und es ist, wenn man $d\alpha = da$ nimmt, $b\alpha = m - n$ und αa in d halbirt; folglich ist der Punkt d gegeben, und da C und q^2 gegeben sind, so ist auch γ gegeben; und daher der Punkt c, wodurch das Dreieck bestimmt ist.



Auflösung. Man construire ein Rechteck, dessen eine Seite $= C$ ist, und das den gegebenen Flächeninhalt $= A^2 - B^2$ hat; und nehme $b\alpha$ so groß, wie die zweite Seite dieses Rechtecks gefunden wird; halbire αa in d, suche γ (Aufg. 179.) und errichte in d eine Normale $dc = \gamma$. Wird nun c mit a und mit b verbunden, so ist Δabc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 188. Von einem Dreieck ist gegeben die Grundlinie, die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten, und die Fläche; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C, $A^2 + B^2$ und q^2.

Da in der obigen Figur C und q^2 gegeben sind, so ist auch γ gegeben. Nun ist

$$A^2 = \gamma^2 + m^2$$
$$\text{und } B^2 = \gamma^2 + n^2$$

also $A^2 + B^2 = 2\gamma^2 + m^2 + n^2$.

Es ist aber $A^2 + B^2$ gegeben, folglich auch $2\gamma^2 + m^2 + n^2$; und da γ^2 und folglich auch $2\gamma^2$ gegeben ist, so kennt man $m^2 + n^2$ ebenfalls.

Es ist $C = m + n$ gegeben, und daher auch

$$C^2 = m^2 + 2mn + n^2 \quad (4.).$$

Da nun auch $m^2 + n^2$ gegeben ist, so ist auch $2mn$ und folglich mn gegeben.

Daher ist die Grundlinie C in d nur so zu theilen, daß das Rechteck beider Theile $ad \times db$ der gegebenen Fläche mn gleich werde; was nach Anleitung Aufgabe 2. der vorigen Beilage geschehen kann. Hierdurch wird der Punkt d gefunden; und da γ bekannt ist, so läßt sich das Dreieck construiren.

Aufgabe 189. Von einem Dreieck kennt man von der Grundlinie den einen, durch die dazu gehörige Normale bestimmten, Abschnitt derselben, die Differenz der Quadrate der beiden übrigen Seiten, und die Fläche; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben m, $A^2 - B^2$ und q^2.

Analysis. Es ist $A^2 - B^2 = m^2 - n^2$ (Aufg. 187.)

Nun ist $A^2 - B^2$ und auch m^2 gegeben, folglich auch n^2; und daher sind m und n bekannt; da also auch die Grundlinie C und auch q^2 gegeben ist, so ist γ ebenfalls gegeben. Da sonach C und m gegeben sind, so kennt man auch den Punkt d; und folglich ist das gesuchte Dreieck bestimmt.

Aufgabe 190. Von einem Dreieck ist gegeben die Differenz der Quadrate der beiden Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die dazu gehörige Normale getheilt wird, die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten des Dreiecks, und die Fläche Desselben; es sollen die Seiten dieses Dreiecks gefunden werden.

Gegeben $m^2 - n^2$, $A^2 + B^2$ und q^2.

Analysis. Es ist $A^2 - B^2 = m^2 - n^2$ (Aufg. 187.)

$$\text{und } A^2 + B^2 = A^2 + B^2$$

$$\text{daher } 2\,A^2 = (m^2 - n^2) + (A^2 + B^2)$$

$$\text{und } 2\,B^2 = (A^2 + B^2) - (m^2 - n^2).$$

Da nun sowohl $A^2 + B^2$, als auch $m^2 - n^2$ gegeben ist: so ist auch $2A^2$ und eben so $2B^2$ gegeben, und daher auch A und B.

XII. Das Verhalten der Seiten eines Dreiecks zu einander, als Folge der Lehrsätze 12 und 13. Buch II.

1) Je zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen größer, als die dritte (I. 20.); und nur, „wenn von drei gegebenen geraden Linien je zwei zusammen größer als die dritte sind", läßt sich aus denselben ein Dreieck beschreiben.

2) Hieraus folgt aber keineswegs, „daß auch die Summe der Quadrate zweier Seiten eines Dreiecks zusammen größer, als das Quadrat der dritten Seite seyn müsse". Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks mit A, B und C: so ist immer, wenn auch C die größte der drei Seiten ist

$$A + B > C$$

und daher auch $(A + B)^2 > C^2$.

Da nun $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$ (4.)

so folgt $A^2 + 2\,AB + B^2 > C^2$.

Die Summe der Quadrate zweier Seiten, sammt dem zweifachen unter denselben enthaltenen Rechteck, ist also größer, als das Quadrat der dritten Seite; da aber

$$A^2 + B^2 < A^2 + 2\,AB + B^2$$

so kann für das Verhalten von $A^2 + B^2$ zu C^2 aus (I. 20.) Nichts gefolgert werden.

3) Es wird durch die Sätze (I. 47. und) (12), (13) bewiesen, „daß bei einem Dreieck $A^2 + B^2$ bald eben so groß ist, als C^2, bald größer und bald kleiner; und es hängt Dieses von der Größe des Winkels c ab.

Ist der, der Seite C gegenüberliegende Winkel

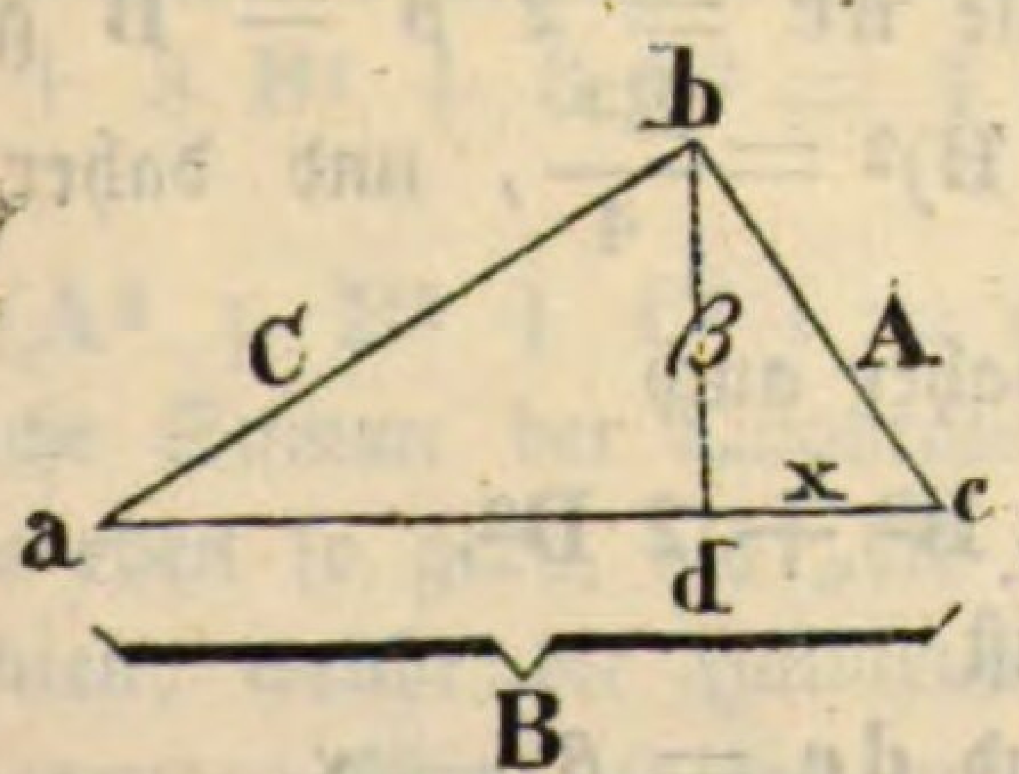
$c = R$, so ist $A^2 + B^2 = C^2$ (I. 47).

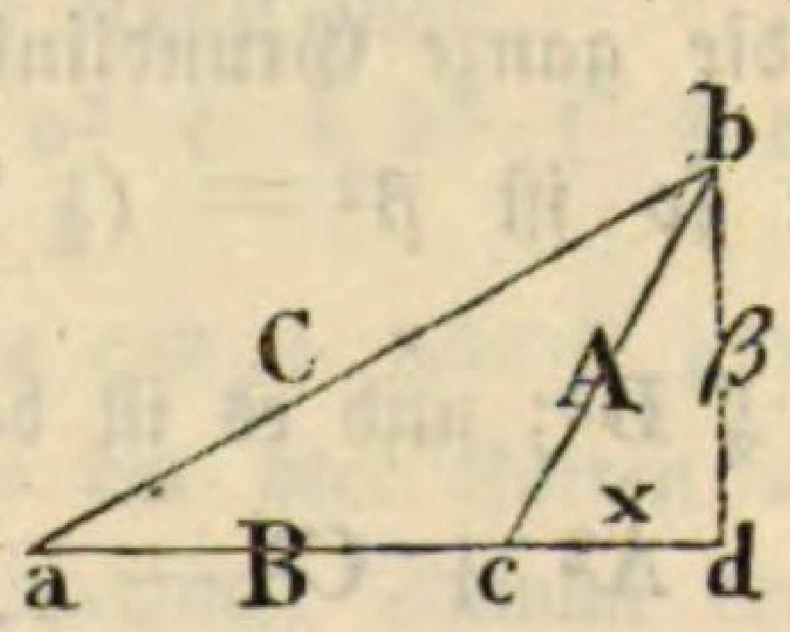
ist $c > R$ „ $A^2 + B^2 < C^2$ (12.)

und ist $c < R$ „ $A^2 + B^2 > C^2$ (13.)

Und daher läßt sich auch „aus der Vergleichung der Quadrate der Seiten eines Dreiecks mit einander" unmittelbar erkennen, „ob das Dreieck recht-, stumpf- oder spitzwinklig ist"; und es ist selbst in jedem besonderen Falle bestimmt, „um wie Viel die Summe der Quadrate zweier Seiten von dem Quadrate der dritten abweicht"; wie in (12) und (13) nachgewiesen wird.

4) Fället man von der Spitze b des Dreiecks abc die Normale bd auf B, setzt diese Normale $= \beta$, und das durch dieselbe von der Grundlinie abgeschnittene Stück $cd = x$: so ist





für $\llcorner c < R$ der Abschnitt $ad = B - x$
„ $\llcorner c > R$ „ „ „ $= B + x$.

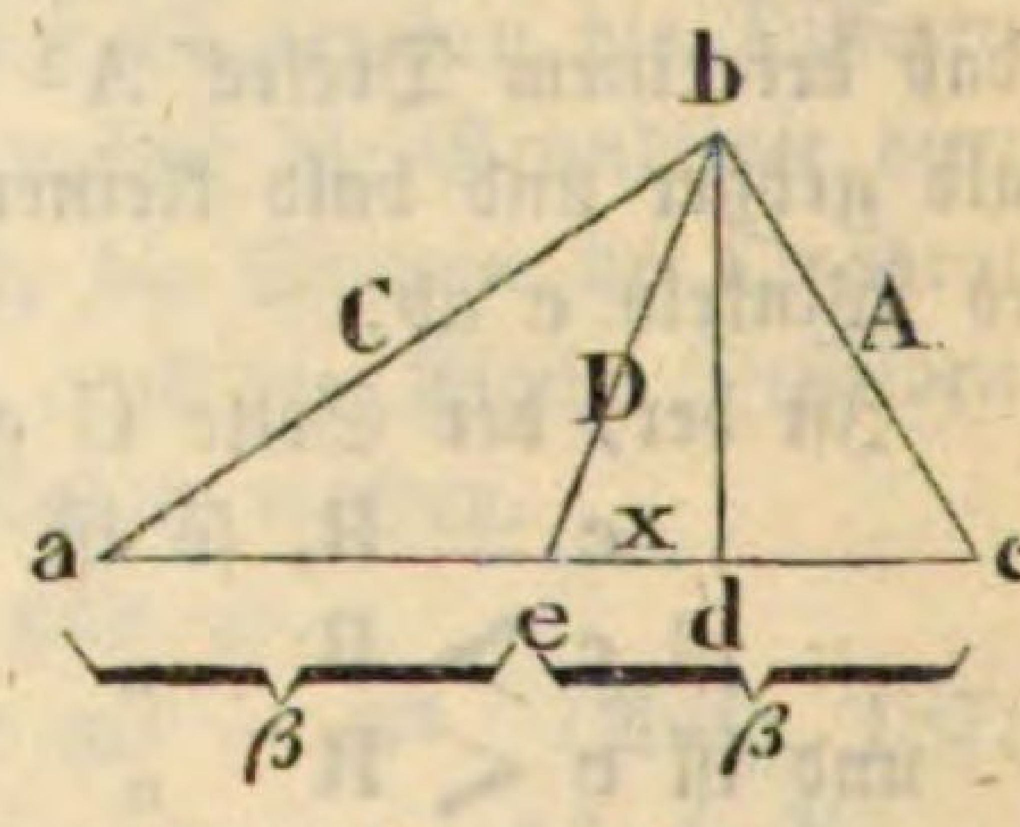
Es ist daher

für $\llcorner c < R$	für $\llcorner c > R$
$C^2 = (B - x)^2 + \beta^2$	$C^2 = (B + x)^2 + \beta^2$
also $C^2 = B^2 - 2Bx + x^2 + \beta^2$;	$C^2 = B^2 + 2Bx + x^2 + \beta^2$
Und da $x^2 + \beta^2 = A^2$	$x^2 + \beta^2 = A^2$
so ist $C^2 = B^2 - 2Bx + A^2$	$C^2 = B^2 + 2Bx + A^2$

Hiernach ist
für $\llcorner c < R$, C^2 um $2Bx$ kleiner als $A^2 + B^2$; und
für $\llcorner c > R$, C^2 um $2Bx$ größer als $A^2 + B^2$.

In beiden Fällen ist der Unterschied zwischen C^2 und $A^2 + B^2$ dem zweifachen Rechteck gleich, das unter der Grundlinie B und dem an $\llcorner c$ anliegenden Abschnitte x enthalten ist.

5) Wird die Grundlinie ac eines Dreiecks abc in e halbirt; und man setzt die Halbirungslinie $be = D$, die halbe Grundlinie $ae = ec = \beta$, und das zwischen e und dem Fußpunkte d der Normale bd liegende Stück $ed = x$: so ist



in $\Delta aeb \quad C^2 = \beta^2 + D^2 + 2\beta x$ (12.)
in $\Delta ceb \quad A^2 = \beta^2 + D^2 - 2\beta x$ (13.)

Folglich ist $A^2 + C^2 = 2\beta^2 + 2D^2$.

Wird also in einem Dreieck die Grundlinie halbirt, so ist die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten zweimal so groß, als „das Quadrat der halben Grundlinie, und das Quadrat der Linie, welche die Spitze des Dreiecks mit dem Halbirungspunkte verbindet".

Wird die ganze Grundlinie $ac = 2\beta = B$ gesetzt, also $\beta = \frac{1}{2}B$: so ist $\beta^2 = (\frac{1}{2}B)^2 = \frac{B^2}{4}$, und daher $2\beta^2 = 2 \cdot \frac{B^2}{4} = \frac{1}{2}B^2$; und es ist daher auch

$$A^2 + C^2 = \tfrac{1}{2}B^2 + 2D^2.$$

6) In der obigen Figur ist

$$ad = \beta + x, \text{ und } de = \beta - x.$$

Setzt man nun die Normale bd = h, so ist

$$C^2 = (\beta + x)^2 + h^2$$

und $A^2 = (\beta - x)^2 + h^2$

und daher, wenn man Beides von einander abzieht,

$$C^2 - A^2 = (\beta + x)^2 - (\beta - x)^2.$$

Nun ist aber

$$(\beta + x)^2 - (\beta - x)^2 = 4\,\beta x \quad (8.)$$

folglich ist auch

$$C^2 - A^2 = 4\,\beta x.$$

Wird also in einem Dreieck die Grundlinie ac in e halbirt, und die Normale bd gezogen: so ist „die Differenz der Quadrate der beiden übrigen Seiten" dem vierfachen Rechtecke gleich, welches unter der halben Grundlinie und dem, zwischen dem Halbirungspunkte und dem Fußpunkte der Normale liegenden, Theile derselben enthalten ist.

7) Da $C^2 - A^2 = (C + A)\,(C - A)$ (4.)

und $C^2 - A^2 = 4\,\beta x$

so folgt auch

$$(C + A)\,(C - A) = 4\,\beta x.$$

8) Setzt man die drei Seiten eines Dreiecks **A**, **B**, **C**, und die drei Linien, welche die Halbirungspunkte derselben mit den gegenüber liegenden Spitzen verbinden, **a**, **b**, **c**, (so daß **a** zu **A** gehört, **b** zu **B** und **c** zu **C**): so ist nach Nr. 5.

$$\begin{aligned} B^2 + C^2 &= \tfrac{1}{2}\,A^2 + 2\,a^2 \\ A^2 \qquad + C^2 &= \tfrac{1}{2}\,B^2 + 2\,b^2 \\ A^2 + B^2 \qquad &= \tfrac{1}{2}\,C^2 + 2\,c^2 \end{aligned}$$

Folglich ist $2\,A^2 + 2\,B^2 + 2\,C^2 =$

$$\tfrac{1}{2}\,A^2 + \tfrac{1}{2}\,B^2 + \tfrac{1}{2}\,C^2 + 2\,a^2 + 2\,b^2 + 2\,c^2$$

und daher auch, wenn man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\,A^2 + \frac{1}{2}\,B^2 + \frac{1}{2}\,C^2$ abzieht

$$\tfrac{3}{2}\,A^2 + \tfrac{3}{2}\,B^2 + \tfrac{3}{2}\,C^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2 + 2\,c^2$$

Und wird nun mit 2 multiplicirt, so erhält man

$$3\,A^2 + 3\,B^2 + 3\,C^2 = 4\,a^2 + 4\,b^2 + 4\,c^2$$

Es ist also

$$3\,(A^2 + B^2 + C^2) = 4\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

„Die dreifache Summe der Quadrate der drei Seiten eines Dreiecks" ist also eben so groß, als „die vierfache Summe der Quadrate der drei Linien, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüber liegenden Winkelspitzen verbinden".

9) Aus dem Resultate in Nr. 4. läßt sich für jeden Fall besonders „die Größe des Abschnittes x, durch Zahlen ausgedrückt" finden, wenn die Seiten des Dreiecks in Zahlen gegeben sind.

Ist $\llcorner c < R$, so erhält man $x = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2 B}$

und für $\llcorner c > R$ wird $x = \frac{C^2 - (A^2 + B^2)}{2 B.}$

In beiden Fällen erhält man also den, durch die Normale β abgeschnittenen, an $\llcorner c$ anliegenden Theil der Grundlinie: wenn man entweder von der Summe der Quadrate der beiden, den Winkel c einschließenden Seiten A und B, das Quadrat der gegenüber liegenden Seite C abzieht, oder umgekehrt (je nachdem $A^2 + B^2$ größer oder kleiner als C^2 ist), und den Rest durch die zweifache Grundlinie theilt.

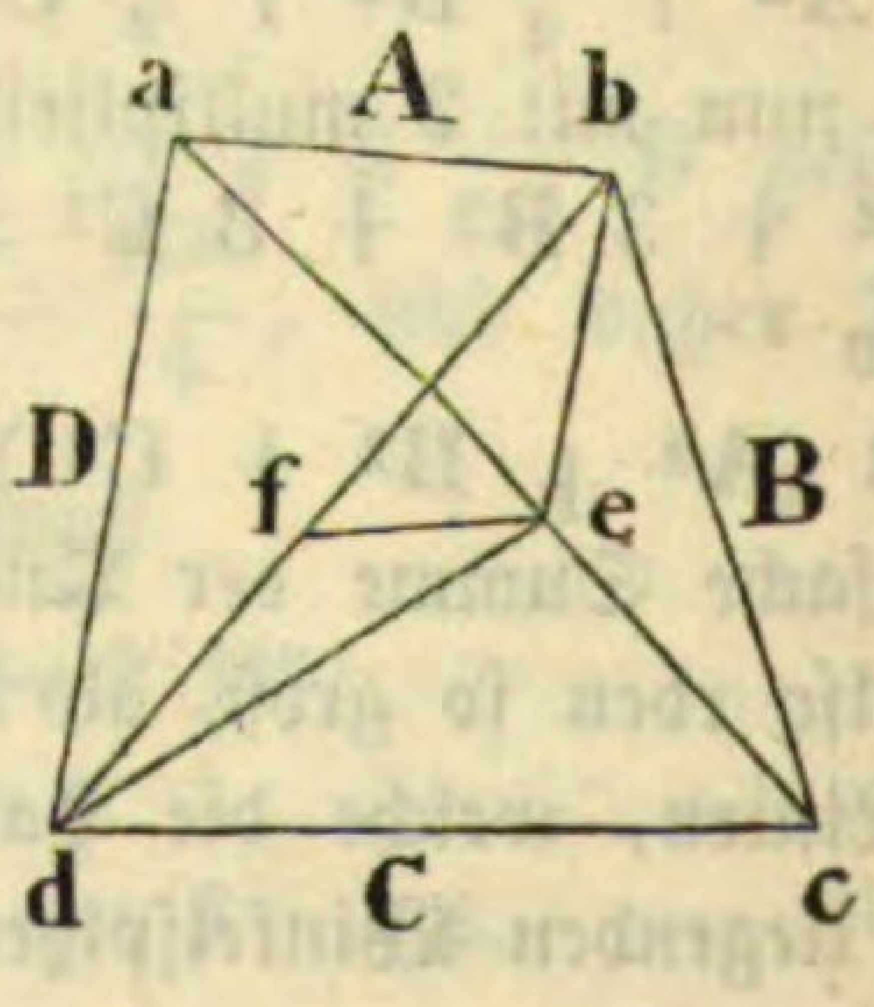
Findet man $A^2 + B^2 > C^2$, so fällt x mit der Grundlinie B zusammen, und es ist $\llcorner c < R$; ist aber $A^2 + B^2 < C^2$, so liegt x in der Verlängerung von B außerhalb des Dreiecks, und es ist $\llcorner c > R$; und wenn in einem besondern Falle gefunden wird $A^2 + B^2 = C^2$, so ist $x = o$ und $\llcorner c = R$.

Diese Regel kann mit Vortheil benutzt werden, wenn man auf dem Felde „die drei Seiten eines Dreiecks" gemessen hat, und man wünscht „die Höhe desselben" kennen zu lernen; denn sucht man den Werth von x, so lernt man hierdurch den Punkt der Grundlinie kennen, in welchem dieselbe von der Normale aus der Spitze getroffen wird; und man kann nun entweder diesen Punkt mit der Spitze des Dreiecks durch eine gerade Linie verbinden und dieselbe messen, oder man kann auch den Werth von β alsdann durch Rechnung ermitteln. Denn da

$x^2 + \beta^2 = A^2$, so folgt $\beta^2 = A^2 - x^2$

und es ist daher $\beta = \sqrt{(A^2 - x^2)}$.

10) Werden in einem Viereck abcd die 4 Seiten mit A, B, C, D bezeichnet, die Diagonale $ac = E$, und $bd = F$ gesetzt; und halbirt man die Diagonalen in e und f, so daß



$ae = ec = \frac{1}{2} E$

$bf = fd = \frac{1}{2} F$

so ist, wenn be und de gezogen werden, nach Nr. 5.

in Δabc $A^2 + B^2 = 2\,(ae)^2 + 2\,(be)_2$

in Δadc $C^2 + D^2 = 2\,(ae)^2 + 2\,(de)_2$.

Daher ist auch, wenn man addirt

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4\,(ae)^2 + 2\,(be)^2 + 2\,(de)_2$.

Da aber bd in f halbirt ist, so folgt wenn man ef zieht

in Δbed $(be)^2 + (de)^2 = 2\,(bf)^2 + 2\,(ef)^2$

und daher $2\,(be)^2 + 2\,(de)^2 = 4\,(bf)^2 + 4\,(ef)^2$

Und es ist also, wenn man diesen Werth in der erhaltenen Gleichung benutzt

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4\,(ae)^2 + 4\,(bf)^2 + 4\,(ef)^2$.

Nun ist $ae = \frac{1}{2}\,E$, also $(ae)^2 = \frac{1}{4}\,E^2$ und $4\,(ae)^2 = E^2$

und $bf = \frac{1}{2}\,F$, also $(bf)^2 = \frac{1}{4}\,F^2$ und $4\,(bf)^2 = F^2$

Folglich ist auch

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2 + F^2 + 4\,(ef)^2$

und für $ef = x$ ist endlich

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2 + F^2 + 4\,x^2$.

Da nun $ef = x$ die Linie ist, welche die Halbirungspunkte der beiden Diagonalen verbindet, so folgt: In jedem Viereck ist „die Summe der Quadrate der vier Seiten desselben" eben so groß, als „die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen, sammt dem vierfachen Quadrate der Linie, welche die Halbirungspunkte beider Diagonalen verbindet".

11) Da in jedem Parallelogramme die Diagonalen sich gegenseitig halbiren, so ist in dieser Figur die Verbindungslinie der Halbirungspunkte = o; man muß also für das Parallelogramm x = o setzen, folglich ist alsdann

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2 + F^2$.

In jedem Parallelogramme ist also „die Summe der Quadrate der vier Seiten" der Summe der Quadrate beider Diagonalen desselben gleich.

12) Die hier abgeleiteten Lehrsätze sind unmittelbare Folgerungen des 12ten und 13ten Satzes; wodurch „die Abhängigkeit des Quadrates einer Seite eines Dreiecks" von der Summe der Quadrate der beiden andern für die Fälle bestimmt werden, wenn „der der Ersteren dieser Seiten gegenüber liegende Winkel" größer oder kleiner als ein rechter ist. Für das rechtwinklige Dreieck hat man, wenn C dem rechten Winkel gegenüber liegt,

$$C^2 = A^2 + B^2$$

und Dieses führt zu der bereits früher berührten Aufgabe: drei ganze Zahlen von der Größe anzugeben, daß, wenn dieselben als Seiten eines Dreiecks angenommen werden, Dasselbe rechtwinklig seyn muß. Diese Aufgabe läßt sich auf die folgende einfachere Form zurückführen:

Aufgabe. Es ist eine ganze Zahl gegeben; man soll eine zweite ganze Zahl von der Größe angeben, „daß die Summe der Quadrate Beider ebenfalls ein Quadrat ist."

Auflösung. Setzt man die gegebene Zahl $= a$, die gesuchte $= x$ und die Summe der Quadrate Beider $= z^2$: so kömmt es darauf an, „in der Gleichung

$$a^2 + x^2 = z^2$$

x und z so zu bestimmen, daß Beide ganze Zahlen werden". Es folgt aber aus dieser Gleichung

$$a^2 = z^2 - x^2$$

und da $z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$ (5.)

so ist $a^2 = (z + x)(z - x)$.

Setzt man aber $z + x = m$

und $z - x = n$

so ist $2z = m + n$

$2x = m - n$

und $a^2 = mn$.

Wird also a^2 in 2 ungleiche Factoren m und n zerlegt, so ist

$$z = \frac{m + n}{2} \text{ und } x = \frac{m - n}{2}.$$

Die gesuchten Werthe von x und z werden also erhalten: wenn man a^2 in zwei ungleiche Factoren zerlegt, einmal die halbe Summe, und einmal die halbe Differenz dieser Factoren nimmt. Die halbe Summe giebt den Werth von z, also die Hypotenuse; und die halbe Differenz giebt x, also die zweite Kathete des rechtwinkligen Dreiecks.

Sollen aber $\frac{m+n}{2}$ und $\frac{m-n}{2}$ ganze Zahlen werden, so müssen m und n Beide gerade oder Beide ungerade Zahlen seyn. Ist daher a eine ungerade Zahl, so kann man a^2 beliebig in zwei Factoren zerlegen, und den einen selbst $= 1$ annehmen; ist a aber eine gerade Zahl, so muß der eine Factor 2 oder ein solches Vielfaches von 2 seyn, daß beide Factoren gerade Zahlen werden.

Fortsetzung der Aufgaben.

§. 16.

Aufgaben, bei welchen die fehlenden Stücke durch Rechnung gefunden werden sollen.

Aufgabe 191. Die drei Seiten eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; es soll hieraus unmittelbar bestimmt werden, „ob Dasselbe recht-, spitz- oder stumpfwinklig ist".

Analysis. Ist C die größte Seite des Dreiecks, und daher c der größte Winkel desselben: so ist

$\llcorner c = R$, wenn $C^2 = A^2 + B^2$ (I. 47.)
$\llcorner c > R$ „ $C^2 > A^2 + B^2$ (12.)
$\llcorner c < R$ „ $C^2 < A^2 + B^2$ (13.)

Auflösung. Man nehme von jeder der drei gegebenen Zahlen das Quadrat, und vergleiche das Quadrat der größten derselben mit der Summe der Quadrate der beiden übrigen. Ist das Quadrat der größten Zahl „der Summe der Quadrate der beiden übrigen" gleich, so ist das Dreieck rechtwinklig; und es ist spitz- oder stumpfwinklig, wenn „das Quadrat der größten Seite" kleiner oder größer ist, als die Summe der Quadrate der beiden übrigen.

Beispiele a. Die drei Seiten sind 38., 41. und 45.
b. „ „ „ 37., 43. „ 60.
c. „ „ „ 39., 36. „ 15.

Welches von diesen Dreiecken ist recht-, spitz- oder stumpfwinklig?

Aufgabe 192. Die Größe zweier Seiten eines Dreiecks ist durch Zahlen gegeben; es sollen die Grenzen für den Werth der dritten Seite angegeben werden, wenn das Dreieck ein spitzwinkliges seyn soll.

Analysis. Sind A und B die gegebenen Seiten, von welchen $A > B$ seyn soll, und ist C die zu bestimmende Seite: so muß, wenn C die größte seyn soll, für ein spitzwinkliges Dreieck werden $C^2 < A^2 + B^2$; und wenn A die größte Seite ist, so muß seyn

$$A^2 < B^2 + C^2, \text{ und daher } C^2 > A^2 - B^2.$$

Auflösung. Man nehme von A und B die Quadrate, addire dieselben einmal, und ziehe sie einmal von einander ab. Von

der Summe sowohl, als von der Differenz, nimm die Quadratwurzel: so geben diese beiden Wurzeln die Grenzen an, innerhalb welcher der Werth von C liegen muß, wenn das Dreieck spitzwinklig seyn soll.

Beispiel. Sind die gegebenen Seiten 40. und 33., so ist

$$A^2 = 40^2 = 1600 \qquad = 1600$$
$$B^2 = 33^2 = 1089 \qquad = 1089$$

$$A^2 + B^2 = 2689, \quad A^2 - B^2 = 511.$$

Da nun $\sqrt{2689} > 51$ und < 52

und $\sqrt{511} > 22$ „ < 23

so folgt: wenn das Dreieck spitzwinklig seyn soll, so muß seyn die dritte Seite $C < 52$ und > 22 in ganzen Zahlen.

Aufgabe 193. Die Größe zweier Seiten eines Dreiecks ist durch Zahlen gegeben; es sollen die Grenzen für die Werthe der dritten Seite angegeben werden — wenn Dasselbe stumpfwinklig seyn soll.

Analysis. Sind A und B die gegebenen Seiten, und $A > B$, und soll die gesuchte Seite C die größte werden: so muß für ein stumpfwinkliges Dreieck seyn $C^2 > A^2 + B^2$, und für die größte Seite $= A$ muß werden $A^2 > B^2 + C^2$, also $C^2 < A^2 - B^2$.

Auflösung. Man nehme von A und B die Quadrate, addire dieselben, und ziehe sie auch von einander ab. Aus der Summe sowohl, als aus der Differenz ziehe man die Quadratwurzel: so geben diese Wurzeln die Grenzen an, innerhalb welcher der Werth von C nicht liegen darf, wenn das Dreieck stumpfwinklig seyn soll.

Beispiel. Sind die gegebenen Seiten 40. und 28., so ist

$$A^2 = 40^2 = 1600 \qquad = 1600$$
$$B^2 = 28^2 = 784 \qquad = 784$$

$$A^2 + B^2 = 2384, \quad A^2 - B^2 = 816.$$

Da nun $\sqrt{2384} > 48$ und < 49

und $\sqrt{816} > 28$ „ < 29

so muß in ganzen Zahlen seyn,

entweder $C > 48$ oder $C < 29$

wenn das Dreieck stumpfwinklig seyn soll.

Aufgabe 194. Zwei Seiten eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; es soll die dritte Seite desselben so bestimmt werden, daß das Dreieck rechtwinklig wird.

Auflösung. Sind A und B die gegebenen Zahlen, von welchen $A > B$, und ist C die gesuchte dritte Seite: so muß seyn

entweder $C^2 = A^2 + B^2$, also $C = \sqrt{(A^2 + B^2)}$

oder $A^2 = B^2 + C^2$ „ $C = \sqrt{(A^2 - B^2)}$.

Aufgabe 195. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist durch eine ganze Zahl gegeben; man soll zwei andre ganze Zahlen von der Art finden, daß durch dieselben die Werthe der zweiten Kathete und der Hypotenuse ausgedrückt werden.

Analysis. Ist die gegebene Kathete = A, die gesuchte = x und die Hypotenuse = z: so ist nach Nr. 13. der gegenwärtigen Beilage

$$\text{für } A^2 = mn,\ x = \frac{m - n}{2} \text{ und } z = \frac{m + n}{2}.$$

Auflösung. Man zerlege A^2 in zwei ungleiche Factoren, die beide ungerade oder beide gerade Zahlen sind: so ist die halbe Differenz dieser Factoren die gesuchte Kathete, und ihre halbe Summe die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks.

Beispiel a. Die gegebene Kathete ist = 15.

Da $15^2 = 225$ und

$$225 = 225 \,.\, 1.,\ \text{so ist } x = \frac{225 - 1}{2} \text{ und } z = \frac{225 + 1}{2}$$

$$= 75 \,.\, 3. \quad „ \quad = \frac{75 - 3}{2} \quad „ \quad = \frac{75 + 3}{2}$$

$$= 45 \,.\, 5. \quad „ \quad = \frac{45 - 5}{2} \quad „ \quad = \frac{45 + 5}{2}$$

$$= 25 \,.\, 9. \quad „ \quad = \frac{25 - 9}{2} \quad „ \quad = \frac{25 + 9}{2}.$$

Für den Werth der einen Kathete = 15 ist also entweder die andere Kathete = 112 und die Hypotenuse = 113

oder „ „ = 36 „ „ „ = 39

oder „ „ = 20 „ „ „ = 25

oder endlich „ „ = 8 „ „ „ = 17.

b. Die gegebene Kathete ist = 12.

Da $12^2 = 144$, und

$$144 = 2 \cdot 72.: \text{ so ist } x = \frac{72 - 2}{2} \text{ und } z = \frac{72 + 2}{2}$$

$$= 4 \cdot 36. \quad " \quad = \frac{36 - 4}{2} \quad " \quad = \frac{36 + 4}{2}$$

$$= 6 \cdot 24. \quad " \quad = \frac{24 - 6}{2} \quad " \quad = \frac{24 + 6}{2}$$

$$= 8 \cdot 18. \quad " \quad = \frac{18 - 8}{2} \quad " \quad = \frac{18 + 8}{2}.$$

Für den Werth der einen Kathete = 12 ist also
entweder die andere Kathete = 35 und die Hypotenuse = 37
oder " " = 16 " " " = 20
oder " " = 9 " " " = 15
oder endlich " " = 5 " " " = 13.

Aufgabe 196. Die drei Seiten eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; man soll hieraus die Abschnitte berechnen, in welche die Grundlinie durch die Normale von der gegenüber liegenden Spitze geschnitten wird.

Analysis. Ist B die Grundlinie und x der an A anliegende Abschnitt derselben, so ist nach Nr. 9. der gegenwärtigen Beilage

wenn $A^2 + B_2 > C^2$, $x = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,B}$

und der zweite Abschnitt ist $B - x$.

Wenn aber $A^2 + B^2 < C^2$, so ist $x = \frac{C_2 - (A^2 + B^2)}{2\,B}$

und der zweite Abschnitt der Grundlinie ist $= B + x$.

Beispiel a. Die Grundlinie $B = 40$, $A = 35$ und $C = 36$.

$$\text{Hier ist } A^2 = 35^2 = 1225$$
$$B^2 = 40^2 = 1600$$
$$\text{also } A^2 + B^2 = 2825$$
$$\text{und } C^2 = 36^2 = 1296$$

Daher ist von der Grundlinie B der eine Abschnitt

$$x = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,B} = \frac{2825 - 1296}{2 \cdot 40} = \frac{1529}{80} = 19\frac{9}{80}$$

und der andere Abschnitt ist $B - x = 40 - 19\frac{9}{80} = 20\frac{71}{80}$.

b. Es ist die Grundlinie $B = 30$, $A = 45$ und $C = 25$.

$$\begin{aligned} \text{Hier ist } A^2 &= 45^2 = 2025 \\ B^2 &= 30^2 = 900 \\ \hline A^2 + B^2 &= 2925 \\ \text{und } C^2 &= 25^2 = 625. \end{aligned}$$

Folglich ist von der Grundlinie **B** der eine Abschnitt

$$x = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,B} = \frac{2925 - 625}{2\,.\,30} = \frac{2300}{60} = 38\tfrac{1}{3}$$

und der andere Abschnitt ist $B - x = 30 - 38\frac{1}{3} = -8\frac{1}{3}$.

Da also in diesem Falle der eine Abschnitt größer als die ganze Grundlinie ist: so liegt der andere in der Verlängerung der Grundlinie, außerhalb des Dreiecks an der Seite **C** an.

c. Es ist die Grundlinie $B = 30$, $A = 28$ und $C = 45$.

$$\begin{aligned} \text{In dieser Aufgabe ist } A^2 &= 28^2 = 784 \\ B^2 &= 30^2 = 900 \\ \hline A^2 + B^2 &= 1684 \\ \text{und } C^2 &= 45^2 = 2025. \end{aligned}$$

Folglich ist hier von der Grundlinie **B** der eine Abschnitt

$$x = \frac{C^2 - (A^2 + B^2)}{2\,B} = \frac{2025 - 1684}{2\,.\,30} = \frac{341}{60} = 5\frac{41}{60}$$

und es liegt dieser Abschnitt, außerhalb des Dreiecks, an der Seite **A** an, und der zweite Abschnitt ist =

$$B + x = 30 + 5\frac{41}{60} = 35\frac{41}{60}.$$

d. Die Grundlinie **B** ist $= 30$, $A = 16$ und $C = 34$.

$$\begin{aligned} \text{Da sonach } A^2 &= 16^2 = 256 \\ B^2 &= 30^2 = 900 \\ \hline \text{also } A^2 + B^2 &= 1156 \\ \text{und } C^2 &= 34^2 = 1156 \end{aligned}$$

$$\text{so ist } x = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,B} = \frac{1156 - 1156}{60} = \frac{0}{60} = 0.$$

Der Scheitel des Winkels c ist also selbst der Fußpunkt der Normale, und das Dreieck ist daher bei c rechtwinklig.

Der zweite Abschnitt ist $= B - x = 30 - 0 = 30$, er ist also der Grundlinie gleich.

e. Die Grundlinie $B = 10$, $A = 26$ und $C = 24$.

$$\begin{aligned} \text{Hier ist } A^2 &= 26^2 = 676 \\ B^2 &= 10^2 = 100 \\ \hline A^2 + B^2 &= 776 \\ \text{und } C^2 &= 24^2 = 576 \end{aligned}$$

Daher ist der eine Abschnitt der Grundlinie B

$$x = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,B} = \frac{776 - 576}{2\,.\,10} = \frac{200}{20} = 10$$

und der zweite Abschnitt ist $B - x = 10 - 10 = 0$.

Dieses Dreieck ist daher bei $\llcorner$ a rechtwinklig.

Aufgabe 197. Die drei **Seiten** eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; es soll hieraus die zu der Grundlinie gehörige **Normale** berechnet werden.

Auflösung. Ist B die Grundlinie, und x der an A anliegende Abschnitt derselben: so wird, wenn man die Normale $= \beta$ setzt,

$$\beta^2 + x = A^2, \text{ also } \beta^2 = A^2 - x^2$$

und daher $\beta = \sqrt{(A^2 - x^2)}$.

Die Normale wird also gefunden: wenn man von dem Quadrate der einen Seite A das Quadrat des Abschnittes der Grundlinie abzieht, der an A liegt, und aus dem Reste die Quadratwurzel zieht. Läßt sich diese Wurzel vollständig ausziehen, so erhält man für die Normale β einen rationalen Werth; es wird β aber irrational, wenn der Rest kein vollständiges Quadrat ist, und man muß alsdann den Werth von β auf eine hinreichende Anzahl Decimalstellen genau berechnen.

Beispiele a. Die Grundlinie $B = 28$, $A = 17$, und $C = 25$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } A^2 &= 17^2 = 289 \\ B^2 &= 28^2 = 784 \\ \hline A^2 + B^2 &= 1073 \\ C^2 &= 25^2 = 625 \\ \hline A^2 + B^2 - C^2 &= 448 \end{aligned}$$

folglich ist $x = \frac{448}{2\,.\,28} = \frac{448}{56} = 8$, und $x^2 = 64$;

und daher die gesuchte Normale

$$\beta = \sqrt{(A^2 - x^2)} = \sqrt{(289 - 64)} = \sqrt{225} = 15.$$

b. Es ist die Grundlinie $B = 20$, $A = 18$ und $C = 22$.

$$\text{Hiernach ist } A^2 = 18^2 = 324$$
$$B^2 = 20^2 = 400$$
$$\overline{\quad 724}$$
$$C^2 = 22^2 = 484$$
$$\overline{A^2 + B^2 - C^2 = 240}$$

und daher $x = \frac{240}{2 \,.\, 20} = \frac{240}{40} = 6$, und $x^2 = 36$.

Folglich ist die gesuchte Normale

$$\beta = \sqrt{(A^2 - x^2)} = \sqrt{(324 - 36)} = \sqrt{288}.$$

Und da 288 kein Quadrat ist, so sucht man den Werth auf einige Decimalstellen genau, und man findet $\beta = 16{,}97$.

Aufgabe 198. Die drei Seiten eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben; man soll hieraus die Größe der drei Linien berechnen, welche die Halbirungspunkte dieser Seiten mit den gegenüber liegenden Winkelspitzen verbinden.

Analysis. Nach Nr. 5. der gegenwärtigen Beilage ist (wenn α die Linie bedeutet, die den Halbirungspunkt der Seite A mit der Spitze a verbindet)

$$2\,\alpha^2 + 2\left(\frac{A}{2}\right)^2 = B^2 + C^2$$

$$\text{also } 2\,\alpha^2 + \frac{A^2}{2} = B^2 + C^2$$

$$\text{und } 4\,\alpha^2 = 2\,B^2 + 2\,C^2 - A^2$$

$$\text{Folglich ist } 2\,\alpha = \sqrt{(2\,B^2 + 2\,C^2 - A^2)}$$

$$\text{und daher } \alpha = \frac{\sqrt{(2\,B^2 + 2\,C^2 - A^2)}}{2.}$$

Auflösung. Um die Größe der Linie kennen zu lernen, welche den Halbirungspunkt von A mit der Spitze a verbindet, muß man „von der zweifachen Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten B und C" das Quadrat von A abziehen, aus dem Reste die Quadratwurzel ziehen, und von derselben die Hälfte nehmen.

Beispiel. Die drei Seiten des Dreiecks sind 32., 40. und 45.; soll nun die Linie gefunden werden, welche den Halbirungspunkt der größten Seite (= 45) mit der gegenüber liegenden Spitze verbindet, so steht die Rechnung:

$$2 \cdot 32^2 = 2 \cdot 1024 = 2048$$
$$2 \cdot 40^2 = 2 \cdot 1600 = 3200$$

addirt $= 5248$

Hiervon $45^2 = 2025$

bleibt $= 3223$

Die gesuchte Verbindungslinie ist daher

$$\alpha = \frac{\sqrt{3223}}{2} = \frac{56{,}77}{2} = 28{,}385.$$

Aufgabe 199. Von einem Dreieck kennt man zwei Seiten, und die Linie, welche den Halbirungspunkt der dritten Seite mit der gegenüber liegenden Spitze des Dreiecks verbindet; es soll hieraus die dritte Seite berechnet werden.

Analysis. Sind A und B die gegebenen Seiten, C die gesuchte, und γ die zu derselben gehörige Verbindungslinie: so ist

$$2\,\gamma^2 + 2\left(\frac{C}{2}\right)^2 = A^2 + B^2$$

also $2\,\gamma^2 + \frac{C^2}{2} = A^2 + B^2$

daher $4\,\gamma^2 + C^2 = 2\,A^2 + 2\,B^2$

Folglich ist $C^2 = 2\,A^2 + 2\,B^2 - 4\,\gamma^2$

und also $C = \sqrt{(2\,A^2 + 2\,B^2 - 4\,\gamma^2)}$.

Aufgabe 200. Von einem Dreieck ist die Grundlinie gegeben, und die Abschnitte, in welche dieselbe durch die Normale getheilt wird, und man kennt außerdem die Summe der beiden übrigen Seiten; es sollen Diese hieraus berechnet werden.

Analysis. Sind A und C die gesuchten Seiten, β die halbe Grundlinie, und x das Stück derselben, welches zwischen dem Halbirungspunkte der Grundlinie und dem Fußpunkte der dazu gehörigen Normale liegt: so ist (nach Nr. 7. der gegenwärtigen Beilage)

$$(C + A)\,(C - A) = 4\,\beta x$$

und daher $C - A = \frac{4\,\beta x}{C + A}$.

Nun ist $C + A$ (als die Summe der gesuchten Seiten) gegeben; auch β ist gegeben, und x wird gefunden, wenn man die halbe Grundlinie von dem größern Abschnitte derselben abzieht; oder (was zu demselben Resultate führt), wenn man den kleineren Abschnitt von der halben Grundlinie abzieht; folglich kann $C - A$ gefunden

werden, und durch **C** + **A** und **C** — **A** sind die Werthe von **C** und **A** bestimmt.

Auflösung. Man ziehe die halbe Grundlinie von dem größern Abschnitte derselben ab, den Rest = x multiplicire man mit $4\,\beta = 2 \times 2\,\beta$, also mit der zweifachen Grundlinie; und theile das Produkt durch die gegebene Summe der beiden übrigen Seiten, so giebt der Quotient die Differenz dieser Seiten. Addirt man Diese zu der Summe, so ist die Hälfte hiervon die größere der beiden gesuchten Seiten; und die kleinere wird erhalten, wenn man die Differenz Beider von ihrer Summe abzieht, und von dem Reste die Hälfte nimmt.

Beispiel. Die Summe beider Seiten = 30, die Grundlinie = 18, und der kleinere Abschnitt derselben = 4.

Hier ist $x = \frac{18}{2} - 4 = 9 - 4 = 5$;

und $\beta = \frac{18}{2} = 9$, also $4\,\beta = 4 \,.\, 9 = 36$

$C + A = 30$. Folglich ist

$$C - A = \frac{4\,\beta x}{C + A} = \frac{36 \,.\, 5}{30} = 6.$$

Da nun $C + A = 30$
und $C - A = 6$

so ist $2\,C = 36$ also $C = 18$
und $2\,A = 24$ und $A = 12$.

Aufgabe 201. In einem Dreieck sind zwei Normalen gezogen; und man kennt (von jeder der beiden Seiten, auf welche diese Normalen gefället sind) den Abschnitt, der an dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel anliegt, und es ist außerdem die Eine dieser beiden Seiten gegeben; man soll den Werth der andern bestimmen.

Analysis. Sind **A** und **B** die beiden Seiten; und nimmt man an, „daß der von denselben eingeschlossene Winkel $c < R$ sey" (für $\angle\, c > R$ bleibt die Auflösung dieselbe), und bezeichnet man die neben einander liegenden Abschnitte derselben mit α' und β' (so daß α' auf A' und β' auf **B** abgeschnitten ist) so hat man nach Satz 13.

$$A^2 + B^2 = C^2 + 2\,\alpha' A$$
und $$A^2 + B^2 = C^2 + 2\,\beta' B$$

Daher ist $2\,\alpha' A = 2\,\beta' B$
also auch $\alpha' A = \beta' B$

und daher ist, wenn A die gegebene und B die gesuchte Seite seyn soll,

$$B = \frac{\alpha' A}{\beta'}.$$

Aufgabe 202. Aus den in der vorigen Aufgabe gegebenen Stücken eines Dreiecks soll die dritte Seite desselben berechnet werden.

Aufgabe 203. Von einem Parallelogramm sind die beiden Seiten und die Eine Diagonale gegeben; es soll hieraus die Größe der andern Diagonale berechnet werden.

Analysis. Sind die vier Seiten des Parallelogramms A, B, C, D, und die Diagonalen E und F: so ist nach Nr. 11. der gegenwärtigen Beilage

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2 + F^2.$$

Und weil bei dem Parallelogramme

$$A = C \text{ und } B = D$$

$$\text{so ist } 2\,A^2 + 2\,B^2 = E^2 + F^2$$

$$\text{folglich ist } 2\,A^2 + 2\,B^2 - E^2 = F^2$$

und daher $F = \sqrt{(2\,A^2 + 2\,B^2 - E^2)}$.

Aufgabe 204. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gegeben und die Summe beider Katheten; man soll den Werth einer jeden Kathete besonders angeben.

Analysis. Sind A und B die gesuchten Seiten, so ist A + B gegeben, also auch $(A + B)^2$; aber auch die Hypotenuse H ist gegeben, und daher $H^2 = A^2 + B^2$.

Man kennt also $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$ (4.)

und auch $H^2 = A^2 \qquad\qquad + B^2$

folglich auch $(A + B)^2 - H^2 = \qquad 2\,AB.$

Es ist also 2 AB gegeben, und also auch 4 AB.

Nun ist $(A + B)^2 - 4\,AB = (A - B)^2$ (8.)

folglich ist A — B ebenfalls gegeben; und da sonach A + B und auch A — B gegeben sind, so sind A und B bestimmt.

Auflösung. Von $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$

ziehe ab $H^2 = A^2 \qquad\qquad + B^2$

so bleibt $(A + B)^2 - H^2 = \qquad 2\,AB.$

Den Rest nehme man zwei Mal, so erhält man

$$2\,(A + B)^2 - 2\,H^2 = 4\,AB$$

und ziehe denselben ab von

$$(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$$

so erhält man

$$(A + B)^2 - [2\,(A + B)^2 - 2\,H^2] = (A - B)^2.$$

Die Quadratwurzel hieraus giebt „den Werth von $A - B$". Wird dieser zu der gegebenen Summe $A + B$ addirt, so ist die Hälfte hiervon $= A$; und wird $A - B$ von $A + B$ abgezogen, so giebt die Hälfte des Restes den Werth von B.

Beispiel. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe beider Katheten $= 46$, und die Hypotenuse $= 34$; es sollen die Katheten berechnet werden.

Hier ist

$$\begin{array}{rl} (A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2 = 46^2 = & 2116 \\ H^2 = A^2 \qquad\quad + B^2 = 34^2 = & 1156 \\ \hline \text{daher}\quad 2\,AB \qquad = & 960 \\ \text{und}\quad 4\,AB \qquad = & 1920 \\ \hline \text{Da nun}\ A^2 + 2\,AB + B^2 = & 2116 \\ \text{und}\quad 4\,AB \qquad = & 1920 \\ \hline \text{so ist}\ A^2 - 2\,AB + B^2 = & 196 \end{array}$$

also $(A - B)^2 = 196$.

Folglich ist $A - B = \sqrt{196} = 14$.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist also}\ A + B = 46 \\ \text{und}\ A - B = 14 \\ \hline \text{folglich}\ 2\,A = 60\ \text{und}\ A = 30 \\ \qquad 2\,B = 32\ \text{„}\ B = 16. \end{array}$$

Aufgabe 205. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Differenz der beiden Katheten, und die Hypotenuse gegeben; es sollen die Katheten berechnet werden.

Auflösung. Dieselbe ist nicht wesentlich von der Auflösung der vorigen Aufgabe verschieden.

Beispiel. Die Differenz der beiden Katheten $A - B = 3$, und die Hypotenuse $H = 87$.

$$\begin{array}{rl} \text{Es ist}\ (A - B)^2 = A^2 - 2\,AB + B^2 = 3^2 = & 9 \\ H^2 = A^2 \qquad\quad + B^2 = 87^2 = & 7569 \\ \hline \text{also}\quad 2\,AB \qquad = & 7560 \\ \text{und daher}\quad 4\,AB \qquad = & 15120 \\ \hline \text{Da sonach}\ A^2 - 2\,AB + B^2 = & 9 \\ \text{und}\quad 4\,AB \qquad = & 15120 \\ \hline \text{so ist}\ A^2 + 2\,AB + B^2 = & 15129 \end{array}$$

also $(A + B)^2 = 15129$ und daher

$$A + B = \sqrt{15129} = 123.$$

Es ist also $A + B = 123$

und $A - B = 3$

folglich ist $2\,A = 126$ und daher $A = 63$

und $2\,B = 120$ und $B = 60$.

XIII. Lehrsätze, die mit Hülfe der Sätze des ersten und zweiten Buches sich beweisen lassen.

Diese Lehrsätze bilden die erste Fortsetzung von den in der Beilage **III.** zu dem ersten Buche enthaltenen Sätzen; und es werden hier eben so, wie dort, die Sätze angegeben, mit deren Hülfe der Beweis sich führen läßt. Bei dem Anführen der zu benutzenden Sätze wird die bloße Zahl des Satzes angegeben, wenn ein Satz aus dem zweiten Buche darunter verstanden werden soll; und es wird dieser Zahl **I.** beigesetzt, wenn es ein Satz aus dem ersten Buche ist. Daher bedeutet (5.) den 5ten Satz des zweiten Buches, und (**I.** 47.) den 47sten Satz des ersten Buches. Ein bereits früher vorkommender Lehrsatz wird noch besonders mit Lhrs. bezeichnet, und es bedeutet daher z. B. (Lhrs. 37.) den 37sten Lehrsatz; und um hierbei jede Zweideutigkeit zu vermeiden, werden die hier folgenden Lehrsätze mit fortlaufenden Nummern bezeichnet, so daß, da in Beilage **III**. Seite 77. die Lehrsätze bis 70 gehen, hier mit Lehrsatz 71. angefangen wird.

Lehrsatz 71. Mehrere Parallelogramme, die gleiche Höhe haben, sind zusammen einem Parallelogramme gleich von derselben Höhe; dessen Grundlinie so groß ist, als die Grundlinien aller jener Parallelogramme zusammen.

Beweis (1.) und (**I.** 36.).

Lehrsatz 72. Haben mehrere Dreiecke gleiche Höhe, so sind sie zusammen einem rechtwinkligen Dreieck gleich; dessen eine Kathete diese Höhe ist, und von welchem die andre so groß ist, als die Grundlinien aller dieser Dreiecke zusammen.

Beweis (**I.** 41.) und (Lhrs. 71.).

Lehrsatz 73. Haben die Prllgr. A und B gleiche Höhe, und ist die Grundlinie von A irgend ein Vielfaches der Grundlinie von B: so ist A das eben so Vielfache von B.

Beweis (Lhrſ. 71.).

Lehrsatz 74. Sind zwei gerade Linien gegeben, und wird jede derselben beliebig in zwei Abschnitte getheilt: so kann man vier Rechtecke bilden, von welchen jedes unter einem Abschnitte der ersten und einem Abschnitte der zweiten Linie enthalten ist. Diese vier Rechtecke sind zusammen „dem unter den beiden gegebenen Linien enthaltenen Rechtecke" gleich.

Beweis (1.).

Lehrsatz 75. Sind zwei gerade Linien gegeben, und man theilt jede beliebig in mehrere Theile: so ist „das unter den beiden gegebenen Linien enthaltene Rechteck" eben so groß, als alle die Rechtecke zusammen, welche aus jedem Theile der einen und jedem Theile der anderen Linie gebildet werden können.

Beweis (1.).

Lehrsatz 76. Wird eine gerade Linie in mehrere gleiche Theile getheilt: so ist „das unter der ganzen Linie und dem einen Theile derselben enthaltene Rechteck" ein eben so Vielfaches von dem Quadrate des einen Theils, in so viel gleiche Theile die Linie getheilt worden ist.

Beweis (3.).

Lehrsatz 77. Theilt man eine Linie beliebig in mehrere Theile: so ist das Quadrat dieser Linie eben so groß, als die unter der ganzen und jedem Theile derselben enthaltenen Rechtecke zusammen.

Beweis (2.).

Lehrsatz 78. Wird eine gerade Linie beliebig in drei Theile getheilt: so besteht das Quadrat der ganzen Linie „aus der Summe der Quadrate der drei Theile, und aus dem Zweifachen der drei Rechtecke, welche enthalten sind unter dem ersten und zweiten Theile, dem ersten und dritten Theile, und unter dem zweiten Theile und dem dritten".

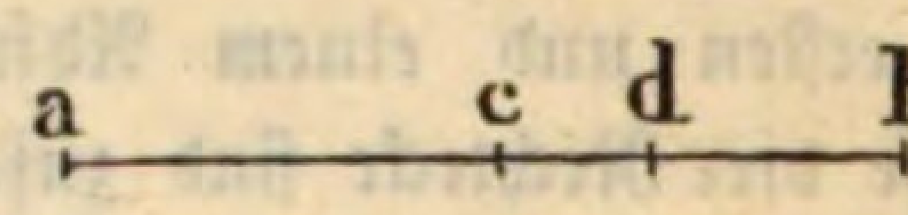
Beweis (4.)

Lehrsatz 79. Wird in einem Dreieck eine Normale gefället: so wird die Grundlinie durch dieselbe so getheilt, daß „das unter der Summe der beiden Abschnitte derselben und ihrer Differenz enthaltene Rechteck" eben so groß ist, als das Rechteck,

welches unter der Summe und der Differenz der beiden übrigen Seiten des Dreiecks enthalten ist.

Beweis (I. 47.) und (5.).

Lehrsatz 80. Wird eine gerade Linie **ab** in **c** halbirt und in **d** ungleich getheilt, so ist das zwischen den Theilpunkten **c** und **d** liegende Stück der Linie „die Hälfte des Unterschiedes der beiden ungleichen Theile".



Beweis. Es ist $cb = cd + db$

da nun $ac = cb$

so ist auch $ac = cd + db$

hierzu $cd = cd$

giebt $ac + cd = 2\,(cd) + db$

also $ad = 2\,(cd) + db$

Folglich ist $ad - db = 2\,(cd)$ und $\dfrac{ad - db}{2} = cd$.

Lehrsatz 81. Wenn ein Quadrat und ein Rechteck gleichen Umfang haben: so ist das Quadrat größer als das Rechteck, und zwar um das Quadrat des halben Unterschiedes der beiden Seiten des Rechtecks.

Beweis (5.) und (Lehrs. 80.)

Lehrsatz 82. Sind zwei gerade Linien von verschiedener Länge gegeben: so ist „das unter der Summe dieser Linien und ihrer Differenz enthaltene Rechteck" (das Rechteck also, von welchem die eine Seite so groß ist, als die beiden gegebenen Linien zusammen, und die andere Seite so groß, als der Unterschied Beider) dem Unterschiede der Quadrate beider Linien gleich.

Beweis (5.).

Lehrsatz 83. Von zwei verschiedenen Rechtecken, die gleichen Umfang haben, ist dasjenige das größere, dessen beide Seiten ihrer Größe nach am wenigsten verschieden von einander sind.

Beweis (Lehrs. 81.).

Lehrsatz 84. Wenn man, durch irgend einen Punkt der Diagonale eines Quadrats, Parallelen mit den Seiten desselben zieht: so sind die beiden Quadrate um die Diagonale zusammen eben so groß, als das Quadrat der Diagonale eines der beiden Ergänzungs-Parallelogramme.

Beweis (4.) und (I. 47.)

Lehrsatz 85. Der Umfang eines Ergänzungs-Parallelogramms von einem Quadrat ist halb so groß, als der Umfang des Quadrats.

Beweis (4.).

Lehrsatz 86. Ein Ergänzungs-Parallelogramm eines Quadrates ist am größten, wenn es die Diagonale des Quadrates in ihrem Halbirungspunkte berührt.

Beweis (Lhrs. 85.) und (Lhrs. 83.).

Lehrsatz 87. Werden durch einen Punkt der Diagonale eines Quadrates Parallelen mit den Seiten desselben gezogen, und wird die Seite des Quadrates durch diese Parallelen ungleich getheilt: so sind die beiden Quadrate um die Diagonale zusammen immer größer, als die beiden Ergänzungs-Parallelogramme.

Beweis (Lhrs. 86.).

Lehrsatz 88. Zieht man durch einen Punkt der Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks Parallelen mit den beiden übrigen Seiten desselben: so wird hierdurch ein Rechteck erhalten, das desto größer ist, je näher der in der Hypotenuse angenommene Punkt dem Halbirungspunkte dieser Linie liegt.

Beweis (Lhrs. 87.).

Lehrsatz 89. Wenn man die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks einmal addirt und einmal abzieht von einander: so ist das Quadrat der Summe beider Katheten, weniger dem Quadrat ihrer Differenz, 8 Mal so groß, als die Fläche des Dreiecks.

Beweis (8) und (I. 41.).

Lehrsatz 90. Wird eine gerade Linie einmal halbirt und einmal ungleich getheilt: so ist die Summe der Quadrate der ungleichen Theile größer, als die Summe der Quadrate der gleichen Theile; und der Unterschied beträgt um so mehr, je größer der Unterschied der beiden ungleichen Theile ist.

Beweis (9.).

Lehrsatz 91. Ist bei zwei verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken die Summe der beiden Katheten des einen eben so groß, als die Summe der Katheten des anderen, aber die Differenz derselben in dem ersten Dreieck größer, als in dem andern: so ist in dem ersten Dreieck auch die Hypotenuse größer, als in dem andern.

Beweis (Lhrs. 90.).

Lehrsatz 92. Haben zwei rechtwinklige Dreiecke die Hypotenuse gleich, und ist in dem ersten die Differenz beider Katheten

größer, als in dem andern: so ist in dem ersten dieser Dreiecke die Summe beider Katheten kleiner, als in dem andern.

Beweis (Lhrs. 91.).

Lehrsatz 93. Schneiden die beiden Diagonalen eines Vierecks sich unter einem rechten Winkel, und ist (wenn man die Seiten desselben, wie sie auf einander folgen, mit **A**, **B**, **C** und **D** bezeichnet) **A** + **C** größer als **B** + **D** (wo also **A** und **C**, und eben so **B** und **D** einander gegenüber liegen): so ist **A** — **C** kleiner als **B** — **D**.

Beweis (Lhrs. 64. und 92.).

Lehrsatz 94. Haben zwei Dreiecke die Grundlinie gemein, und es trifft die Linie, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, ihre gemeinschaftliche Grundlinie unter einem rechten Winkel: so ist die Differenz der Quadrate der beiden übrigen Seiten des einen Dreiecks eben so groß, als bei dem andern.

Beweis (I. 47.).

Lehrsatz 95. Haben zwei Dreiecke die Grundlinie gemein, und es schneidet die Linie, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, ihre gemeinschaftliche Grundlinie unter einem rechten Winkel: so ist „das unter der Summe und der Differenz der beiden übrigen Seiten enthaltene Rechteck" bei dem einen Dreieck eben so groß, als bei dem andern.

Beweis (Lhrs. 79.).

Lehrsatz 96. Wenn man in einem Dreieck, von zwei Spitzen desselben, Normalen auf die gegenüber liegenden Seiten fället: so sind die Abschnitte dieser Seiten, die an demselben Winkel des Dreiecks anliegen, so von einander abhängig, „daß das unter dem einen Abschnitte und der Seite, zu der er gehört, enthaltene Rechteck eben so groß ist, als das Rechteck, welches unter dem anderen Abschnitte und der dazu gehörigen Seite enthalten ist".

Beweis (12.) und (13.).

Lehrsatz 97. Wird, in einem rechtwinkligen Dreieck, eine Normale von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefället: so ist „das unter der Hypotenuse und dem einen Abschnitte derselben enthaltene Rechteck" dem Quadrate der Kathete gleich, die an diesem Abschnitte anliegt.

Beweis (13.) und (I. 47.).

Lehrsatz 98. Wenn man, in einem rechtwinkligen Dreieck, eine Normale von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse

fället: so ist „das unter den beiden Abschnitten der Hypotenuse enthaltene Rechteck" dem Quadrat der gefällten Normale gleich.

Beweis (4.) und (I. 47.).

Lehrsatz 99. In einem rechtwinkligen Dreieck ist „das unter der Summe der Hypotenuse und der einen Kathete, und der Differenz dieser Linien enthaltene Rechteck" dem Quadrate der andern Kathete gleich.

Beweis (4.) und (I. 47.).

Lehrsatz 100. Haben zwei Rechtecke einen gleichen Umfang, so ist die Diagonale des größeren Rechtecks kleiner, als die des kleineren.

Beweis (5.) und (9.).

Lehrsatz 101. „Das Quadrat der Differenz der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, und das zweifache unter beiden Katheten enthaltene Rechteck" sind zusammen dem Quadrate der Hypotenuse gleich.

Beweis (7.) und (I. 47.)

Lehrsatz 102. „Das Quadrat der Summe beider Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, und das Quadrat ihrer Differenz" sind zusammen zwei Mal so groß, als das Quadrat der Hypotenuse dieses Dreiecks.

Beweis (9.) und (I. 47).

Lehrsatz 103. Wird aus einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ein anderes in der Art gebildet, daß die Summe und die Differenz der Katheten des gegebenen „als Katheten des neuen Dreiecks" angenommen werden: so ist die Hypotenuse dieses neuen Dreiecks der Diagonale des Quadrats der Hypotenuse des gegebenen Dreiecks gleich.

Beweis (Lhrs. 102.)

Lehrsatz 104. In jedem Parallelogramme ist „die Summe der Quadrate der vier Abschnitte, in welche beide Diagonalen desselben sich gegenseitig theilen", eben so groß, als die Summe der Quadrate der beiden Seiten desselben.

Beweis Beilage IV. Nr. 11.

Das dritte Buch der Elemente.

Erklärungen.

1) Gleiche Kreise sind solche, die gleiche Durchmesser oder gleiche Halbmesser haben.

2) Eine gerade Linie berührt den Kreis (ist eine Tangente desselben), wenn sie ihn trifft, ohne verlängert denselben zu schneiden.

3) Von Kreisen sagt man, „sie berühren einander", wenn sie einander treffen, ohne sich zu schneiden.

4) Gerade Linien im Kreise heißen „gleichweit vom Mittelpunkte entfernt", wenn die aus dem Mittelpunkte auf sie gefällten Normalen gleich sind.

5) Entfernter von dem Mittelpunkte ist die gerade Linie, auf welche die größere Normale fällt.

6) Ein Kreisabschnitt ist „die von einer geraden Linie (der Grundlinie) und einem Kreisbogen begrenzte Figur".

7) Der Winkel des Abschnittes ist „der Winkel, welcher von der Grundlinie und von dem dazu gehörigen Kreisbogen dieses Abschnittes eingeschlossen wird".

8) Dagegen wird „der Winkel, welchen zwei gerade Linien einschließen, die von irgend einem Punkte des Kreisbogens an die Endpunkte der dazu gehörigen Grundlinie gezogen sind", der Winkel im Abschnitte genannt.

9) Wenn die einen Winkel einschließenden geraden Linien einen Kreisbogen abschneiden: so sagt man, „der Winkel stehe auf diesem Bogen".

10) Ein **Kreisausschnitt** ist „eine Figur, welche von zwei, einen Winkel am Mittelpunkte des Kreises einschließenden Radien und dem von ihnen abgeschnittenen Kreisbogen begrenzt wird".

11) **Aehnliche** Kreisabschnitte sind, „die **gleiche Winkel** fassen, oder in welchen die **Winkel** beiderseits gleich sind".

Anmerkungen. In dem ersten Buche wird der Kreis „als eine geschlossene Figur, innerhalb welcher ein Punkt von der Lage sich befindet, daß alle an denselben, von dem Umfang gezogene gerade Linien gleich groß sind (I. 15. E.)" erklärt; und es wird dort zugleich das für die Geometrie nothwendige Postulat aufgestellt, „daß aus jedem Punkte, als **Mittelpunkt**, in jedem Abstande **ein Kreis** beschrieben werden kann" (F. 3.). Hierdurch wird man berechtigt, von dem Kreise unmittelbar Gebrauch zu machen, ohne daß die nähern Eigenschaften dieser Figur zuvor zu erläutern sind. Indessen erstreckt sich der Gebrauch, den man von dem Kreise in den beiden ersten Büchern macht, nicht weiter, als die Erklärung I. 15. und das Postulat 3. es gestatten; und es werden vorzugsweise nur die unmittelbaren Folgerungen benutzt, „daß, wenn eine gerade Linie innerhalb eines Kreises liegt, diese, genugsam verlängert, denselben schneiden muß; und daß, wenn zwei Kreise zum Theil in- und zum Theil außer einander liegen, sie sich gegenseitig schneiden".

In dem dritten Buche kommen nun noch alle die **Erklärungen** hinzu, welche „bei der Ableitung der verschiedenen Eigenschaften der Kreislinie" gebraucht werden; und es betreffen diese größtentheils die Berührungen und die Benennung der **Winkel**, mit Rücksicht auf **ihre Lage** in dem Kreise; und es wird, um die Winkel näher bestimmen zu können, in Nr. 6. die Erklärung des Kreisabschnittes, die bereits in (I. 19. E.) vorkömmt, wiederholt.

Zur näheren Erläuterung der verschiedenen Erklärungen des dritten Buches dient Folgendes:

1) Jeder „Theil des Kreisumfanges" ist: ein **Kreisbogen**.

2) Jede „gerade Linie, welche die Endpunkte eines Kreisbogens verbindet", ist **eine Sehne**; und es ist nun

3) die von einem Kreisbogen und der zu demselben gehörigen Sehne eingeschlossene Figur „ein **Kreisabschnitt**".

4) Bei der Erklärung des Winkels (I. 8. E.) wird keineswegs vorausgesetzt, „daß die denselben einschließenden Linien gerade seyn müßten", und es wird daher auch der **geradlinige Winkel** in (I. 9. E.) noch besonders erklärt. Hier wird nun in (III. 7. E.) „der Winkel, welchen in einem Abschnitte der Bogen desselben mit der dazu gehörigen Sehne einschließt", als derjenige angeführt, welcher der **Winkel des Abschnitts** genannt werden soll, und es sind also **die Schenkel** desselben eine gerade Linie und ein Kreisbogen.

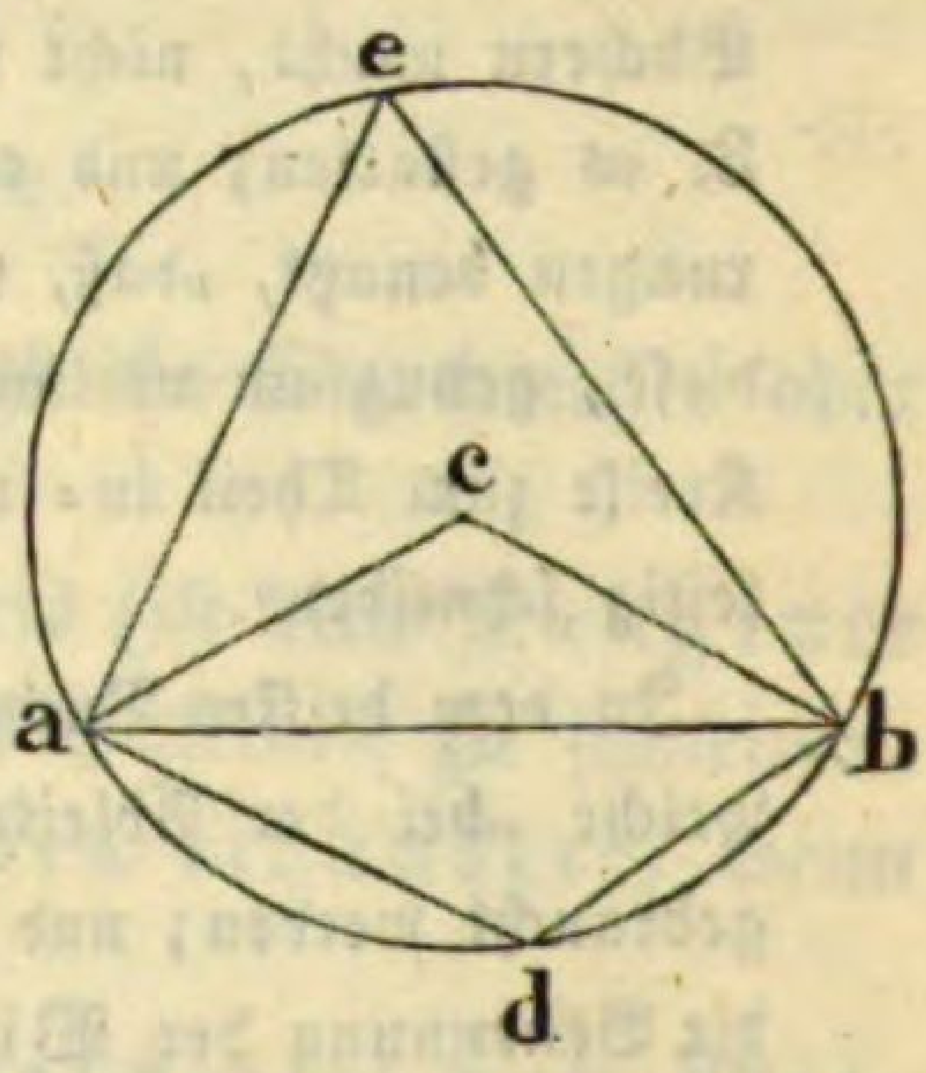
5) Verschieden hiervon ist der Winkel im Abschnitte (III. 8. E.) der geradlinig ist, und in dem Abschnitte eine solche Lage hat: daß der Scheitel in irgend einem Punkte des Kreisbogens dieses Abschnitts liegt, und die Schenkel die Endpunkte der dazu gehörigen Sehne treffen.

6) Liegt der Scheitel eines Winkels außerhalb eines Kreisabschnittes, doch innerhalb des Kreises, so daß die Schenkel die Endpunkte des Bogens dieses Abschnittes treffen: so sagt man, „der Winkel steht auf diesem Bogen".

7) Der auf einem Bogen stehende Winkel wird ein Centriwinkel genannt, wenn der Scheitel desselben in dem Mittelpunkte des Kreises liegt; und er heißt

8) ein Peripheriewinkel, wenn der Scheitel desselben in einem Punkte des Kreisumfanges sich befindet.

Hiernach ist adb und eben so auch aeb ein Kreisbogen, und ab die dazu gehörige Sehne. Die von dem Bogen adb und der Sehne ab eingeschlossene Figur ist ein Kreisabschnitt; und es ist eben so auch die von dem Bogen aeb und der Sehne ab eingeschlossene Figur ein Abschnitt des Kreises.



Der Winkel, welchen der Bogen adb mit der Sehne ab bildet, ist der Winkel des Abschnittes adba. Dagegen ist der Winkel adb, den die geraden Linien da und db einschließen, der Winkel im Abschnitte adba; und es ist eben so ∟ aeb der Winkel in dem Abschnitte aeba.

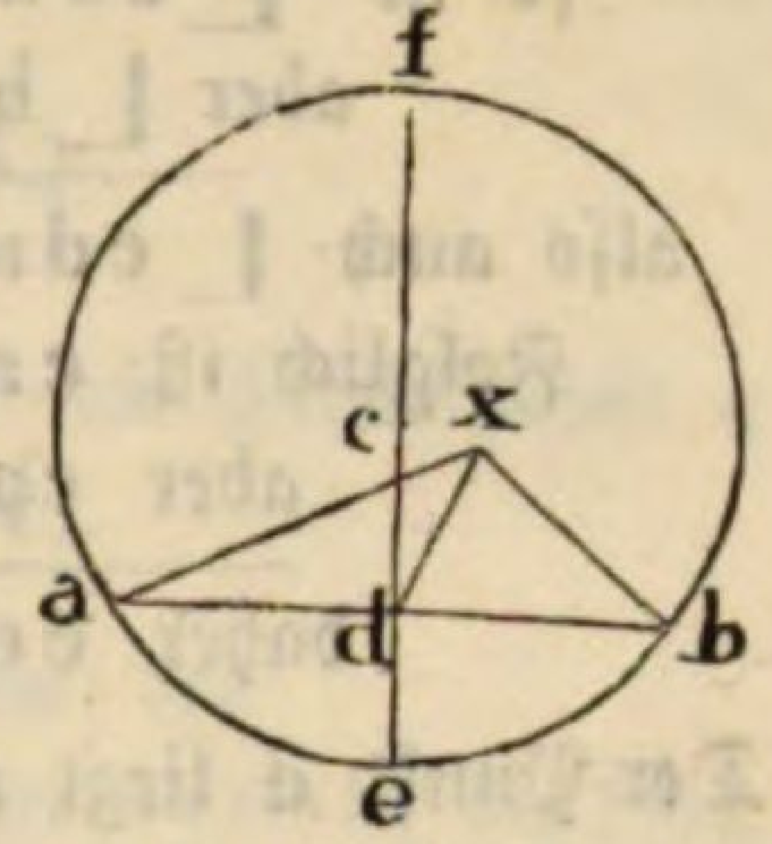
Die Winkel acb und aeb stehen beide auf dem Bogen adb; und es ist von denselben, wenn c der Mittelpunkt des Kreises ist, ∟ acb ein Centriwinkel und ∟ aeb ein Peripheriewinkel auf dem Bogen adb.

Wenn in irgend einem andern Kreise der Winkel in einem Abschnitte dem Winkel adb gleich ist, so wird dieser Abschnitt „dem Kreisabschnitte adba ähnlich" genannt.

9) Schneiden zwei Sehnen sich, und liegt der Durchschnittspunkt derselben nicht in dem Mittelpunkte des Kreises: so werden die Winkel, welche die Abschnitte der Sehnen mit einander bilden, excentrische Winkel genannt.

III. Satz 1. Aufgabe.

Eines gegebenen Kreises aebf Mittelpunkt zu finden.



Auflösung. Verbinde beliebig zwei Punkte a und b des Kreisumfanges durch die Sehne ab, halbire diese Linie in d (I. 10.), errichte auf ihr in d eine Normale df (I. 11.) und verlängere fd, bis sie den Kreisumfang in e trifft, halbire fe in c: so ist c „der gesuchte Mittelpunkt".

Beweis. Läge der Mittelpunkt des Kreises nicht in der Linie fe, so müßte er außerhalb derselben, etwa in x liegen. Man verbinde x mit a, d und b: so ist, weil x der Mittelpunkt des Kreises seyn soll,

xa = xb (I. 15. E.)
Da nun da = db (p. c.)
und xd = xd

so folgt Δxda $\cong$ Δxdb (I. 8.)
und daher ∟xda = ∟xdb
Folglich ist ∟xdb = R (I. 10. E.)
Da aber ∟fdb = R (p. c.)

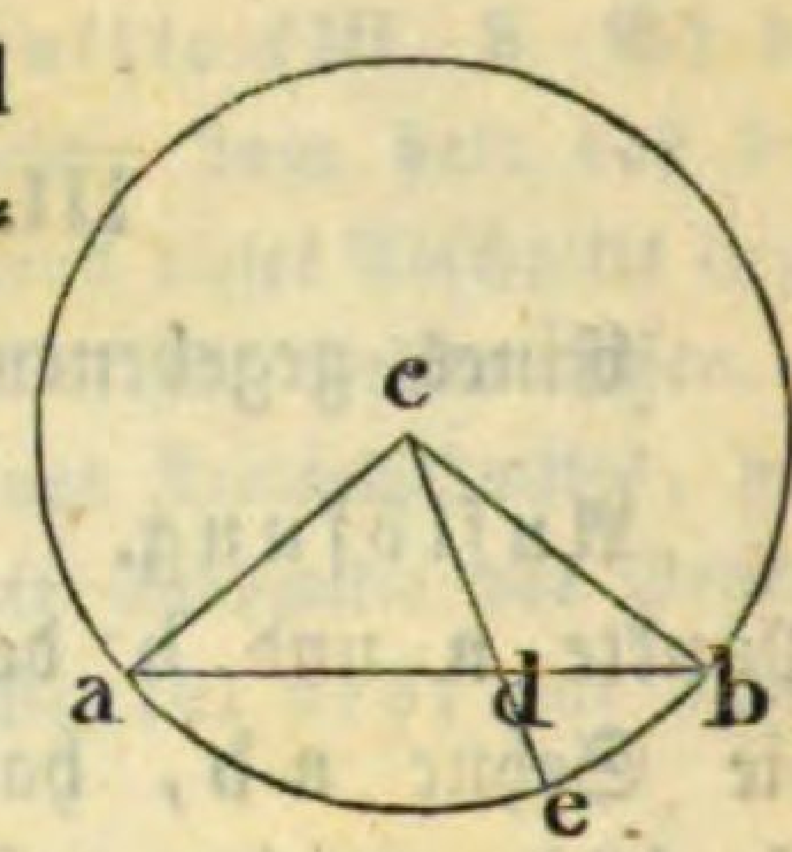
so folgt ∟xdb = ∟fdb
was nicht möglich ist (9. G.)

Die Annahme, „daß der Mittelpunkt des Kreises außerhalb der Linie fe liege" ist also falsch; der Mittelpunkt liegt folglich in dieser Linie, und da, wenn c der Mittelpunkt ist, ce = cf seyn muß, so liegt er nothwendig in dem Halbirungspunkte der fe.

Zusatz. Wird eine Sehne eines Kreises normal halbirt, so liegt in der Halbirungslinie der Mittelpunkt des Kreises.

III. Satz 2. Lehrsatz.

Jede gerade Linie ab, welche zwei Punkte a und b des Kreisumfanges verbindet, liegt innerhalb dieses Kreises.



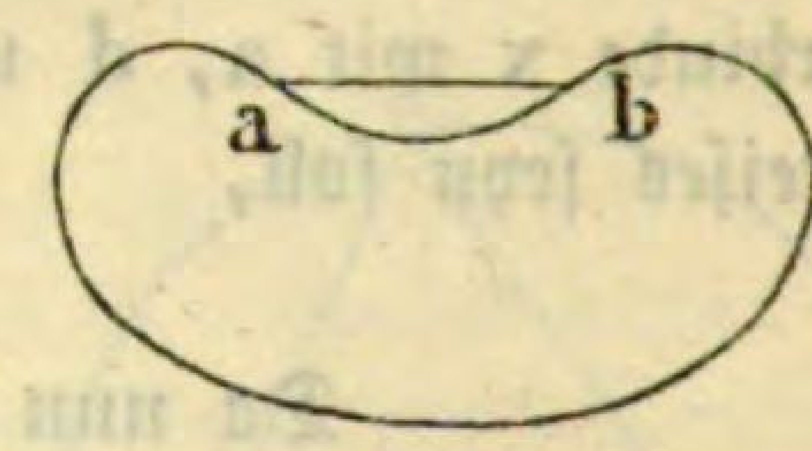
Beweis. Durch irgend einen Punkt d der ab ziehe von dem Mittelpunkte c die Gerade cde, und ziehe die Radien ca, cb:

so ist $\angle cda > \angle b$ (I. 16.)
aber $\angle b = \angle a$ (I. 5.)

also auch $\angle cda > \angle a$.
Folglich ist $ca > cd$ (I. 19.)
aber $ca = ce$ (I. 15. E.)

daher $ce > cd$.

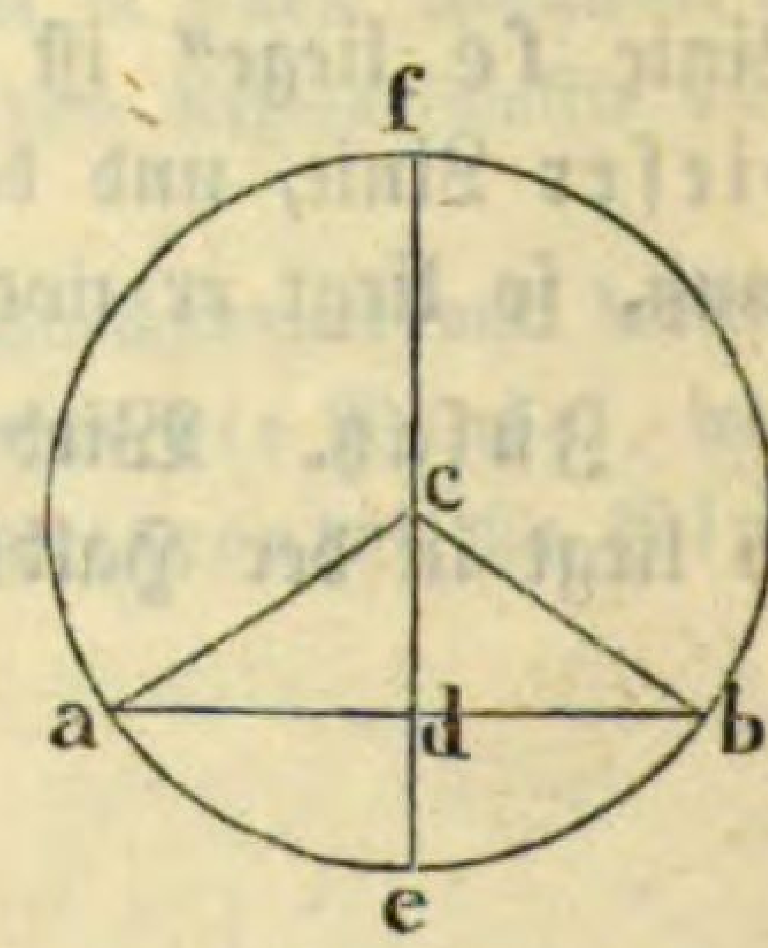
Der Punkt d liegt also zwischen c und e, und daher innerhalb des Kreises. Da dieses nun von jedem Punkte der ab gilt, so liegt die ganze Linie ab innerhalb des Kreises.



Anmerkung. Dieser Lehrsatz mußte deßhalb bewiesen werden: weil es auch von einer krummen Linie begrenzte Figuren giebt — wie die beistehende — wo eine Gerade ab, welche zwei Punkte ihres Umfanges verbindet, außerhalb derselben liegt.

III. Satz 3. Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise eine, durch den Mittelpunkt c gehende gerade Linie eine Sehne ab, die nicht durch den Mittelpunkt geht, halbirt, so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln; und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.



Beweis. Erster Theil. Die ab ist in d halbirt, und fde geht durch den Mittelpunkt c; so wird seyn $\angle cda = \angle cdb = R$. Denn da

$da = db$ (p. h.)
$ca = cb$ (I. 15. E.)
und $cd = cd$

so ist $\triangle cda \cong \triangle cdb$ (I. 8.)
folglich auch $\angle cda = \angle cdb = R$.

Die fe schneidet also die ab unter rechten Winkeln.

Zweiter Theil. Wenn fe die ab in d unter rechten Winkeln schneidet, so ist $da = db$; denn da

$$cb = ca$$

so ist $\angle a = \angle b$
aber $\angle cda = \angle cdb = R$ (p. h.)
und $ca = cb$

Folglich ist $\Delta cda \cong \Delta cdb$ (I. 26.)
und daher $da = db$

Die ab wird also in d durch fe, welche durch den Mittelpunkt c geht, und die ab normal schneidet, halbirt.

Anmerkung. Aus den Sätzen 1. und 3. geht hervor: daß

1) jede gerade Linie, welche die Sehne eines Kreises normal halbirt, durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

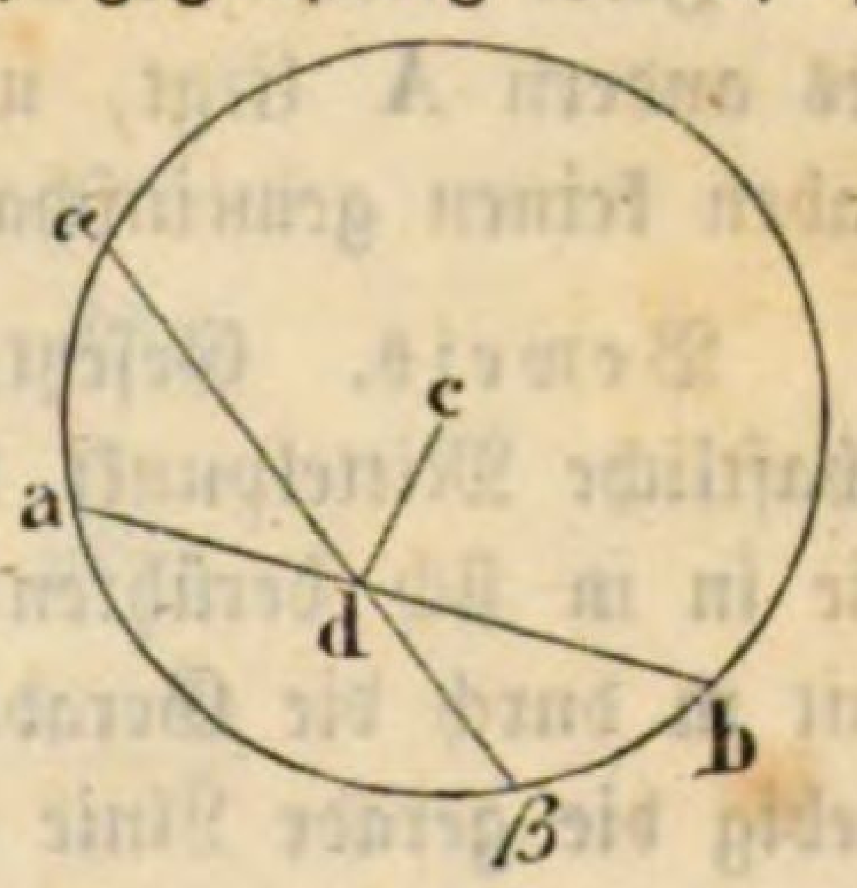
2) Jede gerade Linie, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Halbirungspunkte einer Sehne desselben verbindet, normal auf der Sehne steht; und

3) jede gerade Linie, welche von dem Mittelpunkte eines Kreises normal auf eine Sehne gefället wird, diese halbirt.

III. Satz 4. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen ab und $\alpha\beta$, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, im Kreise sich schneiden: so halbiren sie sich nicht gegenseitig.

Beweis. Gesetzt, sie halbirten sich gegenseitig in d, so daß zu gleicher Zeit wäre $ad = db$ und $\alpha d = d\beta$: so müßte seyn, wenn man den Mittelpunkt c mit d verbindet,



$\angle cdb = R$ (3.)
und auch $\angle cd\beta = R$ „
also $\angle cdb = \angle cd\beta$

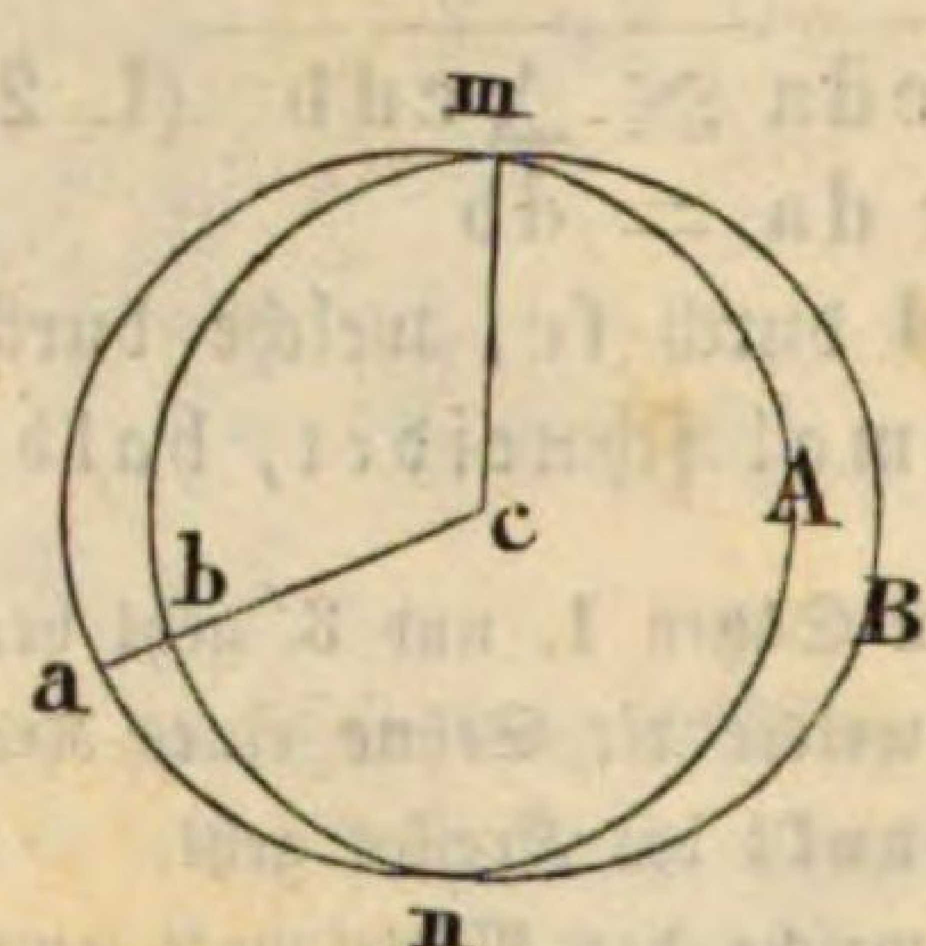
was nicht möglich ist (I. 9. G.)

Folglich kann der Durchschnittspunkt d nicht zugleich ab und auch $\alpha\beta$ halbiren.

III. Satz 5. Lehrsatz.

Zwei Kreise A und B, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Beweis. Gesetzt, c wäre der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kreise A und B, die in m und n sich schneiden: so verbinde diesen Mittelpunkt c mit dem Durchschnittspunkt m durch die Gerade cm, und ziehe beliebig die gerade Linie cba; so müßte seyn



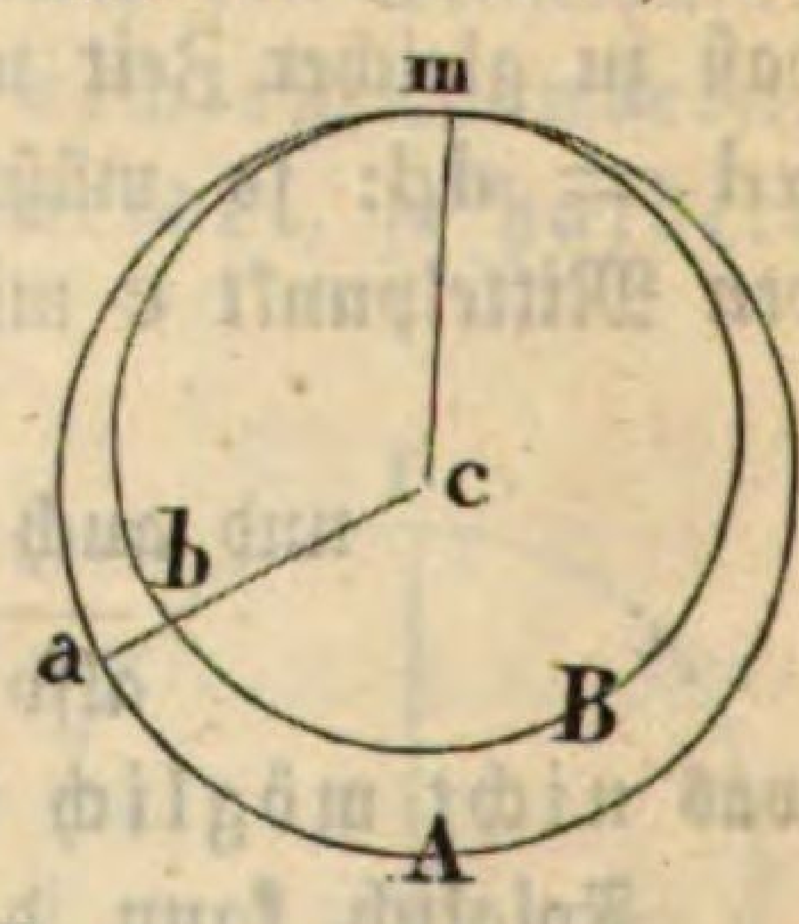
cm = cb in dem Kreise B
cm = ca „ „ „ A

also auch cb = ca

was unmöglich ist (I. 9. G.) Die sich schneidenden Kreise A und B können also **keinen** gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

III. Satz 6. Lehrsatz.

Zwei Kreise A und B, von welchen der eine B **innerhalb** des andern A liegt, und die sich berühren, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.



Beweis. Gesetzt, c wäre der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Kreise A und B, die in m sich berühren: so verbinde man c mit m durch die Gerade cm, und ziehe beliebig die gerade Linie cba; so müßte seyn

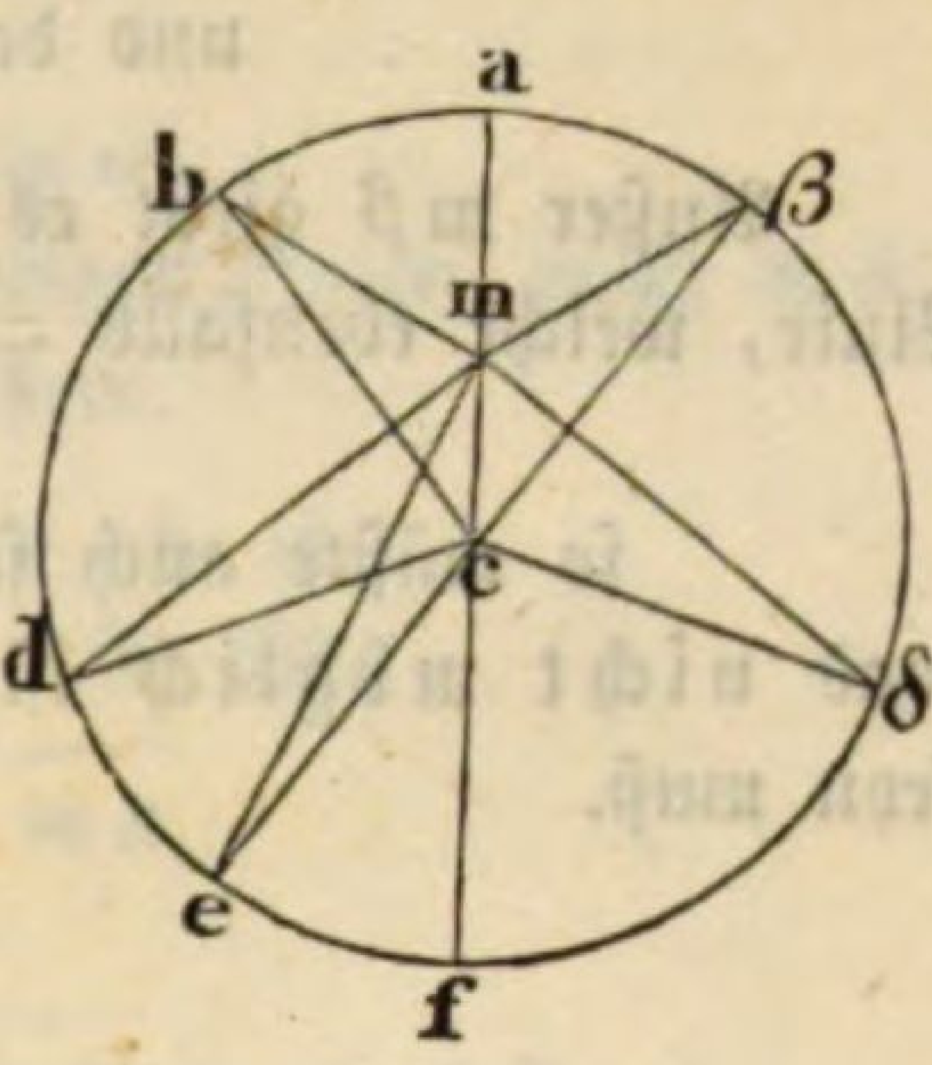
cm = cb in dem Kreise B
und cm = ca „ „ „ A

also auch cb = ca

was unmöglich ist (I. 9. G.). Folglich können die Kreise A und B, die, einer in dem andern liegend, sich berühren, **keinen** gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

III. Satz 7. Lehrsatz.

Nimmt man, auf eines Kreises Durchmesser af, einen von dem Mittelpunkte c verschiedenen Punkt m an, und zieht von demselben an den Umkreis mehrere gerade Linien me, md, mb: so ist die Linie durch den Mittelpunkt mf die größte, und das übrige Stück des Durchmessers, also ma die kleinste. Unter den übrigen Linien aber ist die der größten näher liegende immer größer, als die entferntere. Auch sind von diesen Linien nur je zwei, auf beiden Seiten des Durchmessers liegende, gleich groß.



Beweis. Erster Theil. Ziehe ce, cd, cb, so ist in $\triangle$ mce

$$mc + ce > me \quad (I. 20.)$$
$$\text{aber } ce = cf \quad (I. 15. E.)$$

$$\text{also auch } \underbrace{mc + cf} > me$$
$$\text{und daher } mf > me.$$

In den beiden Dreiecken mce und mcd ist

$$mc = mc$$
$$\text{und } ce = cd$$
$$\text{aber } \angle mce > \angle mcd$$

$$\text{Also ist } me > md \quad (I. 24.)$$

und aus gleichen Gründen md > mb.

$$\text{Da } cm + mb > cb \quad (I. 20.)$$
$$\text{und } cb = ca$$

$$\text{so ist auch } cm + mb > \underbrace{ca}$$
$$\text{also } cm + mb > cm + ma$$

$$\text{und daher } mb > ma.$$

Hiernach ist mf > me > md > mb > ma; und es ist also die durch den Mittelpunkt c gehende mf die größte, und das übrige Stück ma des Durchmessers die kleinste Linie; und von den übrigen me, md, mb, ist die der mf näher liegende größer, als die entferntere.

Zweiter Theil. An mc lege $\angle mc\beta = \angle mcb$, so ist

$$mc = mc$$
$$\angle mc\beta = \angle mcb \quad \text{(p. c.)}$$
$$\text{und } c\beta = cb \quad \text{(I. 15. E.)}$$

$$\text{Also } \Delta mc\beta \cong \Delta mcb \quad \text{(I. 5.)}$$
$$\text{und daher } m\beta = mb.$$

Außer $m\beta$ giebt es aber keine, von m an den Umfang gehende Linie, welche ebenfalls $= mb$ seyn könnte; denn wäre

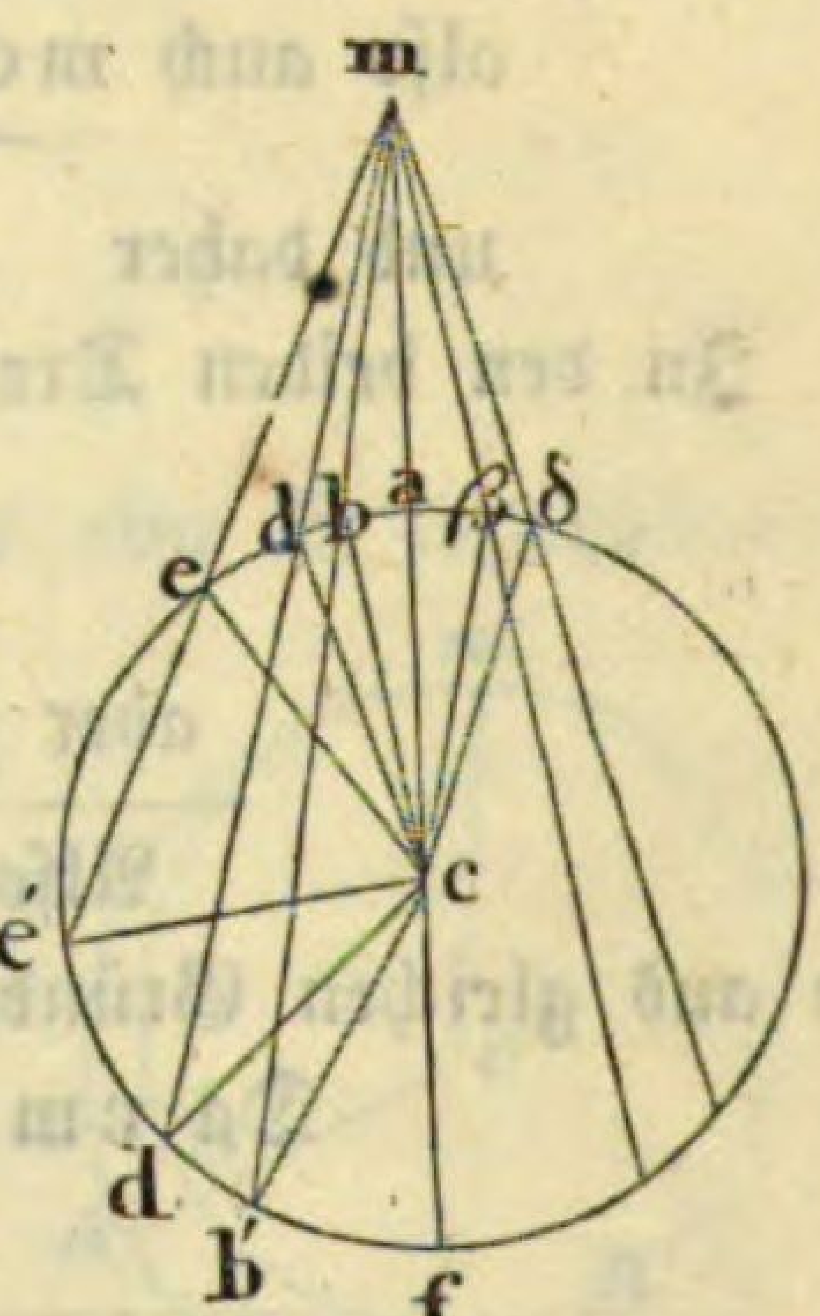
$$m\delta = mb$$

so müßte auch seyn $m\delta = m\beta$

was nicht möglich ist, da nach dem ersten Theile $m\delta > m\beta$ seyn muß.

III. Satz 8. Lehrsatz.

Nimmt man außerhalb eines Kreises einen Punkt m an, und zieht von demselben mehrere gerade Linien an den Umkreis (eine mf durch den Mittelpunkt c, und die übrigen beliebig): so ist von diesen Linien mf, mb', md', me', in sofern sie einen hohlen Kreisbogen treffen, die durch den Mittelpunkt, also mf, die größte; und von den übrigen die der größten näher liegende größer, als die entferntere. Von den Linien aber, in sofern sie blos den erhabenen Theil des Umkreises treffen (also ma, mb, md, me) ist die, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht, also ma, die kleinste; und von den übrigen ist die Linie, welche der kleinsten näher liegt, kleiner als die entferntere. Auch sind von allen diesen Linien nur je zwei, die auf beiden Seiten der durch den Mittelpunkt gehenden liegen, gleich groß.



Beweis. Erster Theil. Ziehe cb', cd', ce', so ist

$$mc + cb' > mb' \quad \text{(I. 20.)}$$
$$\text{und } cb' = cf \quad \text{(I. 15. E.)}$$

$$\text{Also auch } mc + cf > mb'$$
$$\text{und daher } \quad mf \quad > mb'.$$

Ferner, da in den Dreiecken mcb' und mcd'

$$mc = mc$$

$$\text{und } cb' = cd' \quad \text{(I. 15. E.)}$$

$$\text{aber } \angle mcb' > \angle mcd'$$

$$\text{so ist } mb' > md' \quad \text{(I. 24.)}$$

und aus gleichen Gründen $md' > me'$.

Es ist also $mf > mb' > md' > me'$

demnach ist mf die größte, und von den übrigen Linien mb', md', me' ist die der mf näher liegende die größere.

Zweiter Theil. Ziehe cb, cd, ce, so ist

$$cb + mb > \overbrace{cm}\quad \text{(I. 20.)}$$

$$\text{also } cb + mb > ca + ma.$$

$$\text{Da nun } cb = ca$$

$$\text{so ist } mb > ma \text{ also } ma < mb.$$

Ferner ist in den Dreiecken mcb und mcd

$$cb + mb < cd + md \quad \text{(I. 21.)}$$

$$\text{und } cb = cd$$

$$\text{also } mb < md$$

und aus gleichen Gründen $md < me$.

Es ist also $ma < mb < md < me$.

Demnach ist ma die kleinste, und von den übrigen Linien mb, md, me ist diejenige die kleinere, welche der ma näher liegt.

Dritter Theil. An mc setze $\angle mc\beta = \angle mcb$, und ziehe $m\beta$, so ist

$$mc = mc$$

$$\angle mc\beta = \angle mcb \quad \text{(p. c.)}$$

$$\text{und } c\beta = cb \quad \text{(I. 15. E.)}$$

$$\text{also } \Delta mc\beta \cong \Delta mcb \quad \text{(I. 5.)}$$

$$\text{und daher } m\beta = mb.$$

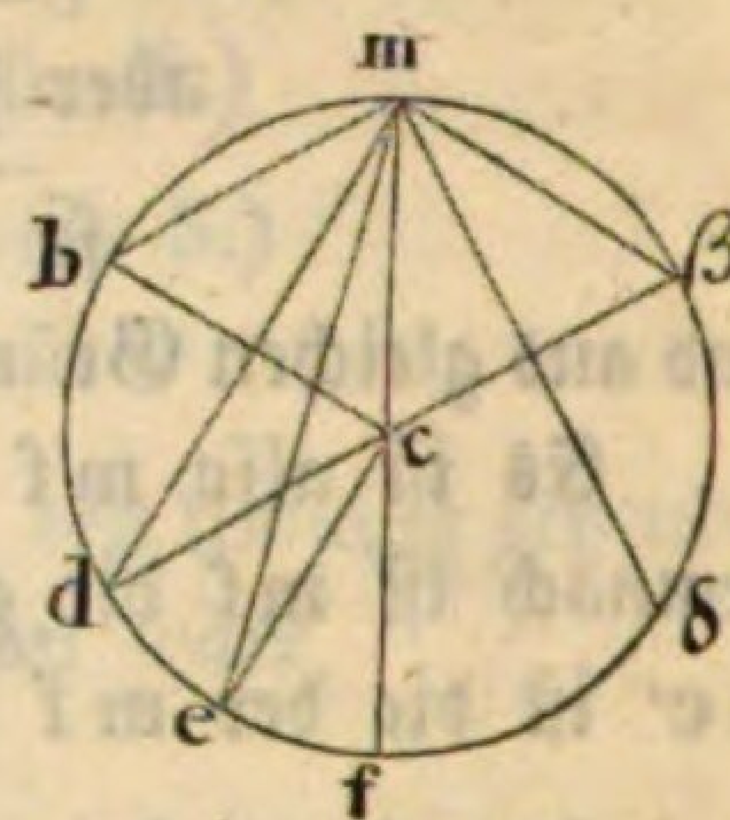
$$\text{Wäre nun auch } m\delta = mb$$

$$\text{so müßte seyn } m\delta = m\beta$$

was nicht möglich ist, da nach dem zweiten Theile $m\beta < m\delta$ seyn muß.

Aus den Sätzen 7. und 8. folgt, „daß von einem Punkte, der nicht des Kreises Mittelpunkt ist, nicht mehr als zwei gerade Linien von gleicher Größe an des Kreises Umfang gezogen werden können"; und es ist die Richtigkeit dieser Behauptung für den Fall, wenn der Punkt innerhalb

des Kreises liegt, in dem 7ten Satze, und für den Fall, wenn er außerhalb des Kreises liegt, in dem 8ten Satze bewiesen. „Daß die Behauptung aber auch noch alsdann richtig ist, wenn der Punkt in des Kreises Umfang liegt, und daß auch alsdann gleiche Bestimmungen gelten, wie die in dem 7ten und 8ten Satze bewiesenen“ ergiebt sich wie folgt:



Es sey m der in dem Umfange des Kreises gegebene Punkt; ziehe **mf** durch den Mittelpunkt c, und die übrigen **me**, **md** und **mb** beliebig: so ist

$$mc + ce > me \ (\text{I. } 20.)$$
$$\text{und } ce = cf$$

$$\text{also } \underbrace{mc + cf}_{} > me$$
$$\text{und } \quad mf \quad > me.$$

Ferner ist in den Dreiecken **mce** und **mcd**

$$mc = mc$$
$$ce = cd$$
$$\text{und } \angle mce > mcd$$

$$\text{folglich } me > md$$

und aus gleichen Gründen $md > mb$.

Es ist also $mf > me > md > mb$.

Hiernach ist die durch den Mittelpunkt gehende **mf** die größte, und die übrigen Linien **me**, **md**, **mb** sind desto größer, je näher sie der **mf** liegen.

Ist nun $m\beta = mb$, so kann nicht auch $m\delta = mb$ seyn; weil sonst $m\delta = m\beta$ seyn müßte, was nach dem so eben Bewiesenen nicht möglich ist.

III. Satz 9. Lehrsatz.

Gehen von einem Punkte m mehr als zwei gleich große gerade Linien mb, mc und mβ an des Kreises Umfang: so ist dieser Punkt m „des Kreises Mittelpunkt“.



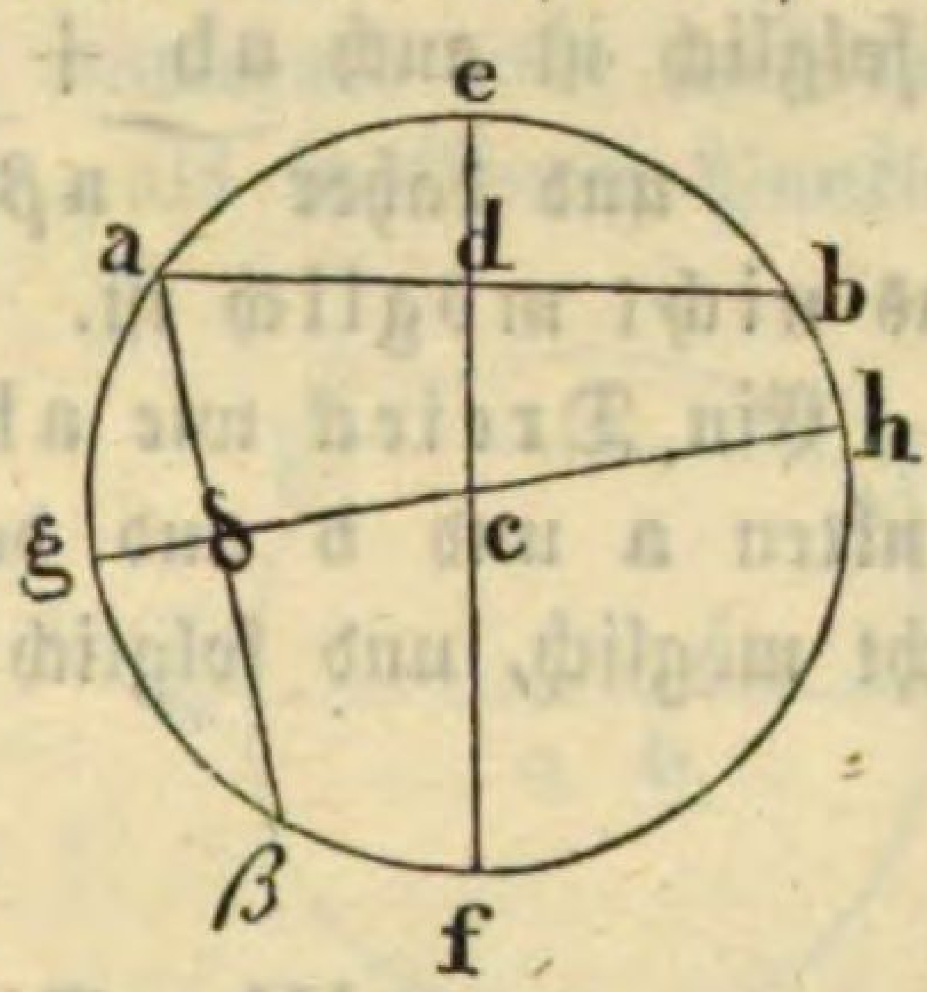
Beweis. Wäre m nicht der Mittelpunkt, so sey x dieser Mittelpunkt; man ziehe durch m und x den Durchmesser af, so könnte zwar seyn $mb = m\beta$; aber $mb < mc$ (7.), was der Voraussetzung $m\beta = mb = mc$ widerspricht. Demnach kann x nicht der

Mittelpunkt seyn, und aus eben diesem Grunde auch kein anderer Punkt außer m; folglich ist m der Mittelpunkt.

III. Satz 10. Lehrsatz.

Ein Kreis schneidet einen andern in nicht mehr als zwei Punkten.

Beweis. Gesetzt, der Kreis abβ würde von einem zweiten Kreise in den drei Punkten b, a und β geschnitten: so ziehe man die Sehnen ab und aβ, halbire dieselben in d und δ, errichte auf ab in d die Normale ef, und auf aβ in δ die Normale gh; so ist ab eine gemeinschaftliche Sehne beider Kreise, und es müssen daher beider Kreise Mittelpunkte in ef liegen (1.), und aus gleichen Gründen müssen die Mittelpunkte der beiden Kreise auch in gh liegen. Da nun ef und gh nur den Punkt c gemein haben, so würde c der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Kreise seyn, was nicht möglich ist (5.) Folglich kann der Kreis abβ nicht in drei Punkten von einem andern Kreise geschnitten werden, und noch weniger in mehr, als in drei Punkten.



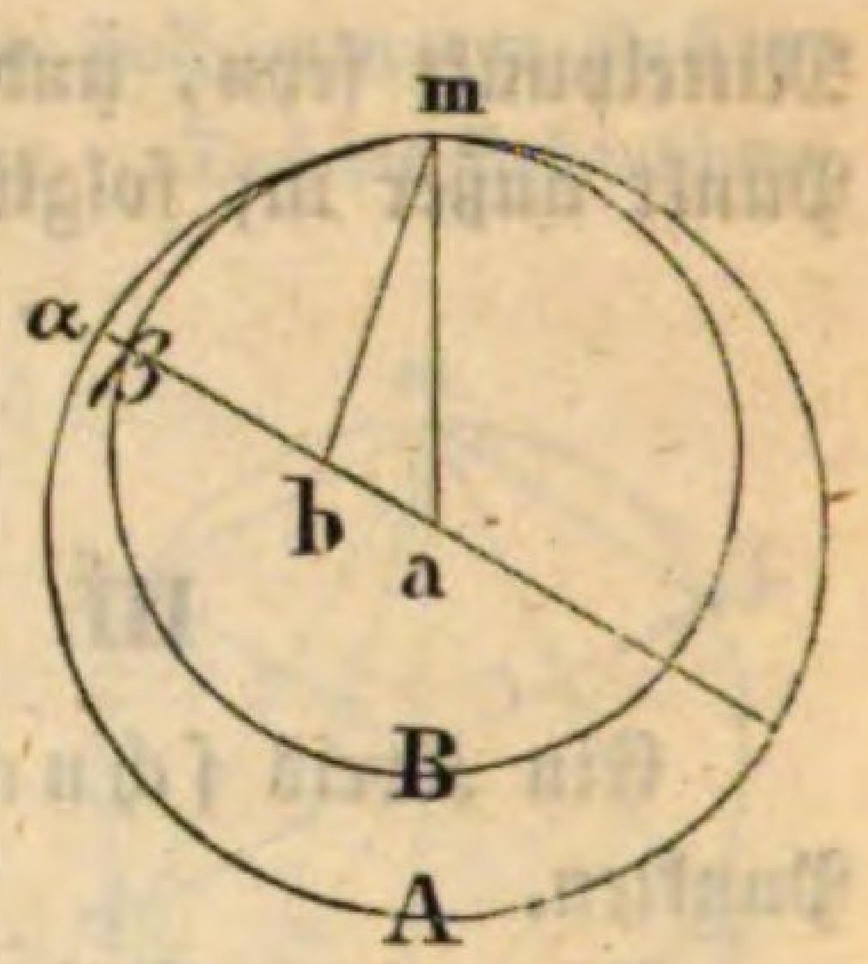
Zusatz. Wenn zwei Kreise sich schneiden, und man verbindet die beiden gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte durch eine Sehne, halbirt dieselbe und errichtet in dem Halbirungspunkte eine Normale: so liegen die Mittelpunkte beider Kreise in dieser Normale.

III. Satz 11. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise, von welchen der eine innerhalb des andern liegt, sich berühren: so trifft die gerade Linie, welche beider Kreise Mittelpunkte verbindet, genugsam verlängert, den Berührungspunkt m derselben.

Beweis. Wären a und b die Mittelpunkte der beiden Kreise A und B, und hätten dieselben eine solche Lage, daß die gerade Linie ab, welche die Mittelpunkte verbindet, verlängert den Berührungspunkt m nicht träfe: so könnte man von a und von b die

17 *



geraden Linien am und bm an den Berührungspunkt m ziehen, und es würde nun abm ein Dreieck seyn, und daher

ab + bm > am (I. 20.).

Und weil a der Mittelpunkt von A seyn soll, so ist

am = aα

also ist auch ab + bm > aα.

Aber b soll der Mittelpunkt von B seyn, und es ist daher

bm = bβ

folglich ist auch ab + bβ > aα

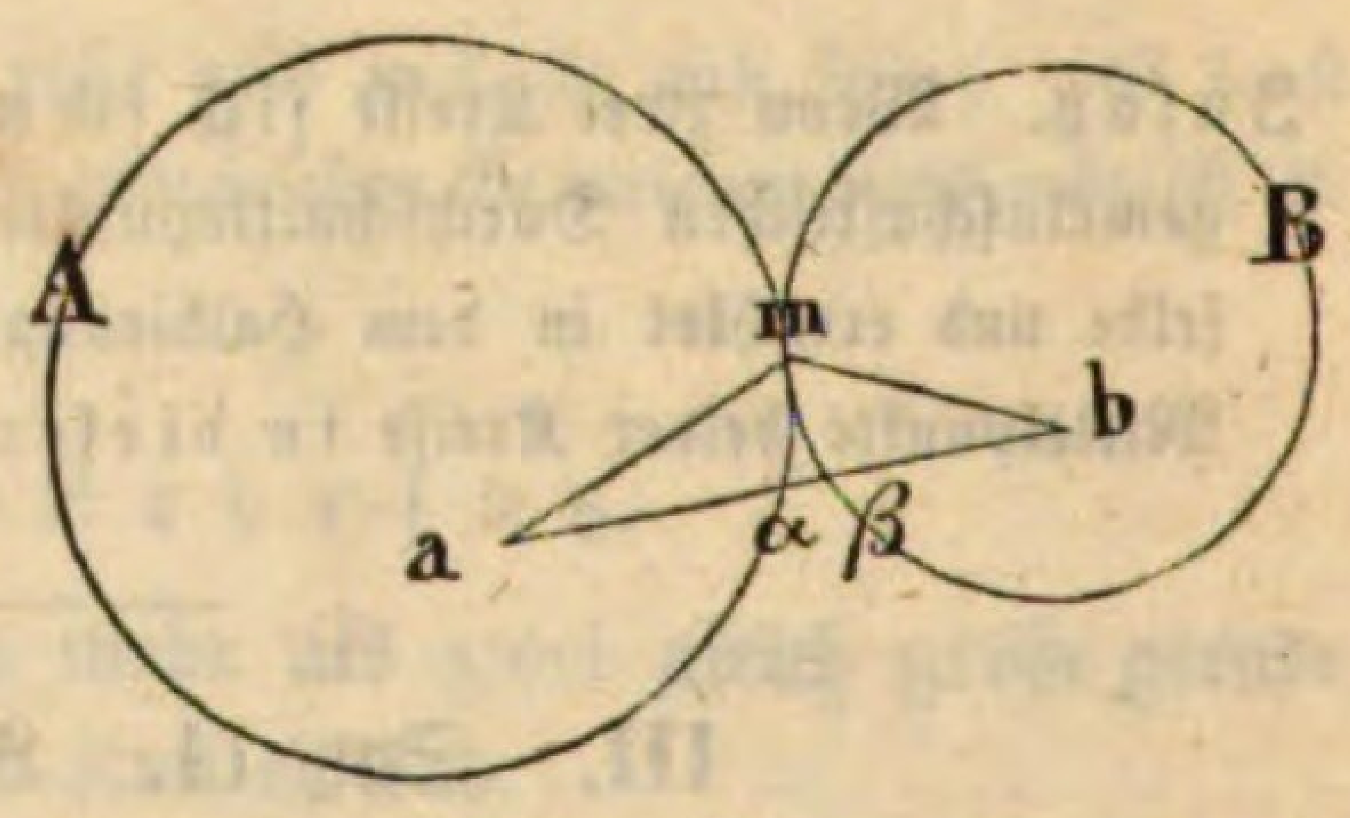
und daher aβ > aα

was nicht möglich ist.

Ein Dreieck wie abm, dessen Spitzen in den beiden Mittelpunkten a und b und dem Berührungspunkte m liegen, ist also nicht möglich, und folglich liegen diese drei Punkte in gerader Linie.

III. Satz 12. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise, die außerhalb einander liegen, in m sich berühren: so geht die gerade Linie, welche beider Kreise Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt m.



Beweis. Wären a und b die Mittelpunkte beider Kreise, und hätten dieselben eine solche Lage, daß die gerade Linie ab, welche a und b verbindet, den Berührungspunkt m nicht träfe: so könnte man a und b mit m durch am und bm verbinden, wodurch ein Dreieck abm erhalten würde, in welchem seyn müßte

am + bm > ab.

Und da am = aα, weil a der Mittelpunkt von A ist

und bm = bβ „ b „ „ „ B „

so müßte auch seyn aα + bβ > ab

und da ab = aα + αβ + bβ

aα + bβ > aα + αβ + bβ

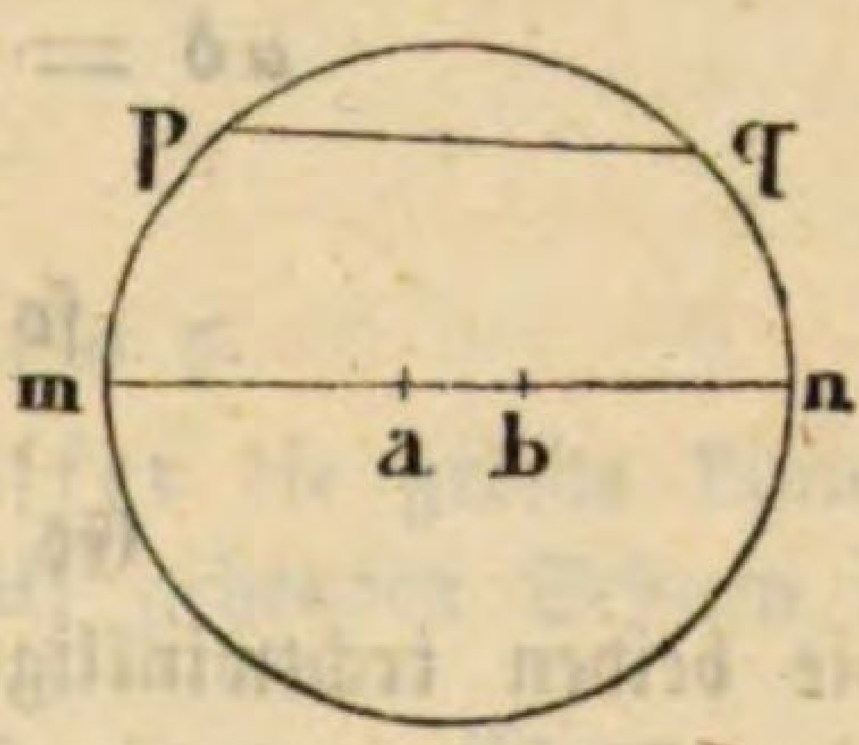
was nicht möglich ist. Also giebt es kein Dreieck, dessen Spitzen in den Mittelpunkten a und b beider Kreise und deren Berührungspunkt m liegen könnten. Folglich liegen a und b mit m in gerader Linie.

Zusatz. Wenn zwei Kreise sich berühren, es mag der eine Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegen: so liegen ihre Mittelpunkte immer mit dem Berührungspunkte derselben in gerader Linie.

III. Satz 13. Lehrsatz.

Zwei Kreise, von welchen der eine innerhalb oder außerhalb des andern liegt, berühren sich nicht mehr, als in Einem Punkte.

Beweis. Erster Theil. Wird ein Kreis A, dessen Mittelpunkt a seyn soll, von einem andern B, der innerhalb desselben liegt, und dessen Mittelpunkt b ist, berührt: so muß der Berührungspunkt in der verlängerten ab liegen (11.); und da die verlängerte ab den Kreis in m und n trifft, so müßten, wenn A von B in zwei Punkten berührt werden sollte, m und n diese Berührungspunkte seyn. Hiernach wäre



ma = an für den Kreis A

und daher mb > an

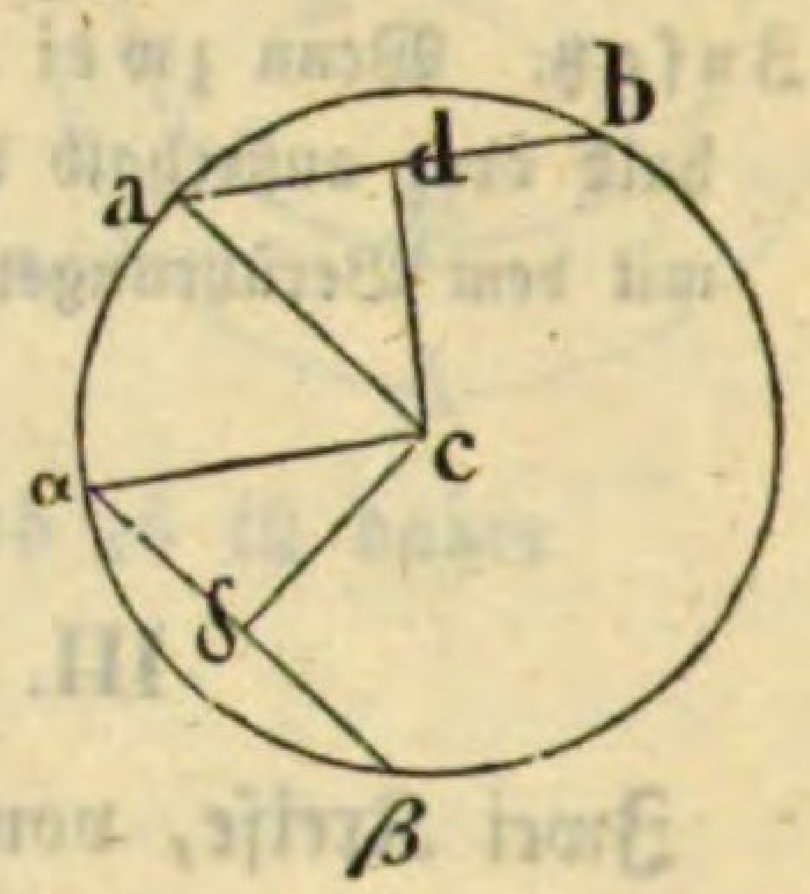
und um so mehr mb > bn.

Es müßte aber auch seyn mb = bn für den Kreis B, was nicht möglich ist; folglich können zwei Kreise, von welchen der eine innerhalb des andern liegt, sich nicht in zwei Punkten berühren, und noch weniger in mehr als zwei Punkten; sie berühren sich also in nicht mehr als in Einem Punkte.

Zweiter Theil. Berühren sich zwei Kreise, die außerhalb einander liegen, wenn es möglich ist, in zwei Punkten p und q, und man zieht die Sehne pq: so liegt Diese, weil p und q in dem Umfange des einen so wie des andern Kreises seyn soll, innerhalb beider Kreise (2.); folglich liegen die Kreise zum Theil in einander, was der Voraussetzung widerspricht. Es können also auch zwei außerhalb einander liegende Kreise in nicht mehr als einem einzigen Punkte sich berühren.

III. Satz 14. Lehrsatz.

In einem Kreise sind gleich große Sehnen gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt; und gleich weit von dem Mittelpunkte abstehende Sehnen sind gleich groß.



Beweis. Fälle auf die Sehnen ab und $\alpha\beta$ die Normalen cd und $c\delta$.

Erster Theil. Es ist $ab = \alpha\beta$; da cd und $c\delta$ normal auf ab und $\alpha\beta$ sind, so ist

$ad = db$ (3.) also $ab = 2\,(ad)$
$\alpha\delta = \delta\beta$ (3.) „ $\alpha\beta = 2\,(\alpha\delta)$
Da nun $ab = \alpha\beta$

so ist auch $2\,(ad) = 2\,(\alpha\delta)$
und folglich $ad = \alpha\delta$.
Es ist aber auch $ca = c\alpha$ (I. 15. E.)

die beiden rechtwinkligen Dreiecke adc und $\alpha\delta c$ haben also die eine Kathete und die Hypotenuse gleich,

und es ist daher $\Delta adc \cong \Delta \alpha\delta c$ (Aufg. 4. S. 107. u. f.).

Folglich ist auch $cd = c\delta$.

Gleiche Sehnen sind also gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt.

Zweiter Theil. Es ist $cd = c\delta$
da nun auch $ca = c\alpha$

und die Linien cd und $c\delta$ normal auf ab und $\alpha\beta$ sind: so haben die rechtwinkligen Dreiecke adc und $\alpha\delta c$ wieder die eine Kathete und die Hypotenuse gleich; und es ist daher

$\Delta adc \cong \Delta \alpha\delta c$
folglich ist $ad = \alpha\delta$
und daher auch $2\,(ad) = 2\,(\alpha\delta)$

und weil $2\,(ad) = ab$ und $2\,(\alpha\delta) = \alpha\beta$ (3.)
so ist $ab = \alpha\beta$.

Von dem Mittelpunkte des Kreises gleich weit entfernte Sehnen sind also gleich groß.

Anmerkung. „Daß zwei rechtwinklige Dreiecke acd und $\alpha c\delta$, welche die eine Kathete $ad = \alpha\delta$ und die Hypotenuse $ac = \alpha c$ gleich haben,

sich decken", folgt unmittelbar aus dem zweiten Falle bei Aufgabe 4., S. 108. Es läßt sich Dieses aber auch auf folgende Art beweisen. Es ist

in dem rechtwinkligen $\triangle adc$, $(ac)^2 = (ad)^2 + (cd)^2$
" " " $\triangle \alpha\delta c$, $(\alpha c)^2 = (\alpha\delta)^2 + (c\delta)^2$

Da nun $ac = \alpha c$ und daher auch $(ac)^2 = (\alpha c)^2$
so ist $(ad)^2 + (cd)^2 = (\alpha\delta)^2 + (c\delta)^2$
und da seyn soll $ad = \alpha\delta$ und daher $(ad)^2 = \alpha\delta)^2$

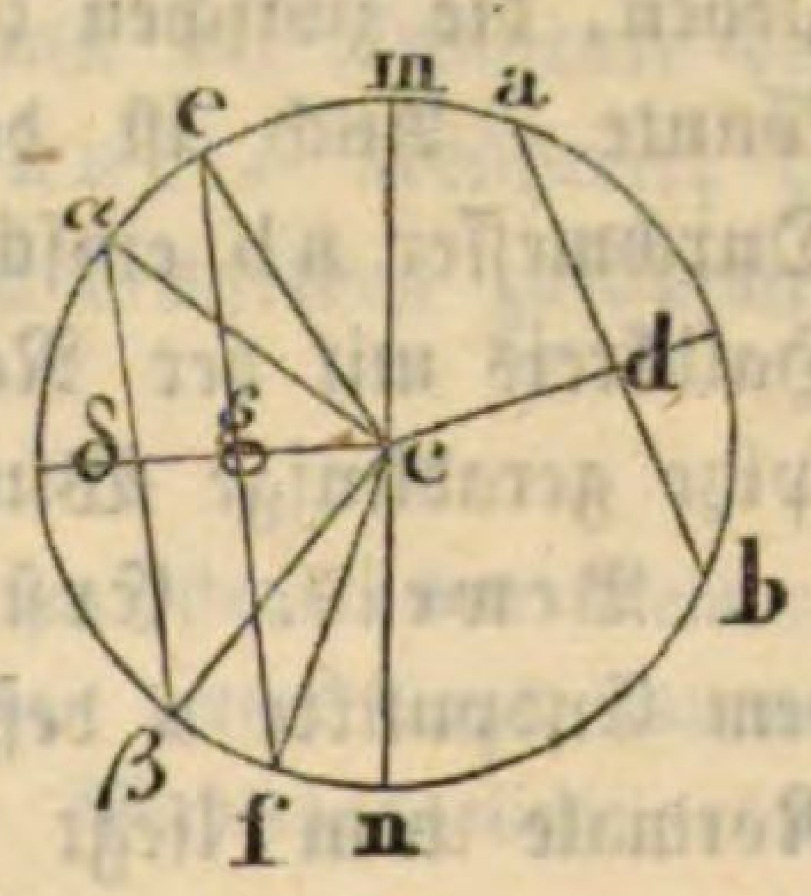
so folgt $(cd)^2 = (c\delta)^2$
und folglich ist $cd = c\delta$.

Aus der Voraussetzung $ac = \alpha c$
$ad = \alpha\delta$
und $\angle cda = \angle c\delta\alpha = R$

folgt also $cd = c\delta$
und daher $\triangle acd \cong \triangle (\alpha c\delta)$ (I. 4.)

III. Satz 15. Lehrsatz.

In einem Kreise ist der Durchmesser die größte Linie; und von allen, nicht durch den Mittelpunkt gehenden Sehnen ist immer die dem Mittelpunkt näher liegende größer, als die entferntere.



Beweis. Ist mn ein Durchmesser, geht diese Linie also durch den Mittelpunkt c, die Sehne ef aber nicht durch Denselben: so kann man den Mittelpunkt c mit e und f durch ce und cf verbinden, und es ist nun

$ce + cf > ef$ (I. 20.).

Da nun $ce = cm$ und $cf = cn$ (I. 15. E.)

so ist auch $cm + cn > ef$
also $mn > ef$.

Der Durchmesser ist also größer, als eine Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt geht.

Auf die Sehnen ef und ab fälle die Normalen cg und cd, von welchen $cg < cd$ seyn soll. Verlängere cg, nimm $c\delta = cd$, und ziehe durch δ die $\alpha\beta$ parallel ef: so ist

$\angle c\delta\beta = \angle cgf = R$ (I. 29.)
da nun $c\delta = cd$

so ist $\alpha\beta = ab$ (14.).

Man ziehe $c\alpha$, $c\beta$, so sind in den Dreiecken ecf und $\alpha c\beta$

$$ce = c\alpha$$
$$\text{und } cf = c\beta$$
$$\text{aber } \angle ecf > \angle \alpha c\beta$$
$$\text{und daher } ef > \alpha\beta \text{ (I. 24.).}$$
$$\text{Da nun } \alpha\beta = ab$$
$$\text{so ist auch } ef > ab$$

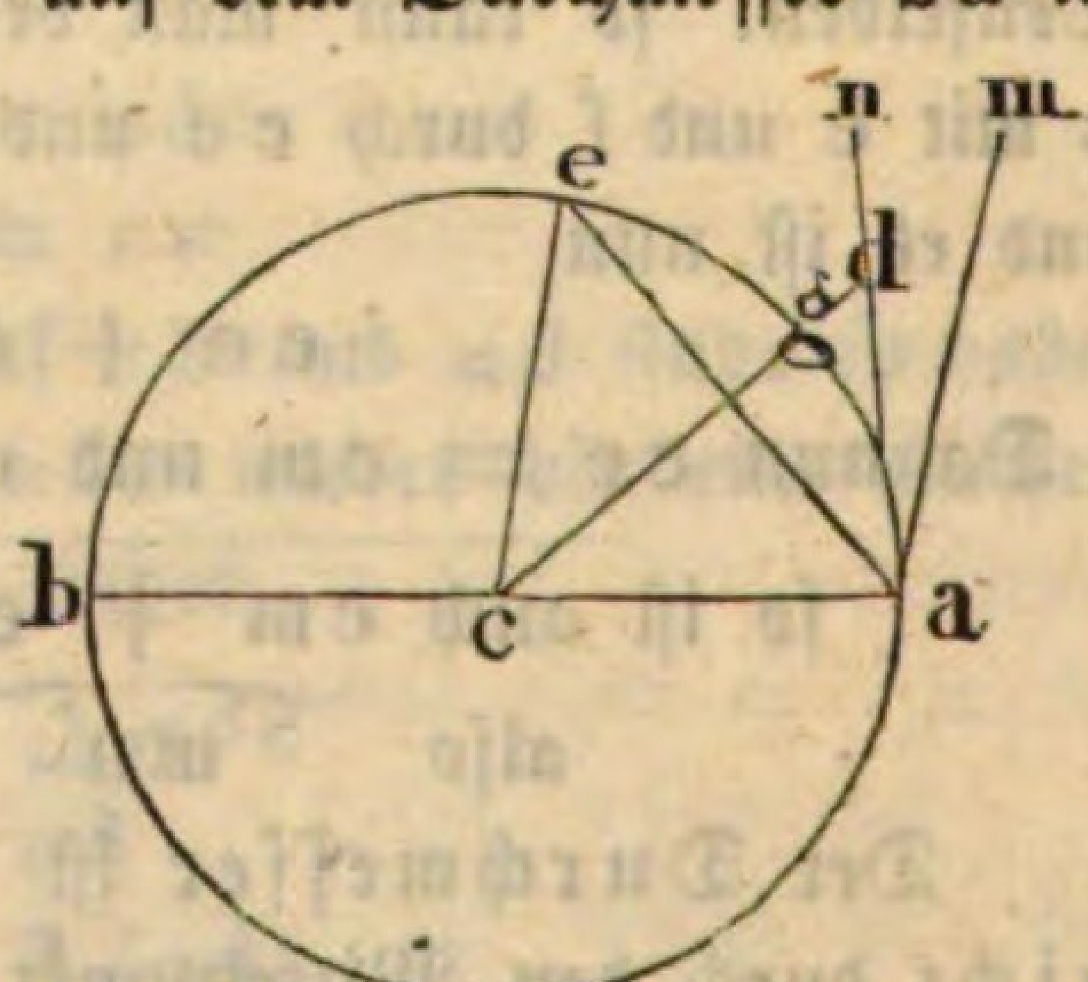
und weil $cg < cd$, so liegt ef dem Mittelpunkte näher als ab (5. E.).

Die dem Mittelpunkte näher liegende Sehne ef ist also größer, als die entferntere liegende ab.

III. Satz 16. Lehrsatz.

Die auf eines Kreises Durchmesser ab in dem Endpunkte a desselben errichtete Normale am liegt außerhalb des Kreises; und es ist nicht möglich, von dem Punkte a aus eine gerade Linie zu ziehen, die zwischen der Normale am und dem Kreisumfange liegen könnte. Auch ist der Winkel, den der Halbkreis mit seinem Durchmesser ab einschließt, größer, und der Winkel, welchen der Halbkreis mit der Normale am einschließt, kleiner, als jeder spitze geradlinige Winkel.

Beweis. Erster Theil. Die auf dem Durchmesser ba in dem Endpunkte a desselben errichtete Normale am liegt außerhalb des Kreises. Nimmt man an, „sie liege, wie ae, innerhalb des Kreises, so daß nur $\angle cae = R''$, so ziehe man ce; und es muß alsdann, in Δace, da $ca = ce$, auch $\angle e = \angle cae = R$ seyn (I. 5.), und also $\angle cae + \angle e = 2R$, was nicht möglich ist (I 17.).



Also kann die Normale am nicht innerhalb des Kreises fallen, und aus gleichen Gründen auch nicht auf den Umkreis; folglich fällt sie außerhalb des Kreises.

Zweiter Theil. Zwischen der Normale am und dem Kreisbogen ae kann keine durch a gehende gerade Linie liegen.

Wäre es möglich, so sey an diese Linie. Da nun $\angle$ cam = R, so ist can $<$ R, und man kann also von c aus auf an eine Normale cd fällen; hiernach ist in Δ cad

$$\angle cad < cda$$

folglich auch $cd < ca$ (I. 19.)

und da $ca = cg$

$$cd < cg$$

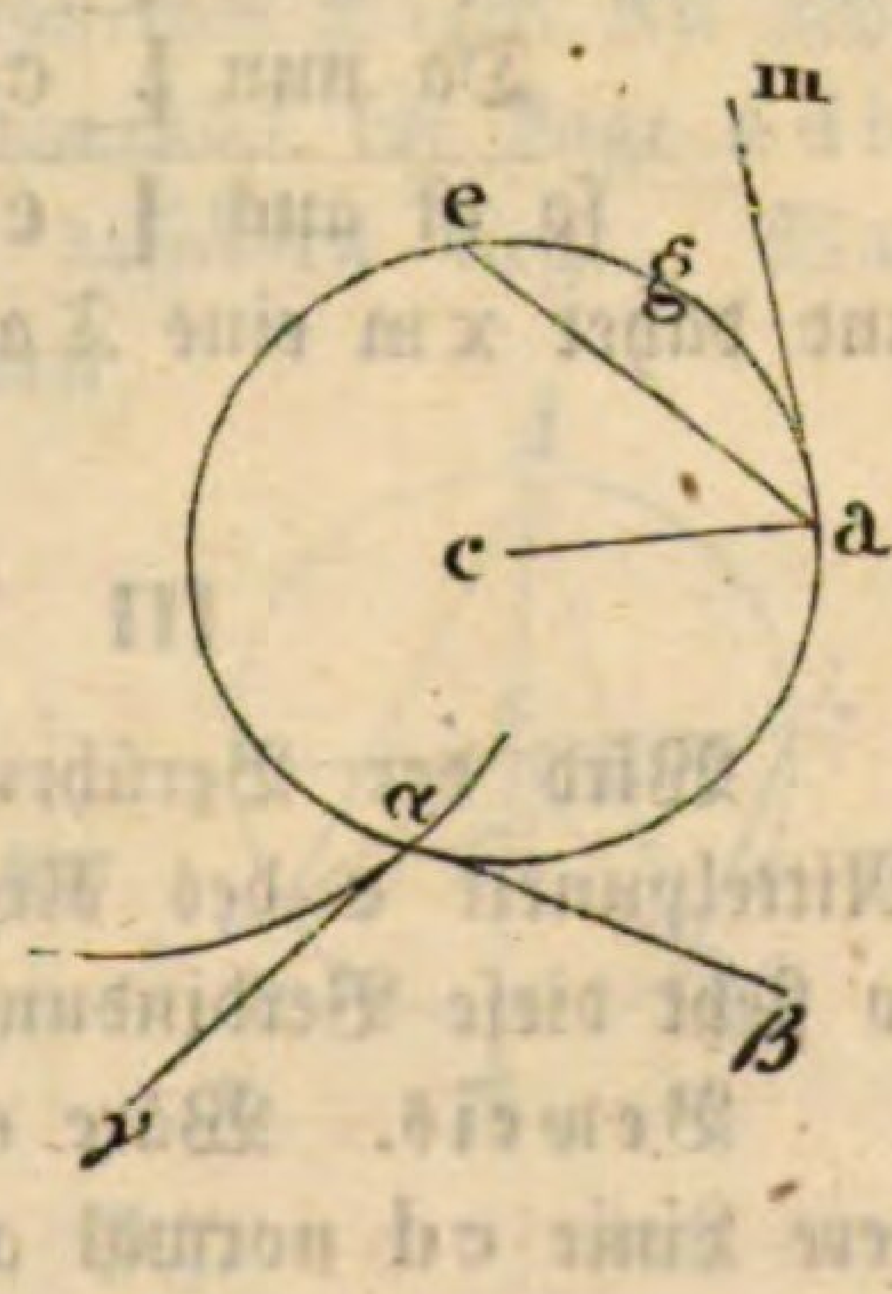
was nicht möglich ist; also ist eine gerade Linie an zwischen am und dem Kreisbogen nicht möglich.

Dritter Theil. Es giebt keinen spitzen geradlinigen Winkel, der größer wäre, als der von ba, und dem Bogen age eingeschlossenen; oder kleiner, als der Winkel, welchen ma und der Bogen age einschließen. Denn wäre ein solcher Winkel möglich, so müßte eine gerade Linie, wie an, zwischen dem Umkreise und der Normale am liegen; was nach dem im zweiten Theile Erwiesenen unmöglich ist.

Zusatz. Hieraus geht hervor: daß eine auf einem Radius in dem Endpunkte desselben errichtete Normale den Kreis berührt, also „eine Tangente des Kreises" ist. Es kann die Tangente den Kreis aber auch nur in einem einzigen Punkte berühren; da jede gerade Linie, welche in zwei Punkten mit demselben zusammen trifft, innerhalb des Kreises liegt (2.).

Anmerkungen. 1) Soll man an einem gegebenen Punkte des Kreisumfanges eine Tangente ziehen: so braucht man diesen Punkt nur mit dem Mittelpunkte zu verbinden, und auf diese Verbindungslinie eine Normale in dem gegebenen Punkte zu errichten.

2) Da der Winkel, welchen die Tangente am mit dem Kreisbogen age bildet, kleiner als jeder angebbare spitze Winkel ist, so muß dieser Winkel gleich Null seyn. Daher ist



3) der Winkel, welchen eine Sehne ae und der dazu gehörige Kreisbogen age einschließen, nicht verschieden von dem Winkel, welchen die Sehne ae mit der Tangente am an dem Punkte a des Kreises bildet.

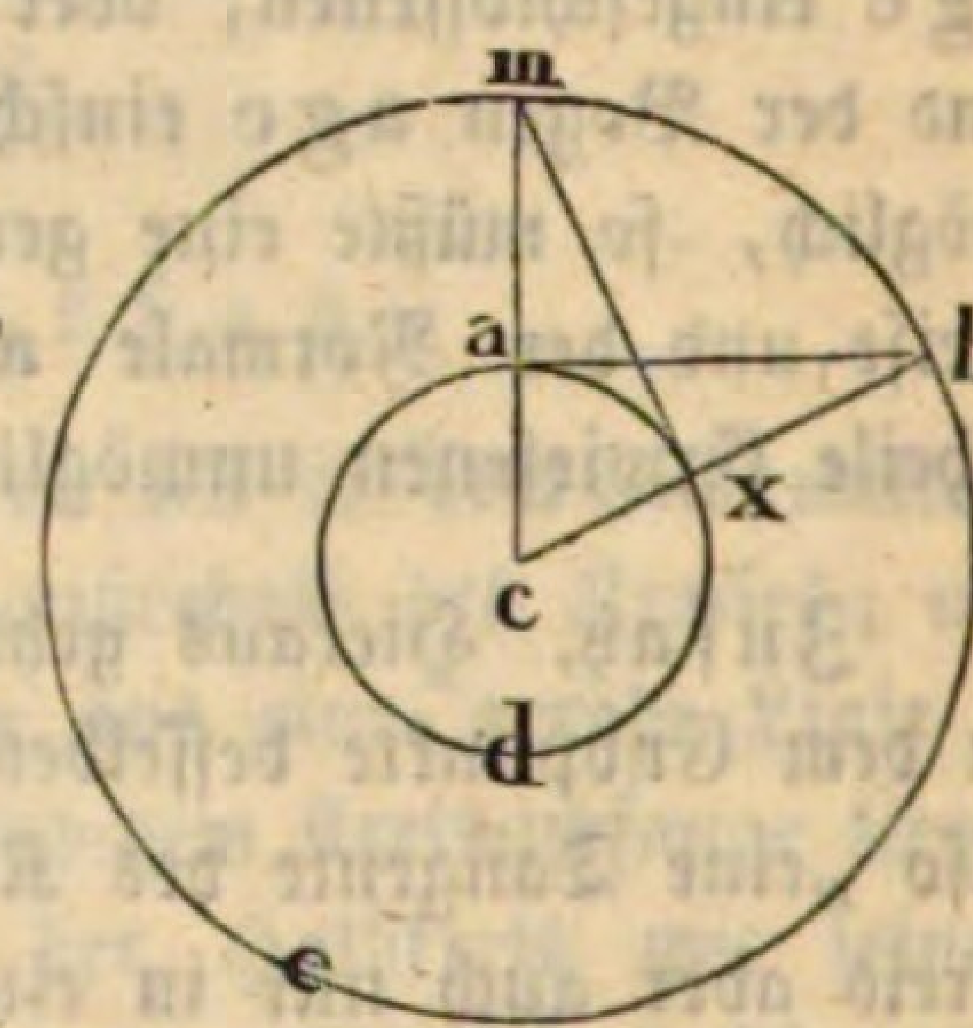
4) Da $\angle$ cam = R, so ist auch $\angle$ cage = R; der Radius steht also normal auf dem Kreisumfange.

5) Schneiden zwei Kreise sich in dem Punkte α: so wird der Winkel, in welchem sie sich schneiden, durch den geradlinigen Winkel gemessen, den die Tangenten $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ einschließen, die in α an beide Kreise gezogen werden können.

6) Jeder, von einer geraden Linie und einem Kreisbogen, oder von zwei Kreisbogen gebildete Winkel läßt sich also immer auf einen, von geraden Linien eingeschlossenen Winkel zurückführen.

III. Satz 17. Aufgabe.

Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte m soll man eine Tangente an den Kreis ziehen.



Auflösung. Nimm den Mittelpunkt c des gegebenen Kreises axd; verbinde denselben mit dem gegebenen Punkte m durch cm; beschreibe aus c mit cm den Kreis mbe; auf cm errichte in dem Punkte a, wo die cm den gegebenen Kreis schneidet, die Normale ab, und ziehe bc, welche den gegebenen Kreis in x schneidet. Wird nun mx gezogen, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

Beweis. In den beiden Dreiecken cab und cxm ist

ca = cx (I. 15. E.)
cb = cm
und $\llcorner$ c = $\llcorner$ c

daher Δcab $\cong$ Δcxm (I. 4.)
und also auch $\llcorner$ cab = $\llcorner$ cxm.
Da nun $\llcorner$ cab = R (p. c.)

so ist auch $\llcorner$ cxm = R
und daher xm eine Tangente des Kreises axd (16.).

III. Satz 18. Lehrsatz.

Wird der Berührungspunkt a einer Tangente am mit dem Mittelpunkte c des Kreises durch die gerade Linie ac verbunden: so steht diese Verbindungslinie auf der Tangente normal.

Beweis. Wäre ca nicht normal auf am, so sey eine andere Linie cd normal auf derselben, und daher

$\angle cda = R$

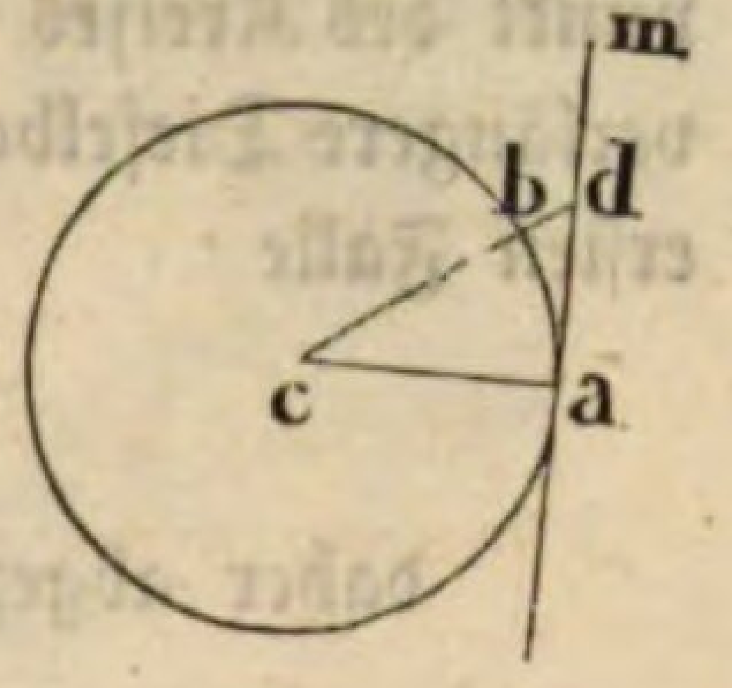
Alsdann ist $\angle cad < R$ (I. 17.)

also $\angle cda > \angle cad$

und folglich $ca > cd$ (I. 19.).

Da nun $ca = cb$

so ist auch $cb > cd$



was unmöglich ist. Demnach kann cd nicht normal auf am seyn, und aus gleichen Gründen auch keine andere Linie außer ca; folglich ist ca normal auf am.

III. Satz 19. Lehrsatz.

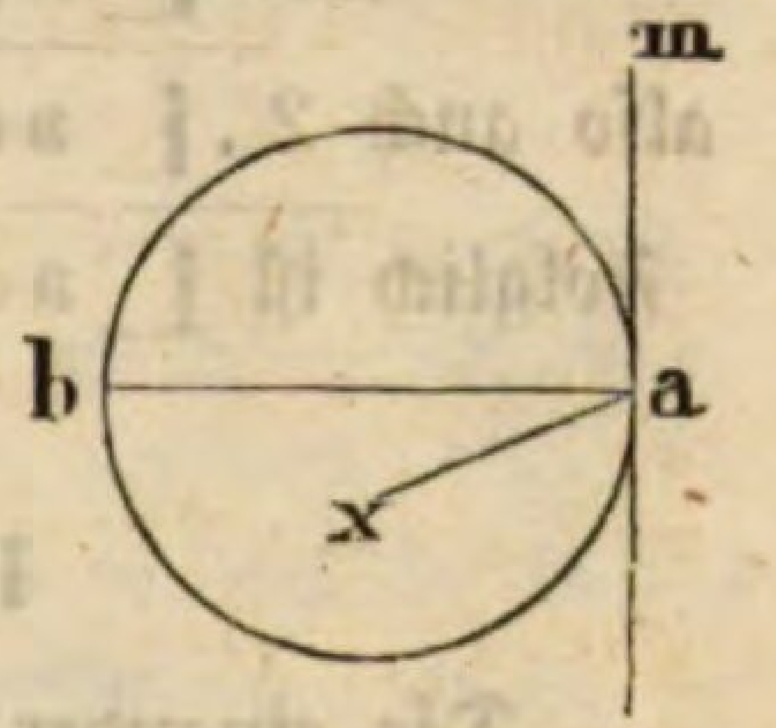
Errichtet man auf einer Tangente am in ihrem Berührungspunkte a eine Normale ab, so liegt in dieser des Kreises Mittelpunkt.

Beweis. Läge der Mittelpunkt des Kreises nicht in ab, so sey er außerhalb dieser Linie in x. Man ziehe xa, so ist

$\angle xam = R$ (18.)

aber auch $\angle bam = R$ (p. h.)

also $\angle xam = \angle bam$



was unmöglich ist. Demnach kann x nicht des Kreises Mittelpunkt seyn, und aus gleichen Gründen auch kein anderer Punkt, der außerhalb der ab liegt. Folglich liegt der Mittelpunkt des Kreises in der Normale ab.

III. Satz 20. Lehrsatz.

In jedem Kreise ist der Centriwinkel acb zwei Mal so groß, als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf demselben Bogen ab steht.

Beweis. Es habe 1) der Peripheriewinkel die Lage adb, so daß des Kreises Mittelpunkt innerhalb desselben liegt. Man ziehe dc, und verlängere dieselbe, bis sie den Kreis in e trifft: so ist,

da $ca = cd$

auch $\angle ade = \angle dac$ (I. 5.).

Da nun $\angle ace = \angle ade + \angle dac$

so ist auch $\angle ace = 2 . \angle ade$.

Eben so ist $\angle bce = 2 . \angle bde$

und daher addirt $\angle acb = 2 . \angle adb$ (2. G.).

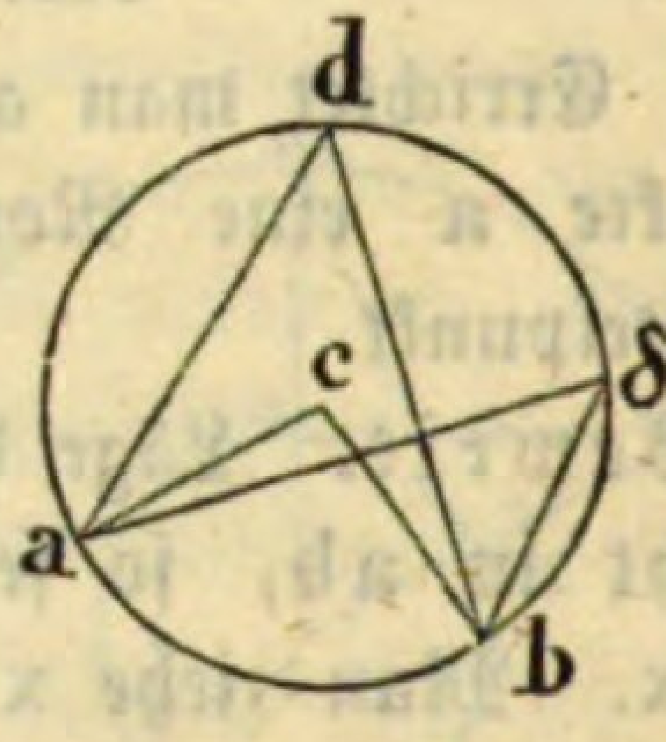


2) Der Peripheriewinkel habe die Lage $a\delta b$, so daß der Mittelpunkt des Kreises außerhalb desselben liegt. Man ziehe δc, und verlängere dieselbe, bis sie den Kreis in ε trifft: so ist, wie in dem ersten Falle

$$\angle \varepsilon c b = 2 \,.\, \angle \varepsilon \delta b$$
$$\text{und } \angle \varepsilon c \alpha = 2 \,.\, \angle \varepsilon \delta a$$
$$\text{daher abgezogen } \angle a c b = 2 \,.\, a \delta b.$$

III. Satz 21. Lehrsatz.

Peripheriewinkel adb und $a\delta b$, die auf demselben Kreisbogen ab stehen, sind einander gleich.

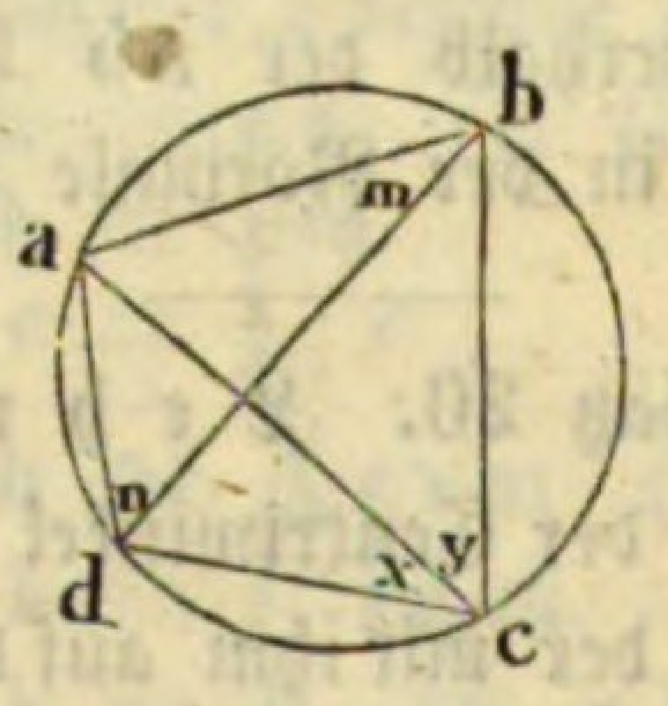


Beweis. Es ist

$$\angle acb = 2 \,.\, \angle adb \quad (20.)$$
$$\text{und } \angle acb = 2 \,.\, \angle a\delta b \quad ,,$$
$$\text{also auch } 2 \,.\, \angle adb = 2 \,.\, \angle a\delta b.$$
$$\text{Folglich ist } \angle adb = \angle a\delta b. \quad (7.\ \text{G.})$$

III. Satz 22. Lehrsatz.

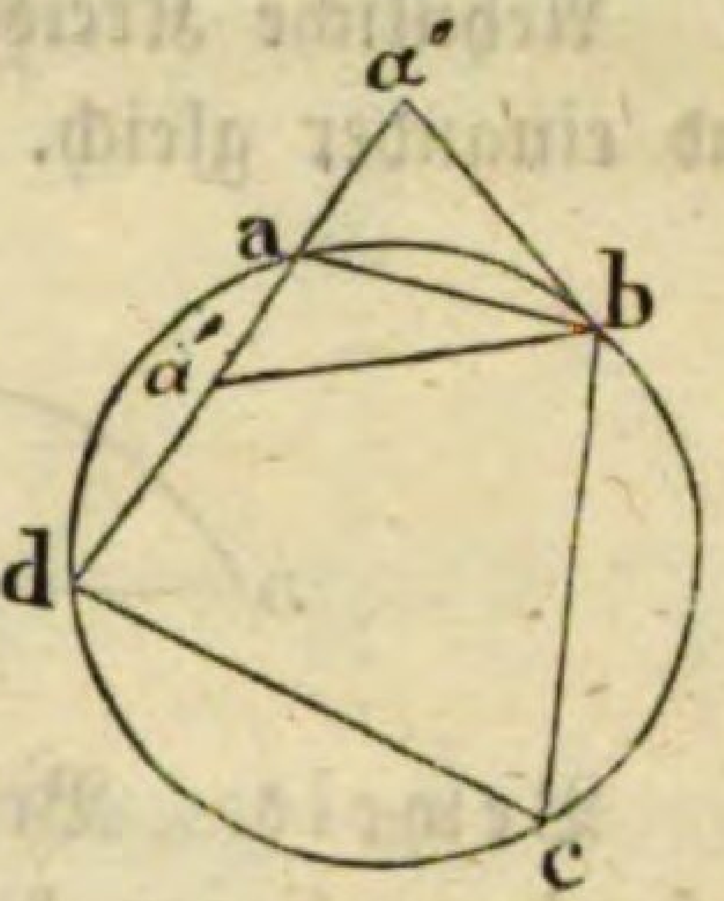
Die einander gegenüber liegenden Winkel eines Vierecks $abcd$ im Kreise, sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.



Beweis. Ziehe die Diagonalen ac und bd

$$\text{so ist } \angle x = \angle m \quad (21.)$$
$$\text{und } \angle y = \angle n$$
$$\text{also } x + y = \angle m + \angle n$$
$$\text{oder } \angle bcd = \angle m + \angle n$$
$$\text{und } \angle bad = \angle bad$$
$$\text{daher } \angle bad + \angle bcd = \angle m + \angle n + \angle bad$$
$$\text{und da } \angle m + \angle n + \angle bad = 2\,R \quad (I.\ 32.)$$
$$\text{so ist auch } \angle bad + \angle bcd = 2\,R.$$

Zusatz. Dieser Satz gilt auch umgekehrt: Liegen von einem Viereck abcd drei Ecken in dem Umfange eines Kreises, und sind zwei einander gegenüber liegende Winkel dieses Vierecks zusammen $= 2$ **R**: so muß die 4te Ecke ebenfalls in dem Umfange dieses Kreises liegen.



Beweis. Liegt die 4te Ecke nicht in des Kreises Umfang: so liegt sie entweder innerhalb des Kreises in α', oder außerhalb desselben in α''. Man verbinde den Punkt a, wo die $d\alpha'$ oder $d\alpha''$ den Kreis schneidet, mit b, so ist

$$\angle dab + \angle c = 2\,R \quad (22.)$$

und $\angle d\alpha'b + \angle c = 2\,R$ (p. h.)

also $\angle dab = \angle d\alpha'b$

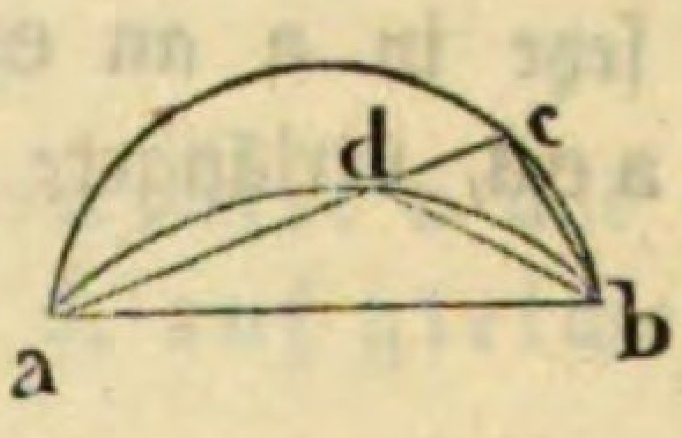
was nicht seyn kann.

Die 4te Ecke kann also nicht innerhalb des Kreises liegen, und es kann dieselbe aus gleichen Gründen auch nicht außerhalb des Kreises liegen.

Anmerkung. Peripheriewinkel adb und aδb (Fig. Satz 21.), die auf demselben Bogen ab stehen, sind zugleich Winkel in demselben Abschnitte (8. E.) adδb; und es sind daher auch Winkel in demselben Abschnitte gleich groß. Ist also ein Kreisabschnitt gegeben, so ist auch der Winkel in diesem Abschnitte gegeben; sind also zwei Kreisabschnitte gegeben, so ist durch die Winkel unmittelbar bestimmt, „ob die Abschnitte ähnlich sind (11. E.) oder nicht".

III. Satz 23. Lehrsatz.

Auf derselben geraden Linie ab können nicht zwei ähnliche und dabei ungleiche Kreisabschnitte an einerlei Seite liegen.



Beweis. Wäre Dieses möglich, so mögen die Kreisabschnitte acb und adb ungleich und ähnlich seyn. An einen beliebigen Punkt d des einen Bogens ziehe ad und bd, verlängere ad, bis sie den anderen Bogen in c trifft, und ziehe cb. Da nun die Abschnitte ähnlich seyn sollen, so ist

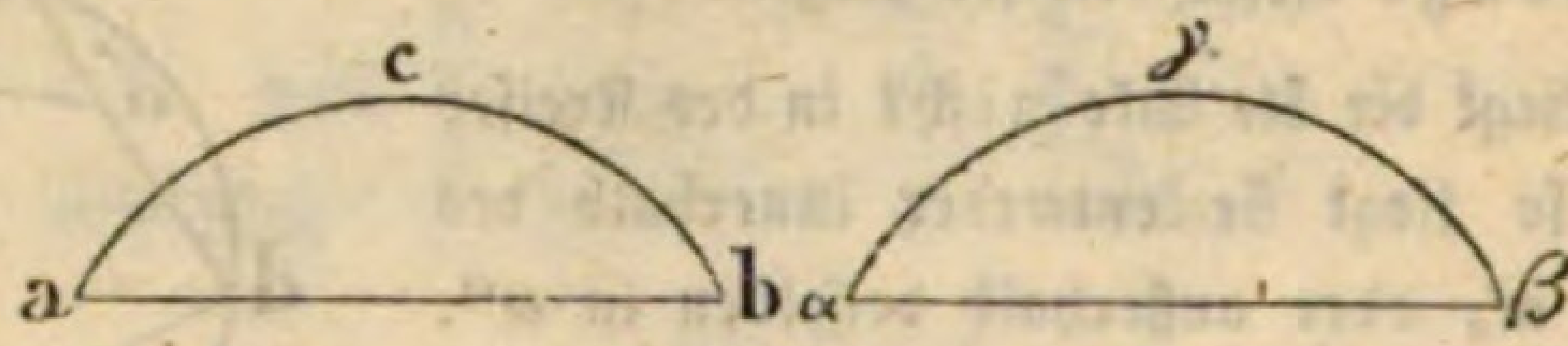
$$\angle adb = \angle acb \quad (11.\ E.)$$

während doch $\angle adb > \angle acb$. (I. 16.)

Sind also die Abschnitte ungleich, so können sie nicht ähnlich seyn.

III. Satz 24. Lehrsatz.

Aehnliche Kreisabschnitte auf gleichen Sehnen ab und $\alpha\beta$ sind einander gleich.

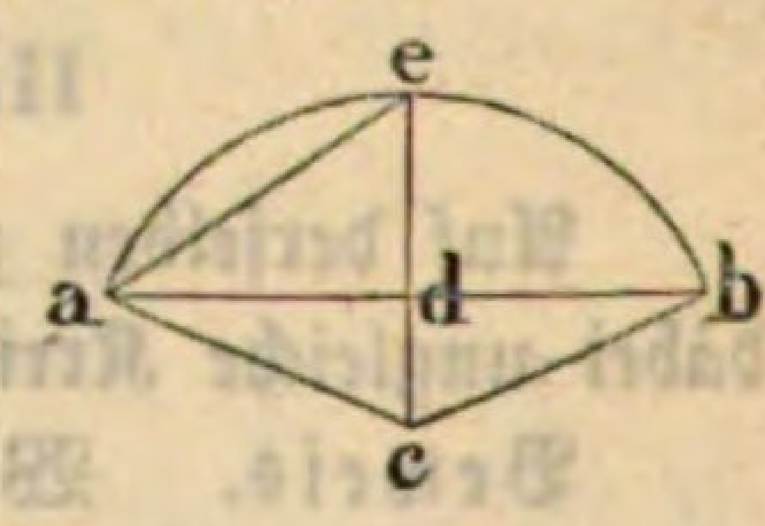


Beweis. Bringe $\alpha\gamma\beta$ auf acb, so daß α auf a und $\alpha\beta$ auf ab zu liegen kömmt: so fällt β mit b zusammen, weil $\alpha\beta =$ ab seyn soll. Fiele nun der Bogen $\alpha\gamma\beta$ nicht mit acb zusammen, so müßte entweder der eine innerhalb des andern liegen, oder sie müßten sich noch in einem dritten Punkte schneiden. Das Erstere ist nicht möglich (23.), und das Andere ebenfalls nicht (10.). Demnach müssen die Kreisbogen acb und $\alpha\gamma\beta$ zusammenfallen, und also sich decken. Folglich sind die ähnlichen Kreisbogen auf gleichen Sehnen einander gleich.

III. Satz 25. Aufgabe.

Den Kreis, von welchem ein Abschnitt aeb gegeben ist, zu vollenden.

Auflösung. Halbire die Sehne ab in d, errichte in diesem Punkte auf derselben die Normale de und ziehe ea: so ist $\angle$ aed entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als $\angle$ ead.



Erster Fall. Ist $\angle$ aed $>$ $\angle$ ead, so setze in a an ea den Winkel eac $=$ $\angle$ aed, verlängere ed bis c: so ist c des Kreises Mittelpunkt.

Da $\angle$ eac $=$ $\angle$ aec (p. c.)

so ist ec $=$ ca.

Da da $=$ db (p. c.)

$\angle$ cda $=$ $\angle$ cdb „

cd $=$ cd

so ist Δcda $\cong$ Δcdb also auch ca $=$ cb.

Folglich ist ce $=$ ca $=$ cb,

und daher c des Kreises Mittelpunkt. (9.)

In diesem Falle ist der Kreisabschnitt **aeb** **kleiner**, als der Halbkreis; denn es liegt **c** außerhalb des Abschnitts.

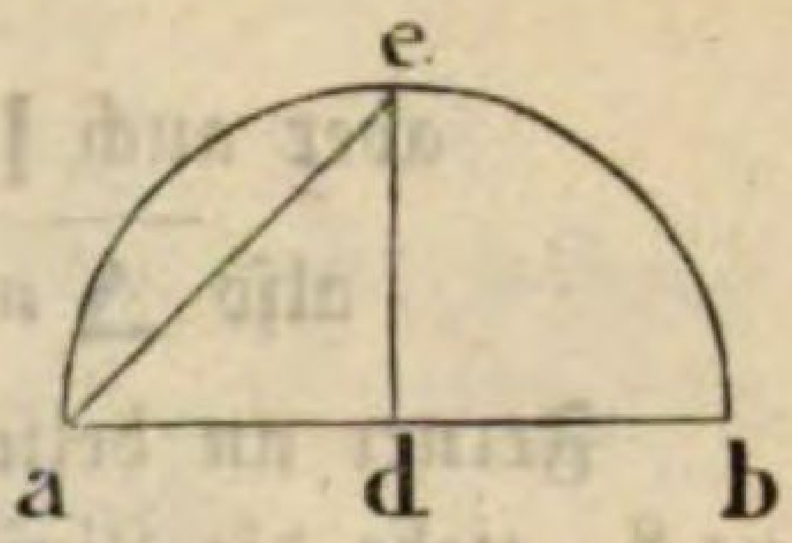
Zweiter Fall.

Ist $\llcorner aed = \llcorner ead$

so ist $da = de$ (I. 6.)

und $da = db$ (p. c)

also $da = de = db$

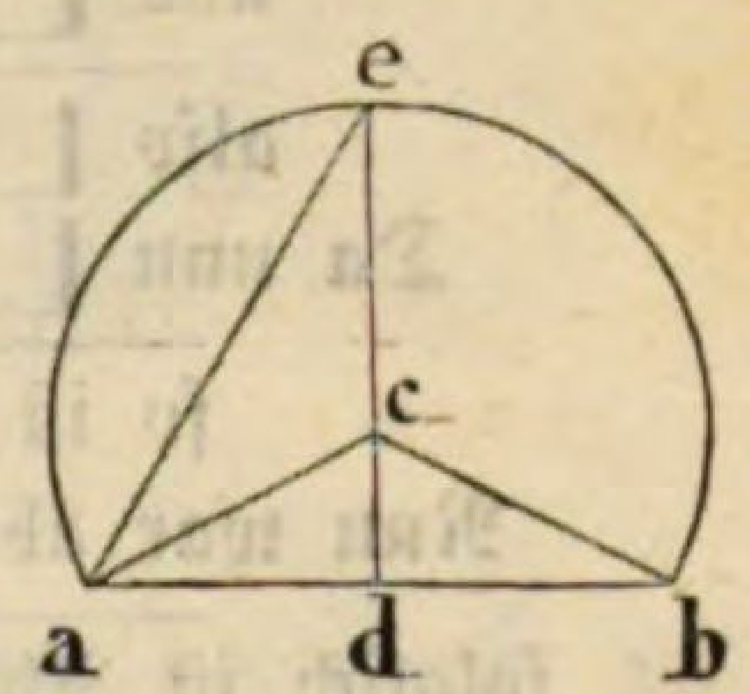


und daher **d** des Kreises Mittelpunkt.

In diesem Falle geht **ab** durch den Mittelpunkt, und es ist daher **aeb** ein Halbkreis.

Dritter Fall. Ist $\llcorner aed < \llcorner ead$, so setze in **a** an **ea** den Winkel $eac = \llcorner aed$ und ziehe **cb**. Hier wird nun, wie bei dem ersten Falle bewiesen, „daß

$ce = ca = cb$“



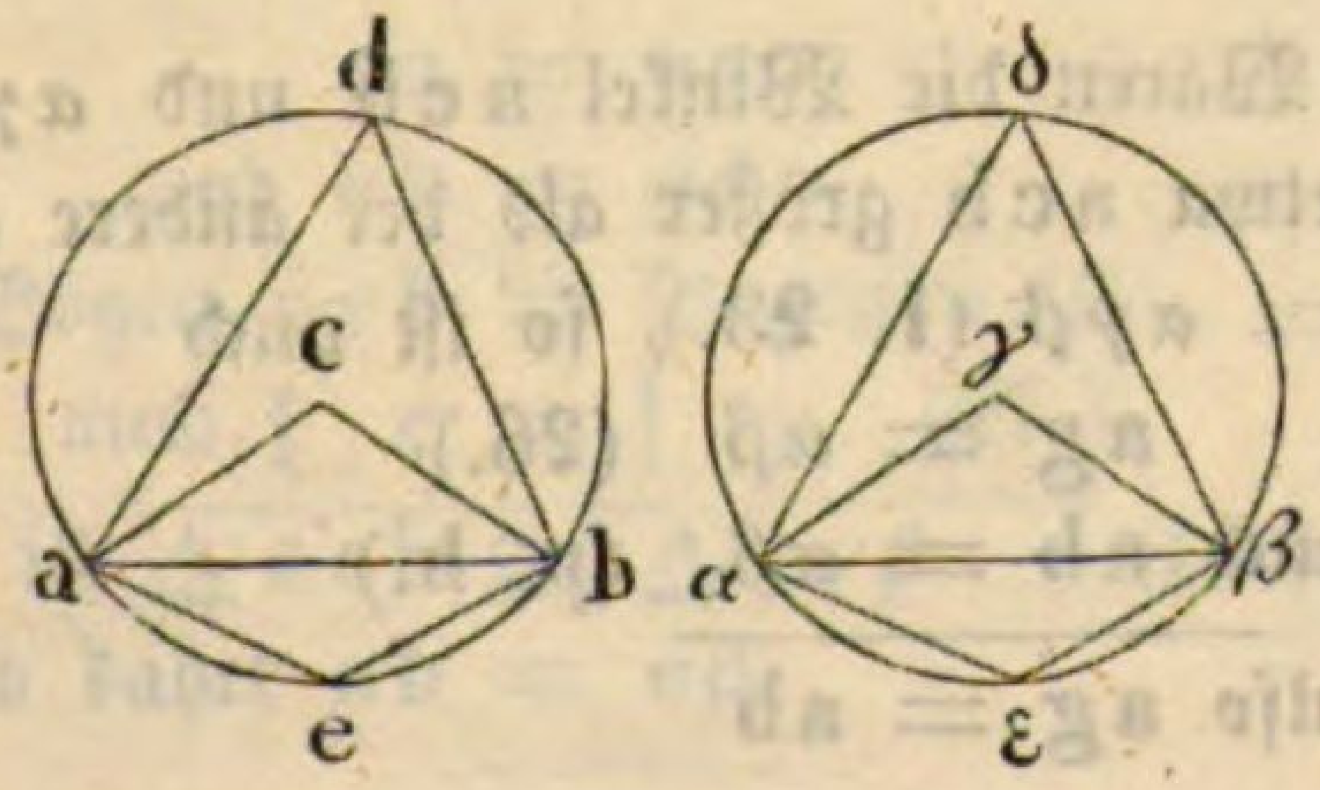
und es ist daher **c** des Kreises Mittelpunkt (9.)

In diesem Falle fällt der Mittelpunkt **innerhalb** des Kreisabschnitts, der daher größer, als der Halbkreis ist.

Anmerkung. Kömmt es bloß darauf an, „einen Kreis zu vollenden, von welchem ein Abschnitt gegeben ist“: so kann Dieses einfacher dadurch geschehen, daß man zwei Sehnen zieht und dieselben normal halbirt. Die Halbirungslinien **schneiden** sich jedenfalls in des Kreises Mittelpunkte. Durch die in Satz 25. gegebene Auflösung aber wird zugleich bestimmt, „wie sich erkennen läßt, ob der gegebene Abschnitt kleiner oder größer ist als ein Halbkreis, oder ob er demselben gleich ist“.

III. Satz 26. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen stehen **gleiche Centriwinkel** **c** und γ sowohl, als **gleiche Peripheriewinkel** **d** und δ, **auf gleichen Bogen** **aeb** und $\alpha\varepsilon\beta$.



Beweis. Man ziehe die Sehnen ab und $\alpha\beta$.

Da die Kreise gleich sind (p. h.)

so ist $ca = \gamma\alpha$

$cb = \gamma\beta$

aber auch $\angle c = \angle \gamma$ (p. h.)

also $\Delta acb \cong \Delta \alpha\gamma\beta$. Folglich ist $ab = \alpha\beta$.

Ferner an beliebigen Punkten e und ε, der Bogen aeb und $\alpha\varepsilon\beta$, ziehe die Linien ae, eb, $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\beta$: so ist in den Vierecken adbe und $\alpha\delta\beta\varepsilon$

$$\angle d + \angle e = 2R \quad (22.)$$

und $\angle \delta + \angle \varepsilon = 2R$ „

also $\angle d + \angle e = \angle \delta + \angle \varepsilon$

Da nun $\angle d = \angle \delta$ (p. h.)

so ist auch $\angle e = \angle \varepsilon$.

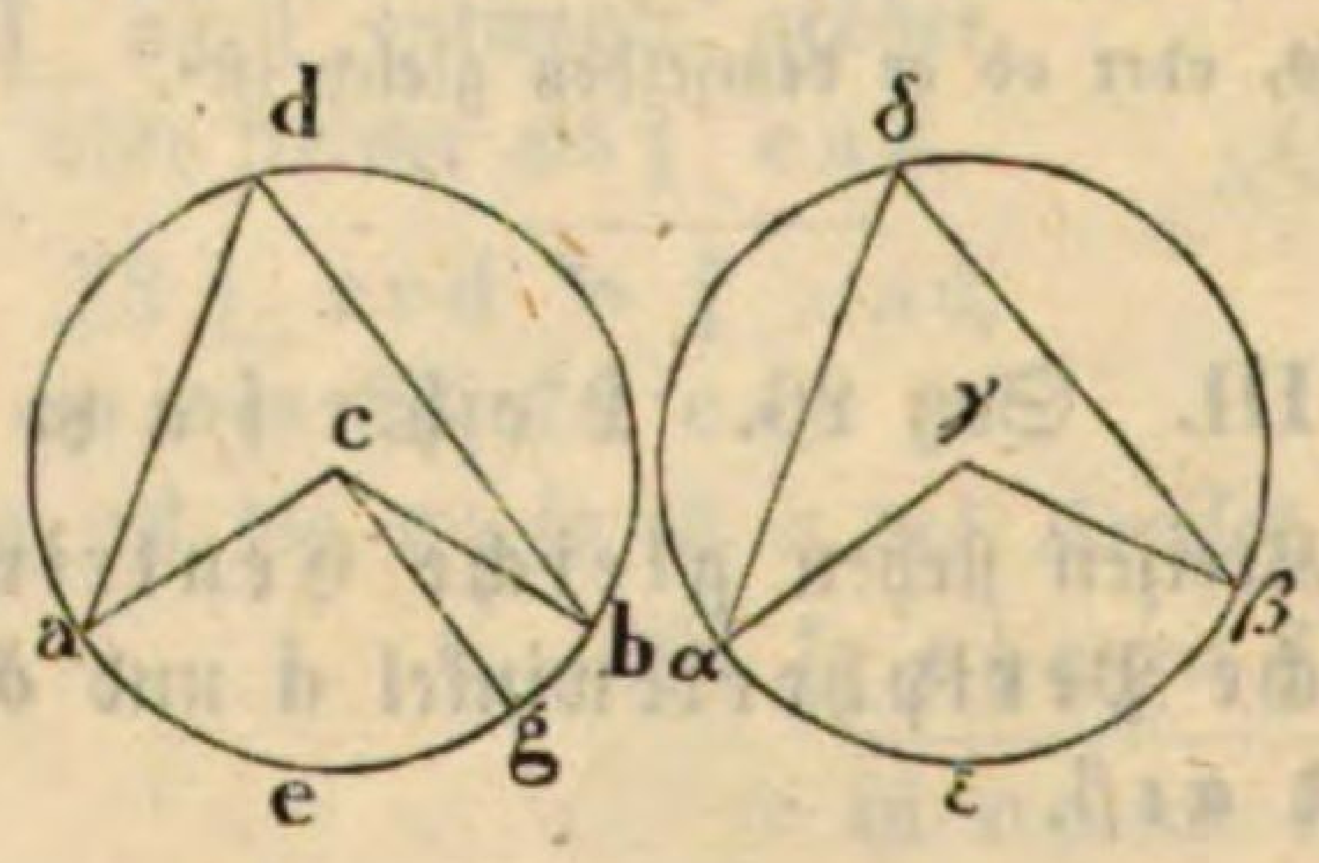
Nun war aber auch $ab = \alpha\beta$

folglich ist Abschnitt aeb = Abschnitt $\alpha\varepsilon\beta$ (24.)

und es sind daher auch die Bogen aeb und $\alpha\varepsilon\beta$ einander gleich.

III. Satz 27. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen sind die auf gleichen Bogen aeb und $\alpha\varepsilon\beta$ stehenden Centriwinkel acb und $\alpha\gamma\beta$ sowohl, als die Peripheriewinkel d und δ einander gleich.



Beweis. Wären die Winkel acb und $\alpha\gamma\beta$ ungleich, so müßte der Eine, etwa acb größer als der andere $\alpha\gamma\beta$ seyn. Man nehme $\angle acg = \alpha\gamma\beta$ (I. 23.), so ist auch

$ag = \alpha\beta$ (26.)

aber auch $ab = \alpha\beta$ (p. h.)

also $ag = ab$

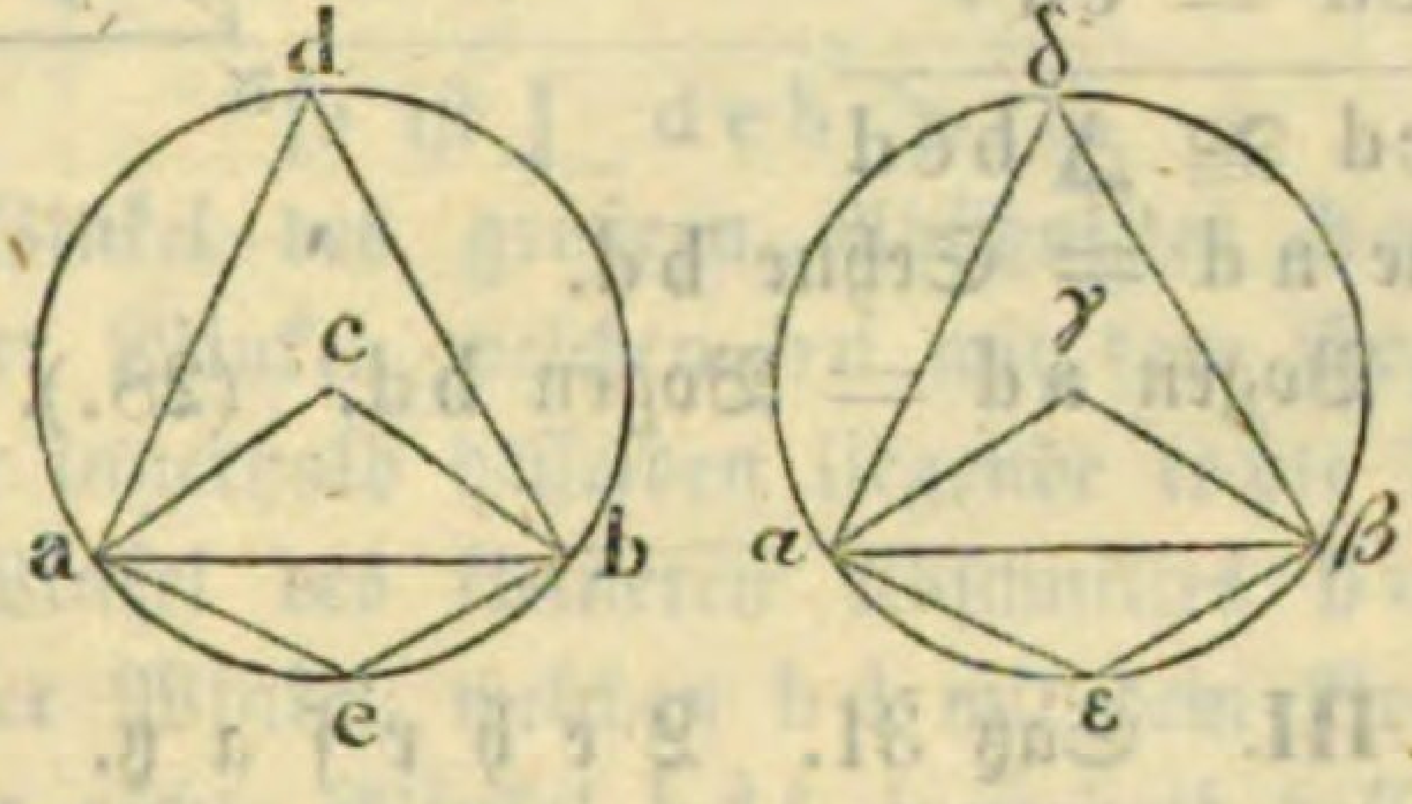
was unmöglich ist. Folglich ist $\angle$ acb nicht verschieden von $\angle\,\alpha\gamma\beta$

und daher $\angle$ acb $= \angle\,\alpha\gamma\beta$

und also auch $\angle$ d $= \angle\,\delta$. (20.)

III. Satz 28. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen schneiden gleiche Sehnen ab und $\alpha\beta$ gleiche Bogen ab, so daß die größern Bogen adb und $\alpha\delta\beta$, und auch die kleineren aeb und $\alpha\varepsilon\beta$ einander gleich sind.



Beweis. Nimm die Mittelpunkte c und γ der Kreise (1.), und ziehe die Radien ca, cb, $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$: so ist, da die Kreise gleich seyn sollen

ca $= \gamma\alpha$

und cb $= \gamma\beta$

aber auch ab $= \alpha\beta$ (p. h.)

Folglich ist $\triangle$ cab $\cong \triangle\,\gamma\alpha\beta$ (I. 8.)

und daher $\angle$ c $= \angle\,\gamma$.

Also ist auch $\angle$ d $= \angle\,\delta$ (20.) folglich Bogen adb $=$ Bogen $\alpha\delta\beta$ (26.)

und daher $\angle$ e $= \angle\,\varepsilon$ (22.) „ „ aeb $=$ „ $\alpha\varepsilon\beta$ „

III. Satz 29. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen sind die, zu gleichen Bogen aeb und $\alpha\varepsilon\beta$ gehörigen Sehnen ab und $\alpha\beta$ gleich groß.

Beweis. Man ziehe (Fig. Satz 28.) von den Mittelpunkten c und γ die Linien ca, cb, $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$: so ist, weil die Kreise gleich seyn sollen,

ca $= \gamma\alpha$

und cb $= \gamma\beta$

und da Bogen aeb $=$ Bogen $\alpha\varepsilon\beta$

auch $\angle$ c $= \angle\,\gamma$ (27.)

Folglich ist $\triangle$ acb $\cong \triangle\,\alpha\gamma\beta$ (I. 5.)

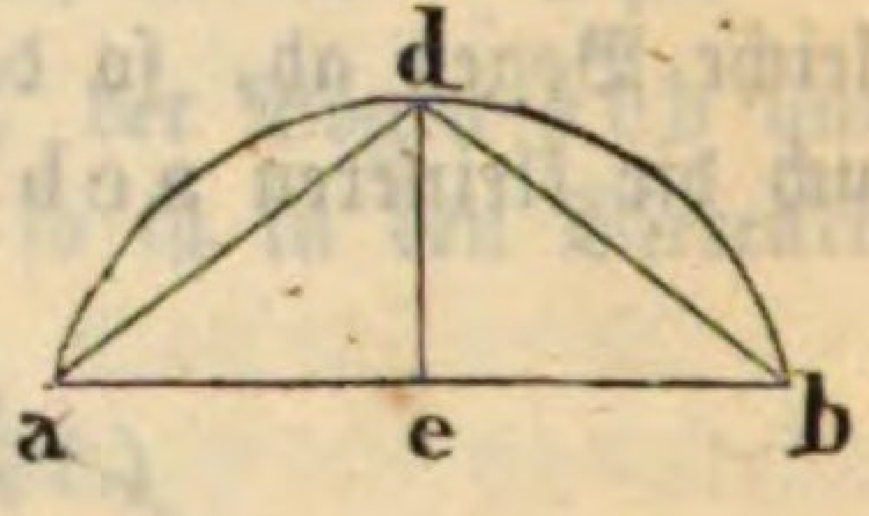
und daher ab $= \alpha\beta$.

III. Satz 30. Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen adb zu halbiren.

Auflösung. Ziehe die Sehne ab, halbire dieselbe in e (I. 10.) und errichte in e auf ab die Normale ed (I. 11.), welche den Bogen in d schneidet: so ist der Bogen ad = Bogen db.

Beweis. Ziehe da und db, so ist,



da ae = eb (p. c.)
$\llcorner$ aed = $\llcorner$ bed „
und ed = ed

Δ aed $\cong$ Δ bed

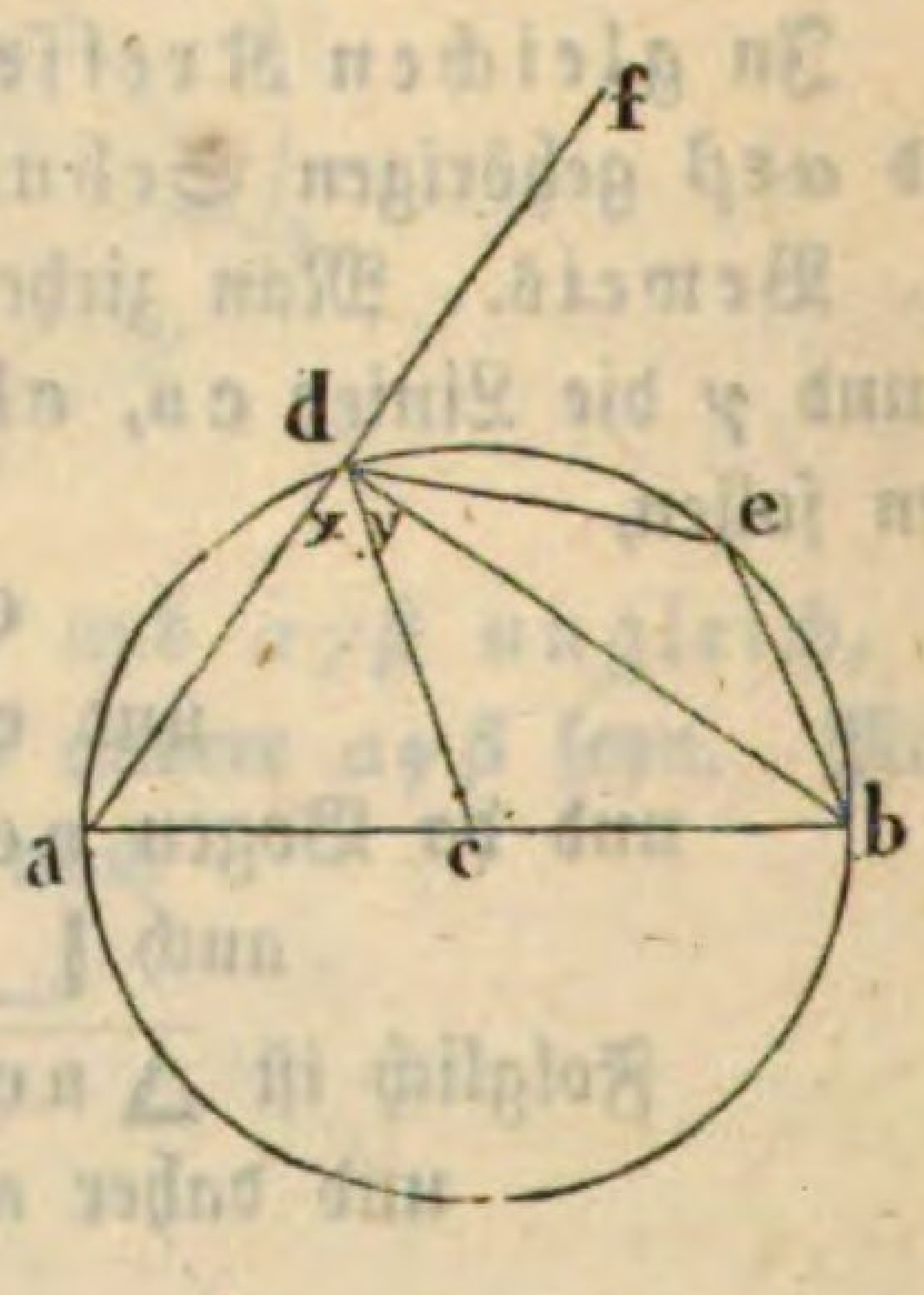
und daher Sehne ad = Sehne bd.
Folglich ist auch Bogen ad = Bogen bd. (28.).

III. Satz 31. Lehrsatz.

Der Winkel im Halbkreise adb ist ein rechter; aber der Winkel im größern Kreisabschnitte dab ist kleiner, und der im kleinern Abschnitte deb größer, als ein rechter. Dagegen aber ist der Winkel des größern Kreisabschnittes badb größer, und der des kleinern Abschnittes bedb kleiner, als ein rechter.

Beweis. Es sey c der Mittelpunkt des Kreises und ab ein Durchmesser desselben. In dem Umfange über ab nimm beliebig zwei Punkte d und e, und ziehe die Linien ad, db, de, eb: so wird der Halbkreis von ab und dem Bogen adeb eingeschlossen; der größere Abschnitt, von bd und dem Bogen dab, und der kleinere Abschnitt von bd und dem Bogen deb. Ziehe endlich cd und verlängere ad nach f.

1) Der Winkel im Halbkeise adb = R; denn da ca = cd und cb = cd, so ist



$\llcorner$ x = $\llcorner$ bad (I. 5.)
$\llcorner$ y = $\llcorner$ abd

also x + y = $\llcorner$ bad + $\llcorner$ abd.
Und weil $\llcorner$ bad + $\llcorner$ abd = $\llcorner$ bdf (I. 32.)
so ist auch x + y = bdf,
also $\llcorner$ adb = $\llcorner$ bdf = R.
I. 10. (E.)

2) Der Winkel im größern Abschnitt dab $<$ R; denn da in $\triangle$ dab ist

$$\angle adb + \angle dab < 2R \quad (I.\ 17.)$$
$$\text{und } \angle adb = R \quad \text{nach Nr. 1.}$$
$$\text{so ist } \angle dab < R.$$

3) Der Winkel im kleinern Abschnitte deb ist $>$ R; denn es ist in dem Viereck abed

$$\angle dab + \angle deb = 2R. \quad (22.)$$
$$\text{Da nun } \angle dab < R \quad \text{nach Nr. 2.}$$
$$\text{so ist } \angle deb > R.$$

4) Der Winkel des größern Abschnittes badb ist $>$ R; denn es ist dieser Winkel, welchen bd mit dem Bogen dab macht, größer als der innerhalb desselben liegende rechte Winkel bda.

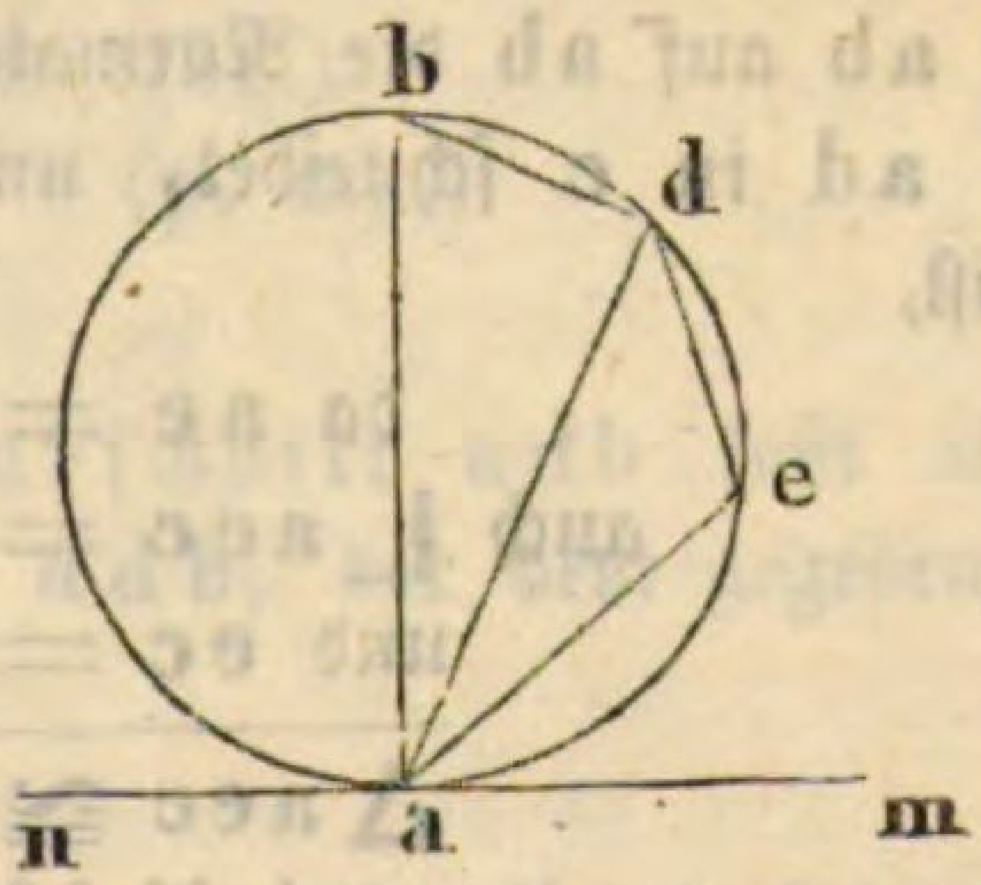
5) Der Winkel des kleineren Abschnittes bedb ist $<$ R; denn es ist dieser Winkel, welchen bd mit dem Bogen deb macht, kleiner als der rechte Winkel bdf, innerhalb dessen er liegt.

Zusatz. Ist in einem Dreieck ein Winkel so groß, als die beiden andern zusammen, so ist dieser Winkel ein rechter.

Anmerkung. Ist der Bogen dab größer als der Halbkreis, so muß deb kleiner als derselbe seyn; der Winkel dab im größern Abschnitte steht also auf einem kleinern Bogen, und umgekehrt. Hieraus folgt: daß der Peripheriewinkel, der auf einem Bogen steht, welcher kleiner als der Halbkreis ist, kleiner als ein rechter, und der Peripheriewinkel auf einem Bogen, der größer ist als der Halbkreis, größer als ein rechter Winkel ist.

III. Satz 32. Lehrsatz.

Wird ein Kreis von einer geraden Linie mn in a berührt, und von einer andern ad in dem Berührungspunkte a geschnitten: so sind die Winkel, welche die Tangente mn mit der Sehne ad in a bildet, den Winkeln in den Wechselabschnitten des Kreises gleich; so daß $\angle$ dam dem Winkel in dem Kreisabschnitte dbad, und $\angle$ dan dem Winkel in dem Kreisabschnitte dead gleich ist.



Beweis. Auf mn errichte in dem Berührungspunkte a die Normale ab. In dem Umfange

des Bogens ad nimm den Punkt e beliebig, und ziehe bd, de und ea. Da nun

1) in ab des Kreises Mittelpunkt ist (19.), so ist

$\angle adb = R$ (31.)

und daher $\angle dba + \angle dab = R$

aber auch $\angle dam + \angle dab = R$ (p. c.)

folglich ist $\angle dam = \angle dba$.

Nun ist in dem Viereck abde

$\angle dba + \angle dea = 2\,R$ (22.)

und $\angle dam + \angle dan = 2\,R$ (I. 13.)

also $\angle dba + \angle dea = \angle dam + \angle dan$.

Da nun $\angle dba = \angle dam$

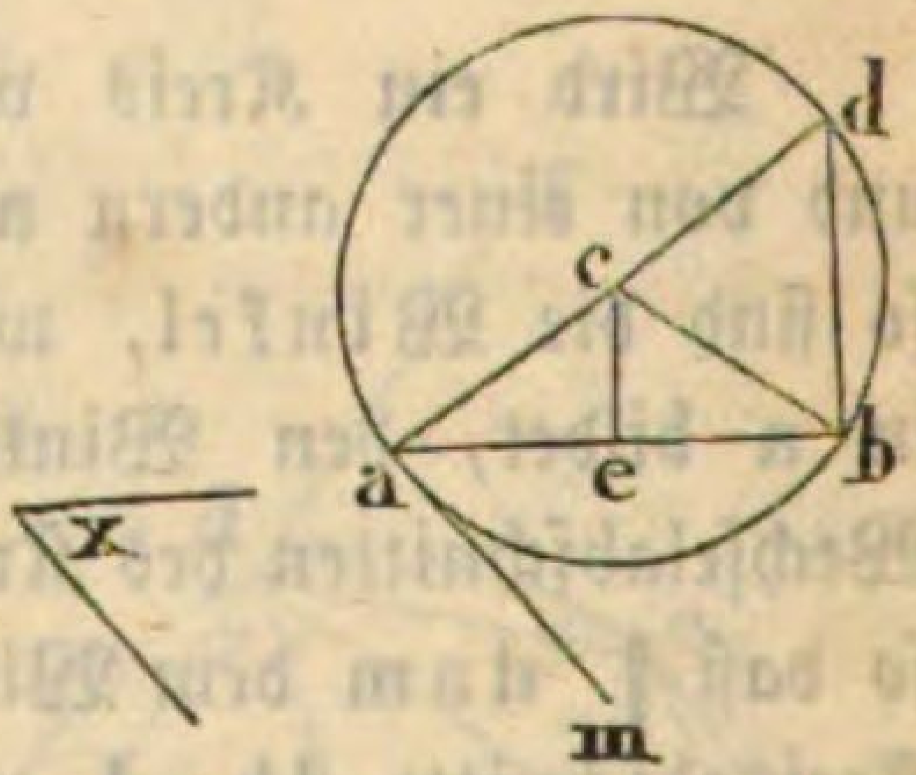
so ist auch $\angle dea = \angle dan$.

Zusatz. Der Winkel dam, welchen die Sehne da mit der Tangente am in dem Berührungspunkte a bildet, ist dem Peripheriewinkel abd gleich, der auf dem Bogen aed steht, zu welchem ad als Sehne gehört, und der zwischen dieser Sehne und der Tangente liegt. Eben so ist $\angle dan$ dem auf dem Bogen abd stehenden Peripheriewinkel aed gleich.

III. Satz 33. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen geraden Linie ab soll ein Kreisabschnitt beschrieben werden, der einen geradlinigen Winkel faßt, welcher dem gegebenen Winkel x gleich ist.

Auflösung. Der gegebene Winkel x ist entweder ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer Winkel.



Erster Fall. Wenn $\angle x < R$. In a setze an ab den Winkel bam $= x$, auf am errichte in a die Normale ad, und in dem Halbirungspunkte e der ab auf ab die Normale ec, welche die ad in c schneidet, und ziehe cb: so ist,

da $ae = be$

auch $\angle aec = \angle bec$

und $ec = ec$

$\triangle aec \cong \triangle bec$, und daher $ca = cb$.

Der aus c mit ca beschriebene Kreis geht also auch durch b.

Man beschreibe diesen Kreis und ziehe db: so ist am normal auf ad (p. c.), und daher am eine Tangente des Kreises in dem Punkte a. Folglich ist

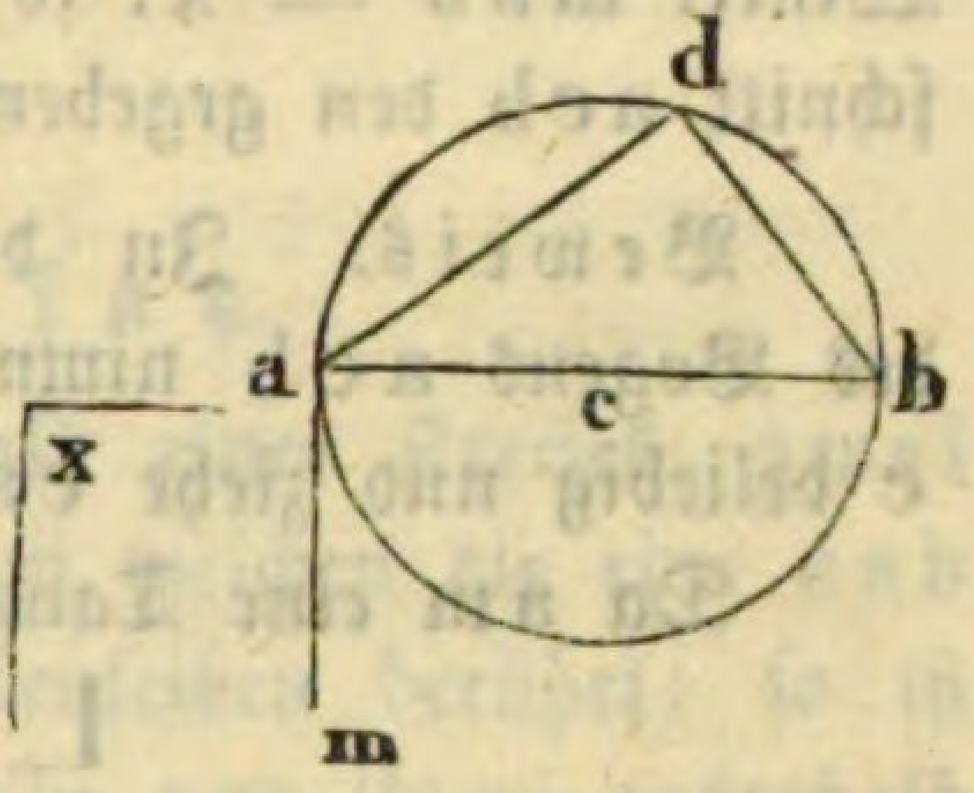
$$\angle bam = \angle adb \quad (32.)$$

$$\text{Da nun } \angle bam = \angle x \quad (p.\ c.)$$

$$\text{so ist auch } \angle adb = \angle x.$$

Der über ab beschriebene Kreisabschnitt adb faßt also einen Winkel adb, der dem gegebenen Winkel x gleich ist.

Zweiter Fall. Wenn $\angle x = R$. In a setze an ab den Winkel bam = $\angle x$, halbire ab in c, und beschreibe aus c mit ca = cb einen Kreis; aus einem beliebigen Punkte d des Umfanges ziehe da und db, so ist hier wieder am eine Tangente des Kreises, und daher

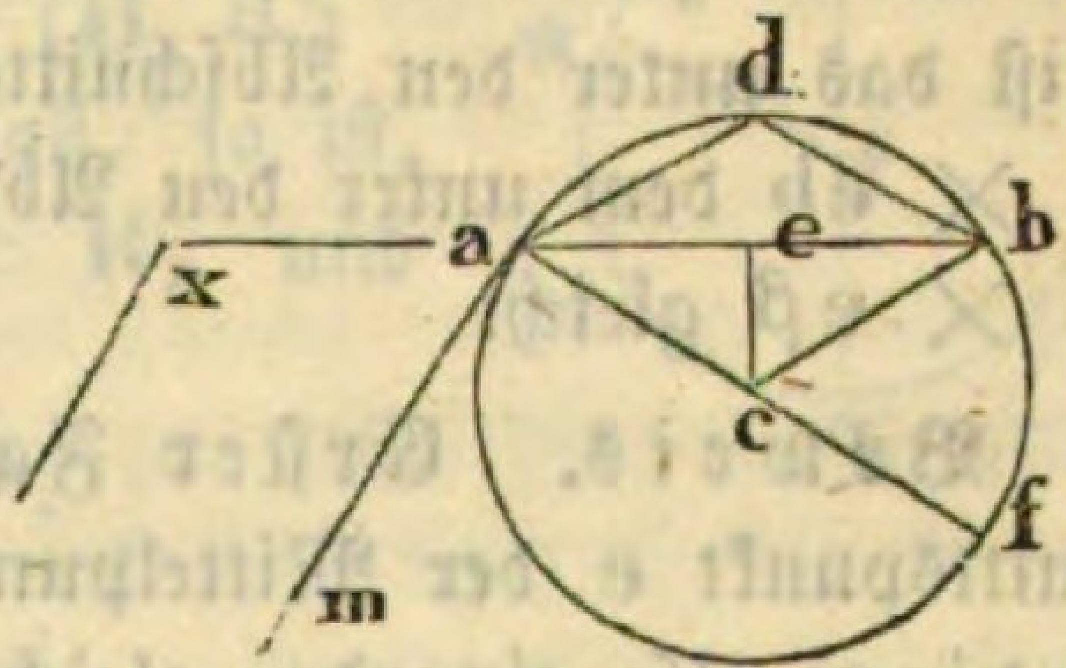


$$\angle bam = \angle bda \quad (31.)$$

$$\text{Da nun } \angle bam = \angle x \quad (p.\ c.)$$

$$\text{so ist auch } \angle bda = \angle x.$$

Dritter Fall. Wenn $\angle x > R$. In a setze an ab den Winkel bam = x, und errichte auf am in a die Normale af; ab halbire in e, und errichte in diesem Punkte auf ab eine Normale, welche die af in c schneidet, und ziehe cb: so ist wieder cb = ca. Der aus c mit ca beschriebene Kreis geht also auch durch b. Ziehe diesen Kreis, nimm in dem Bogen ab beliebig einen Punkt d, und ziehe da, db.



Da am normal auf af, so ist am eine Tangente des Kreises in dem Punkte a, und daher

$$\angle bam = \angle adb \quad (31.)$$

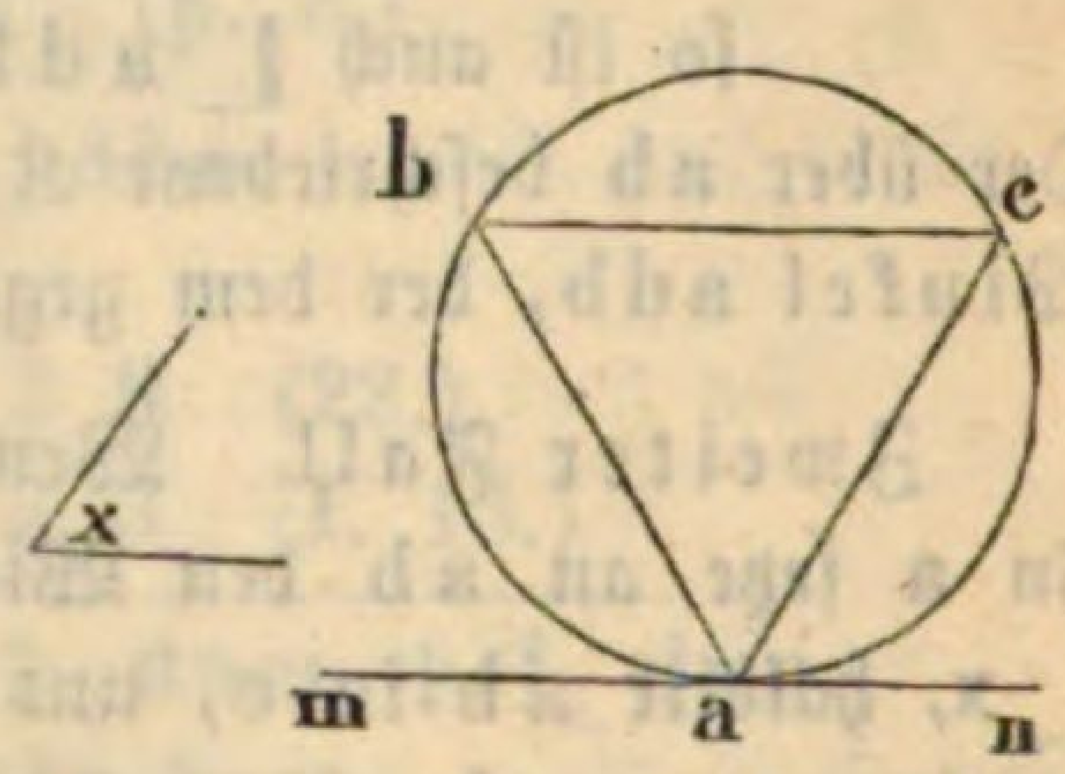
$$\text{Da nun } \angle bam = \angle x \quad (p.\ c.)$$

$$\text{so ist auch } \angle adb = \angle x.$$

Der über ab beschriebene Kreisabschnitt adb faßt also auch in diesem Falle einen Winkel adb, der dem gegebenen Winkel x gleich ist.

III. Satz 34. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise soll ein Abschnitt genommen werden, der einen Winkel faßt, welcher dem gegebenen Winkel x gleich ist.



Auflösung. An einen Punkt a des Kreisumfanges ziehe die Tangente man, und setze an a den Winkel mab = x: so faßt der Abschnitt acb den gegebenen Winkel.

Beweis. In dem Umfange des Bogens acb nimm den Punkt c beliebig und ziehe ca, cb.

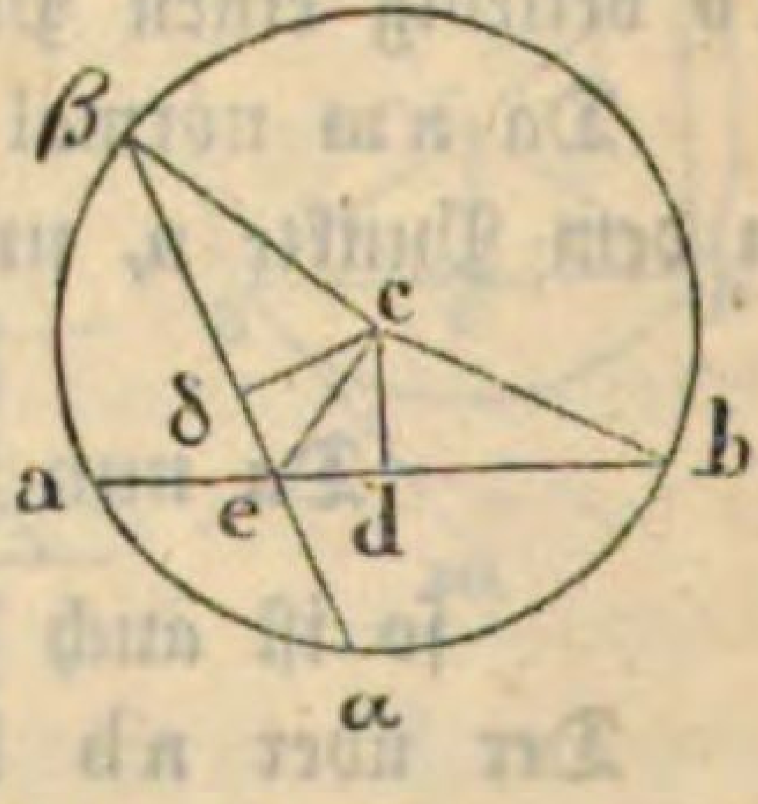
Da am eine Tangente ist, so folgt

$$\angle\, bam = \angle\, acb \quad (32.)$$
$$\text{aber } \angle\, bam = \angle\, x \quad (p.\ c.)$$
$$\text{folglich ist } \angle\, acb = \angle\, x.$$

III. Satz 35. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen ab und $\alpha\beta$ im Kreise sich schneiden: so ist das unter den Abschnitten der Einen ab enthaltene Rechteck $ae \times eb$ dem unter den Abschnitten der Anderen $\alpha\beta$ enthaltenen $\alpha e \times e\beta$ gleich.

Beweis. Erster Fall. Ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt e der Mittelpunkt des Kreises: so sind die Abschnitte Radien, also einander gleich, und daher $ae \times eb = \alpha e \times e\beta$.



Zweiter Fall. Ist e aber nicht der Mittelpunkt des Kreises, so sey c dieser Mittelpunkt; man ziehe ce, fälle auf ab und $\alpha\beta$ von c aus die Normalen cd, $c\delta$, und ziehe die Radien cb und $c\beta$: so ist $cb = c\beta$

$$\text{also auch } \quad (cb)^2 = (c\beta)^2$$
$$\text{und daher } \underbrace{(bd)^2 + (cd)^2} = \underbrace{(\beta\delta)^2 + (c\delta)^2} \quad (I.\ 47.)$$

Nun ist aber ab in d halbirt (3.) und in e ungleich getheilt und $\alpha\beta$ in δ . . . . . .

Folglich ist $(bd)^2 = ae \times eb + (ed)^2$ (II. 5.)

und $(\beta\delta)^2 = \alpha e \times e\beta + (e\delta)^2$ „

Es ist also auch, wenn man in der obigen Gleichung diese Werthe setzt

$$ae \times eb + \underbrace{(ed)^2 + (cd)^2}_{} = \alpha e \times e\beta + \underbrace{(e\delta)^2 + (c\delta)^2}_{}$$

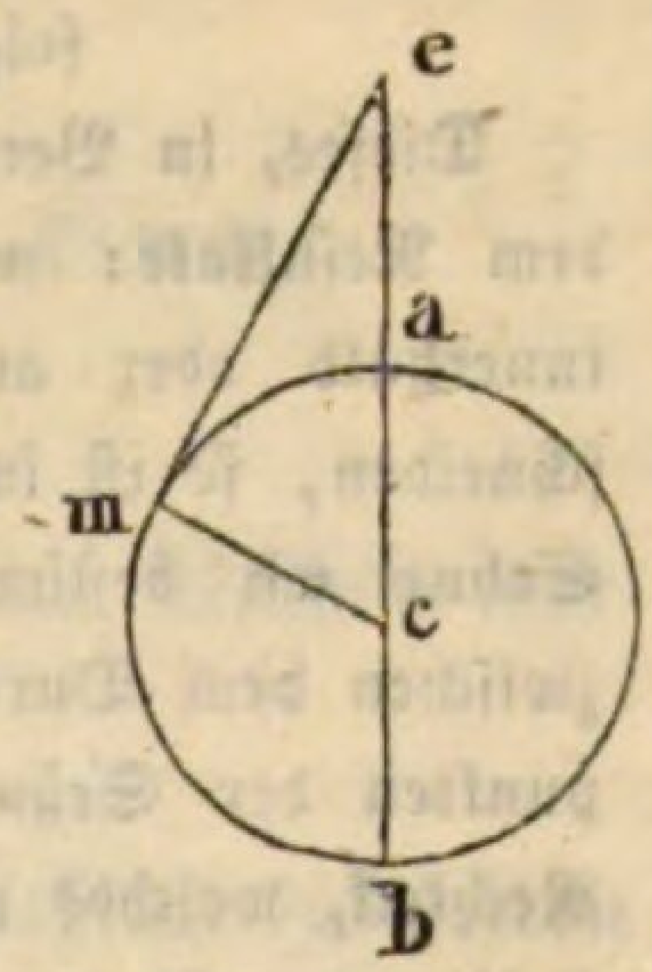
und $ae \times eb + (ce)^2 = \alpha e \times e\beta + (ce)^2$

Und weil $(ce)^2 = (ce)^2$

so bleibt $ae \times eb = \alpha e \times e\beta$ (3. G.)

III. Satz 36. Lehrsatz.

Gehen von einem Punkte e, außerhalb eines Kreises, zwei gerade Linien an des Kreises Umfang, von welchen die eine eab den Kreis schneidet und die andere em denselben berührt: so ist „das unter der ganzen schneidenden Linie eb, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte ea, enthaltene Rechteck" dem Quadrat der Berührungslinie em gleich.



Beweis. Erster Fall. Die schneidende Linie eab gehe durch den Mittelpunkt c des Kreises, so ist ab in c halbirt, und ihr ein Stück ae angesetzt; und es ist daher

$ea \times eb + (ac)^2 = (ce)^2$. (II. 6.)

Und weil em eine Tangente seyn soll, so ist, wenn man cm zieht, $\llcorner cme = R$, und daher

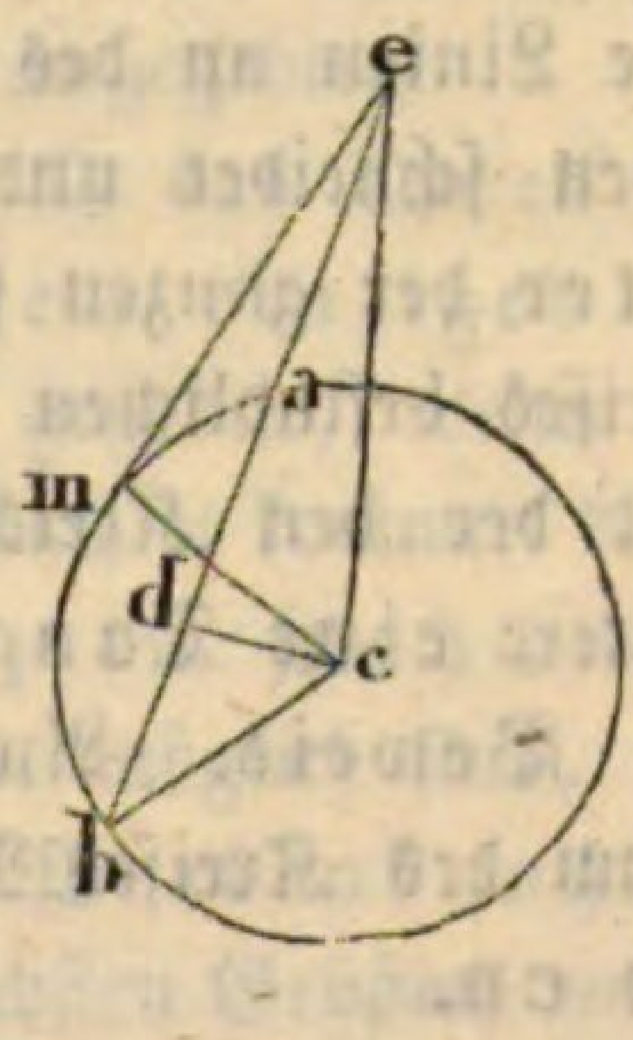
$$(ce)^2 = (em)^2 + (cm)^2.$$

Folglich ist auch

$$ea \times eb + (ac)^2 = (em)^2 + (cm)^2.$$

Und da $ac = cm$, also auch $(ac)^2 = (cm)^2$

so bleibt, wenn man diese gleichen Größen abzieht, $ea \times eb = (em)^2$.



Zweiter Fall. Die schneidende Linie eab gehe nicht durch den Mittelpunkt c; man fälle von demselben die Normale cd auf ab: so ist ab in d halbirt, und daher

$$ea \times eb + (bd)^2 = (ed)^2.$$
Hierzu $(dc)^2 = (dc)^2$

giebt $ea \times eb + (bd)^2 + (dc)^2 = (ed)^2 + (dc)^2$.

Und wenn man ce, cm, cb zieht,

so ist $(bd)^2 + (dc)^2 = (cb)^2 = (cm)^2$

und $(ed)^2 + (dc)^2 = (ec)^2$.

Es ist also auch

$$ea \times eb + (cm)^2 = (ec)^2$$

und weil em eine Tangente seyn soll, so ist

$$(ec)^2 = (em)^2 + (cm)^2$$

folglich $ea \times eb + (cm)^2 = (em)^2 + (cm)^2$.

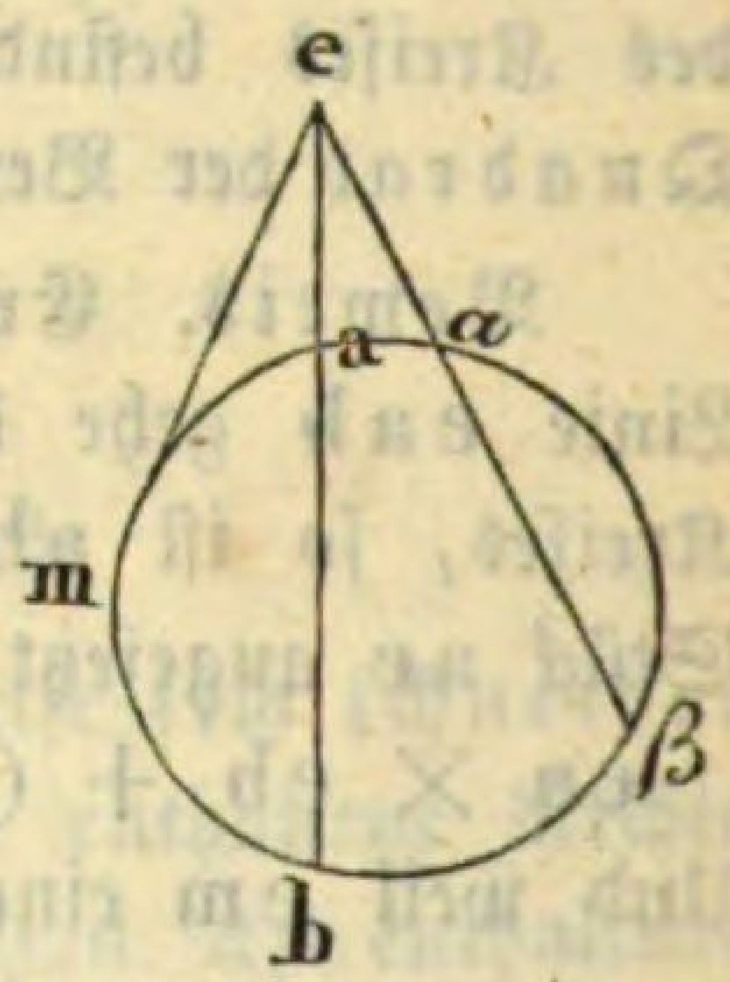
Hiervon $(cm)^2 = (cm)^2$

bleibt $ea \times eb = (em)^2$.

Zusatz. Zieht man von einem Punkte e, außerhalb des Kreises, die Linien eab und $e\alpha\beta$ durch den Kreis, so daß sie denselben schneiden, und die Tangente em an denselben: so ist

$$ea \times eb = (em)^2$$
und auch $e\alpha \times e\beta = (em)^2$

folglich $ea \times eb = e\alpha \times e\beta$.



Dieses, in Verbindung mit Satz 35., führt zu dem Resultate: wenn zwei Sehnen ab und $\alpha\beta$ innerhalb oder außerhalb des Kreises in e sich schneiden, so ist immer „das unter den, durch die Sehne ab bestimmten Linien ea, eb, welche zwischen dem Durchschnittspunkte e und den Endpunkten der Sehne liegen, enthaltene Rechteck“ eben so groß, als „das Rechteck, welches unter den, auf gleiche Weise durch die andere Sehne $\alpha\beta$ bestimmten Linien $e\alpha$ und $e\beta$ enthalten ist“.

III. Satz 37. Lehrsatz.

Gehen von einem Punkte e, außerhalb eines Kreises, zwei gerade Linien an des Kreises Umfang, von welchen die eine eab denselben schneidet und die andere ihn in m trifft; und es ist „das unter der ganzen schneidenden Linie eb, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte ea enthaltene Rechteck“ dem Quadrat der den Kreis in m treffenden Linie em gleich: so ist diese Letztere eine Tangente des Kreises.

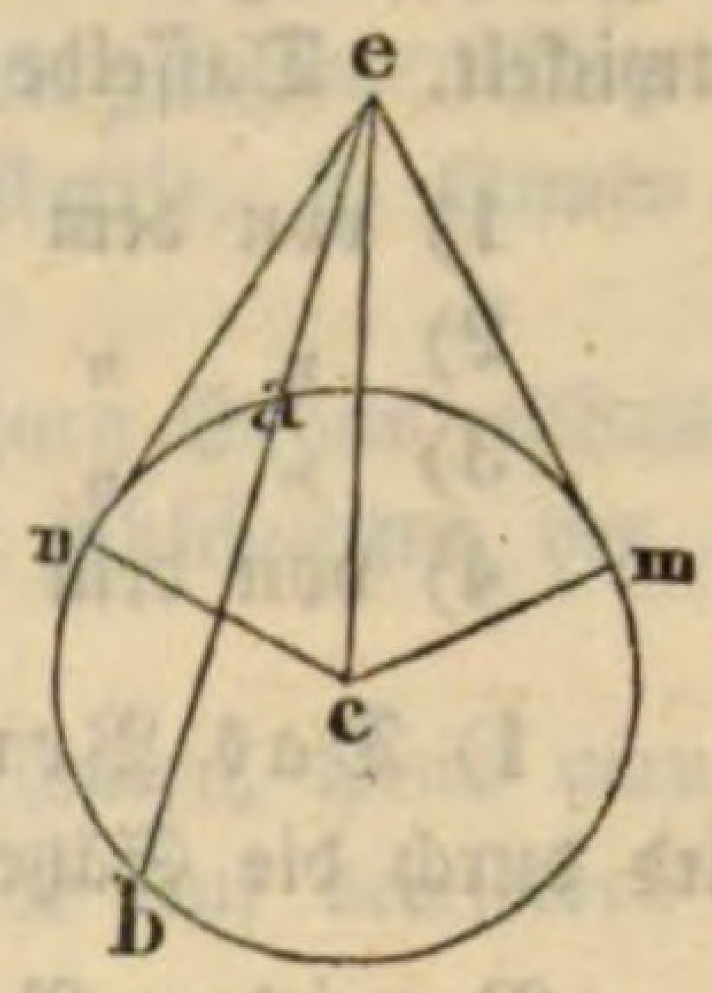
Beweis. Aus e ziehe die Tangente en an den Kreis (17.); nimm des Kreises Mittelpunkt c, und ziehe von demselben ce, cm und cn.

Da e n den Kreis berührt und e a b denselben schneidet, so ist

$$ea \times eb = (en)^2 \quad (36.)$$

Es ist aber auch

$$ea \times eb = (em)^2 \quad (p. h.)$$



also $(en)^2 = (em)^2$

und daher $en = em$.

Nun ist $cn = cm$ (I. 15. E.)

und $ec = ec$

folglich $\Delta\, ecn \cong \Delta\, ecm$

und daher $\angle\, enc = \angle\, emc$

aber $\angle\, enc = R.$ (18.)

Also auch $\angle\, emc = R$

und daher e m eine Tangente des Kreises. (16.)

Anmerkung. Von einem Punkte e, außerhalb eines Kreises, können zwei Tangenten e m und e n an denselben gezogen werden, und es sind Beide gleich groß.

Beilagen zu dem dritten Buche.

XIV. Uebersicht der Sätze des dritten Buches der Elemente.

Das erste Buch der Elemente hat ausschließlich die beiden geradlinigen Elementarfiguren der Geometrie, das Dreieck und das Parallelogramm, zu ihrem Gegenstande. Außer diesen beiden Figuren gehört auch die einfachste, von einer krummen Linie begrenzte, der Kreis, ebenfalls zu den Elementen; und die Grundeigenschaften desselben werden in dem dritten Buche angegeben.

Der Kreis ist insofern noch einfacher, als das Dreieck und das Parallelogramm, als bei demselben nur ein einziges Bestimmungsstück vorkömmt; ein Kreis ist immer gegeben, wenn der Halbmesser desselben gegeben ist. Dessenungeachtet kommen dieser Figur sehr viele merkwürdige Eigenschaften zu; die jedoch bei der einfachen Form des Kreises nur in der Art möglich sind, daß man dieselbe nicht an und für sich, sondern in Verbindung mit einer anderen Raumgröße betrachtet. Die einfachsten Größen, welche

man mit dem Kreise in Verbindung bringen kann, sind „Punkte, gerade Linien, Winkel und Kreise“; und die durch diese Verbindungen sich ergebenden Eigenschaften werden in dem dritten Buche entwickelt. Dasselbe enthält daher die Sätze

1) von dem Verhalten der Punkte in dem Kreise,
2) „ „ „ der geraden Linien „
3) „ „ „ der Winkel „ und
4) von dem Verhalten der Kreise zu einander.

1) Das Verhalten der Punkte in dem Kreise wird durch die Sätze angegeben:

„Von jedem Punkte, der nicht des Kreises Mittelpunkt ist, es mag derselbe innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, können nur zwei gerade Linien von gleicher Größe an des Kreises Umfang gezogen werden“ (Satz 7. und 8.);
und es folgt hieraus unmittelbar:
„wenn von einem Punkte mehr als zwei gleich große gerade Linien an des Kreises Umfang gezogen werden können, so ist dieser Punkt des Kreises Mittelpunkt“ (Satz 9.).

2) Das Verhalten der geraden Linien zu dem Kreise.

Eine gerade Linie schneidet den Kreis entweder, oder sie trifft denselben, ohne verlängert ihn zu schneiden. In dem ersten Falle ist sie eine Secante, und es wird der Theil derselben, „von einem Punkte des Umfangs bis zu einem andern“ eine Sehne genannt; und in dem anderen Falle ist die Linie eine Tangente.

Die Sehne wird entweder an und für sich betrachtet, oder es werden zwei Sehnen mit einander verglichen; und man sieht hierbei entweder auf ihre Lage gegen den Mittelpunkt des Kreises, oder auf die Lage derselben zu einander. Von der Tangente werden die derselben an und für sich zukommenden Eigenschaften angegeben; und es ist außerdem auch das Verhalten der Tangente zu einer Secante, insofern sie mit derselben zusammentrifft, zu bestimmen.

„Die Sehne an und für sich liegt immer innerhalb des Kreises“ Satz 2.; und wird

„von dem Mittelpunkte des Kreises eine gerade Linie an den Halbirungspunkt einer Sehne gezogen, so steht Diese normal auf der Sehne; so wie umgekehrt die von dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefällte Normale dieselbe halbirt“. Satz 3.

„Zwei Sehnen im Kreise sind gleich groß, wenn sie gleich weit von dem Mittelpunkte abstehen, und umgekehrt" Satz 14.; und „von zwei Sehnen, die nicht gleichen Abstand von dem Mittelpunkte haben, ist die dem Mittelpunkte näher liegende die größere". Satz 15.

„Schneiden zwei Sehnen sich im Kreise, so können sie sich nie gegenseitig halbiren" Satz 4.; und

„es ist immer das unter den Abschnitten der einen Sehne enthaltene Rechteck dem Rechteck gleich, welches unter den Abschnitten der andern enthalten ist". Satz 35.

„Die Tangente eines Punktes wird erhalten, wenn man in dem Endpunkte eines Halbmessers eine Normale auf demselben errichtet" Satz 16.; und es ist

„wenn man den Berührungspunkt einer Tangente mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, diese Linie normal auf der Tangente" Satz 18., und

„es geht immer die, in dem Berührungspunkte auf einer Tangente errichtete Normale durch den Mittelpunkt des Kreises". Satz 19.

„Wenn eine Tangente und eine Secante sich schneiden: so ist das unter der ganzen Secante und dem, außerhalb des Kreises liegenden Abschnitte derselben enthaltene Rechteck dem Quadrat des Theils der Tangente gleich, welcher zwischen dem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte derselben mit der Secante liegt". Satz 36.

„Dieser Satz gilt auch umgekehrt; so daß, wenn von einem außerhalb des Kreises liegenden Punkte eine Secante durch den Kreis und eine Linie an den Kreis gezogen wird, und es ist das Quadrat dieser Linie dem unter der ganzen Secante und dem Abschnitte derselben, der außerhalb des Kreises liegt, enthaltenen Rechtecke gleich, so muß die an den Kreis gezogene Linie eine Tangente desselben seyn". Satz 37.

3) Das Verhalten der Winkel im Kreise.

„Wenn ein Centriwinkel und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen stehen, so ist der Peripheriewinkel halb so groß, als der Centriwinkel". Satz 20.

Hieraus folgt unmittelbar

„daß mehrere Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, gleich groß seyn müssen" Satz 21.; und

„es sind daher bei einem jeden Viereck im Kreise — bei einem jeden Viereck also, dessen Ecken in dem Umfange des Kreises liegen —

die einander gegenüber stehenden Winkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich". Satz 22.

„Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel; und es ist daher jeder Winkel, der auf einem größern Bogen, als der Halbkreis ist, steht, ein stumpfer, und der auf einem kleineren Bogen stehende ein spitzer Winkel". Satz 31.

„Der Winkel endlich, welcher an dem Berührungspunkte einer Tangente von dieser und einer Sehne eingeschlossen wird, ist dem Peripheriewinkel gleich, der auf dem Bogen steht, zu welchem die Sehne gehört". Satz 32.

4) Das Verhalten der Kreise zu einander

„Kreise, die sich schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt" Satz 5.; und
„sie können in nicht mehr als zwei Punkten sich schneiden". Satz 10.

„Kreise die sich berühren, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt" Satz 6.; und
„sie berühren sich in nicht mehr, als in einem einzigen Punkte". Satz 13.

„Wenn zwei Kreise, von welchen der eine entweder innerhalb oder außerhalb des andern liegt, sich berühren: so liegt der Berührungspunkt immer mit den Mittelpunkten beider Kreise in gerader Linie". Satz 11. und 12.

„Ungleiche Kreisbogen, welche die Sehne gemein haben, und an einer Seite derselben liegen, können nicht ähnlich seyn" Satz 23.; und es folgt hieraus:
„ähnliche Kreisbogen auf gleichen Sehnen decken sich". Satz 24.

„In gleichen Kreisen stehen gleiche Centriwinkel, und also auch gleiche Peripheriewinkel auf gleichen Bogen" Satz 26.; und
„es stehen umgekehrt in gleichen Kreisen auf gleichen Bogen gleiche Centriwinkel und also auch gleiche Peripheriewinkel." Satz 27.

„Eben so gehören in gleichen Kreisen zu gleichen Sehnen gleiche Bogen" Satz 28.; und

„es gilt auch dieser Satz umgekehrt, so daß also, in gleichen Kreisen, zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören". Satz 29.

Dieses sind die Lehrsätze des dritten Buches, deren Anzahl 31 beträgt, und es handeln

3 derselben von der Lage eines Punktes in dem Kreise;

6 von der Lage der Sehnen,
5 „ „ „ „ Tangenten;
5 von den Eigenschaften der Winkel im Kreise, und
12 von dem Verhalten der Kreise und der Kreisbogen zu einander.

Außer diesen Lehrsätzen enthält das dritte Buch noch sechs Aufgaben, durch welche die Hülfsmittel für die Constructionen vermehrt werden, und die eine vielfache Anwendung zulassen. Diese Aufgaben sind:

1) Eines Kreises Mittelpunkt zu finden. Satz 1.

2) Einen Kreis zu vollenden, wenn ein Bogen desselben gegeben ist. Satz 25.

3) Einen Kreisbogen zu halbiren. Satz 30.

4) Von einem, außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte eine Tangente an denselben zu ziehen. Satz 17.

5) Einen Kreis zu beschreiben, in welchem zu einer gegebenen Sehne ein gegebener Winkel als Peripheriewinkel gehört. Satz 33.;

und 6) von einem gegebenen Kreise einen Bogen abzuschneiden, der einen gegebenen Winkel faßt.

Das Nähere von diesen Aufgaben enthält die Beilage **XVII.**

XV. Lehrsätze, die mit Hülfe der Sätze des dritten Buches sich beweisen lassen.

Lehrsatz 105. Zwei Kreise können sich nicht so schneiden, daß sie durch die gemeinschaftliche Sehne gegenseitig halbirt würden.

Beweis (5.).

Lehrsatz 106. Wenn zwei Kreise k′ und k″ sich so schneiden, daß k′ durch die gemeinschaftliche Sehne halbirt wird, so ist der Radius von k′ kleiner als von k″.

Beweis (15.).

Lehrsatz 107. Wenn zwei Kreise sich schneiden: so wird die gemeinschaftliche Sehne derselben von der Linie, welche die Mittelpunkte beider Kreise verbindet, halbirt.

Beweis (**I.** 8.) und (**I.** 4.).

Lehrsatz 108. Wenn zwei Sehnen s′ und s″ im Kreise sich so schneiden, daß s, in dem Durchschnittspunkte halbirt wird: so ist s′ kleiner als s″.

Beweis (**I.** 19.) und (15.).

Lehrsatz 109. Zwei gleich große Sehnen im Kreise können sich nicht so schneiden, daß eine derselben in dem Durchschnittspunkte halbirt würde.

Beweis (Lhrs. 108.).

Lehrsatz 110. Wenn zwei Kreise sich schneiden: so ist „der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander" kleiner, als die Summe ihrer Radien.

Beweis (I. 20.).

Lehrsatz 111. Wenn zwei Kreise, von welchen der eine innerhalb des andern liegt, sich berühren: so ist „der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander" der Differenz der Radien beider Kreise gleich.

Beweis (11.).

Lehrsatz 112. Berühren zwei Kreise sich, die außer einander liegen: so ist der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander „der Summe der Radien beider Kreise" gleich.

Beweis (12.).

Lehrsatz 113. Ist der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise von einander der Summe oder der Differenz ihrer Radien gleich: so müssen diese Kreise sich berühren.

Beweis folgt indirect aus (11.), (12.) und (Lhrs. 110.).

Lehrsatz 114. Werden in zwei verschiedenen Kreisen gleich große Sehnen gezogen, und stehen dieselben gleich weit von den Mittelpunkten dieser Kreise ab: so sind die Radien dieser Kreise gleich groß.

Beweis (3.) und (I. 4.).

Lehrsatz 115. Haben gleiche Sehnen in zwei verschiedenen Kreisen einen ungleichen Abstand von den Mittelpunkten derselben: so ist der Radius des Kreises der größere, in welchem die Sehne den größern Abstand hat.

Beweis (3.) und (I. 47.).

Lehrsatz 116. Wenn eine Sehne von einem Durchmesser geschnitten wird: so ist der kleinere Abschnitt des Durchmessers kleiner, und der größere ist größer, als jeder der beiden Abschnitte der Sehne.

Beweis (7.).

Lehrsatz 117. Wenn an zwei verschiedenen Punkten des Kreisumfanges, die nicht die Endpunkte eines und desselben Durch-

messers sind, Tangenten des Kreises gezogen werden, bis sie sich schneiden: so sind diese beiden Tangenten gleich groß.

Beweis (16.) und (I. 47.).

Lehrsatz 118. Werden von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei gleich große Linien an des Kreises Umfang gezogen, und es ist die eine dieser Linien eine Tangente des Kreises: so muß die andere ebenfalls eine Tangente seyn.

Beweis (I. 8.) und (16.).

Lehrsatz 119. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente an denselben, und eine Secante durch den Kreis: so ist die Tangente größer, als der außerhalb des Kreises liegende Abschnitt der Secante, und kleiner als die ganze Secante.

Beweis (8.).

Lehrsatz 120. Wenn zwei Kreise sich berühren, und man zieht in dem Berührungspunkte eine Tangente an dem einen Kreise: so ist dieselbe auch zugleich Tangente des andern.

Beweis (11. oder 12.), (16.) und (I. 13.).

Lehrsatz 121. Treffen zwei Kreise in Einem Punkte zusammen, und ist eine, durch diesen Punkt gezogene Linie zugleich Tangente beider Kreise: so berühren die Kreise sich in diesem Punkte.

Beweis (16.), (I. 14.) und (Lhrs. 113.).

Lehrsatz 122. Schneiden zwei Kreise sich, und man zieht in dem einen Durchschnittspunkte Tangenten an beide Kreise: so ergänzt „der Winkel, den diese Tangenten einschließen", den Winkel, welchen die an diesen Durchschnittspunkt gezogenen Radien bilden, zu 2 R.

Beweis (16.) und (I. 15. Zusatz.).

Lehrsatz 123. Die zwischen parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Bogen sind gleich groß.

Beweis (I. 29.) und (26.).

Lehrsatz 124. Schneiden zwei Sehnen sich innerhalb eines Kreises: so ist der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, dem Peripheriewinkel gleich, der auf einem Bogen steht, welcher der Summe der beiden Bogen gleich ist, die zwischen den Schenkeln dieses Winkels und des dazu gehörigen Scheitelwinkels liegen.

Beweis (Lhrs. 123.) und (I. 29.).

Lehrsatz 125. Wenn zwei Sehnen eines Kreises, verlängert, außerhalb desselben sich schneiden: so ist der Winkel, den dieselben

einschließen, einem Peripheriewinkel gleich, der auf dem Unterschiede der beiden Bogen steht, die zwischen den Sehnen liegen.

Beweis (Lhrs. 123.) und (I. 29.).

Lehrsatz 126. Der Winkel, den eine Sehne und eine Tangente einschließen, ist halb so groß, als der Centriwinkel des Bogens, zu welchem die Sehne gehört.

Beweis (32.) und (20.).

Lehrsatz 127. Wenn von einem Viereck drei Ecken in dem Umfange eines Kreises liegen, und die vierte liegt innerhalb der Kreisfläche: so ist der Winkel dieser vierten Ecke und der derselben, gegenüber liegende Winkel der Figur, zusammen größer als 2 R.

Beweis (22.) und (I. 16.).

Lehrsatz 128. Liegen von einem Viereck drei Ecken in dem Umfange, und die vierte außerhalb eines Kreises: so ist der Winkel dieser vierten Ecke, und der derselben gegenüber liegende Winkel der Figur, zusammen kleiner als 2 R.

Beweis (22.) und (I. 16.).

Lehrsatz 129. Sind, in einem Viereck, zwei einander gegenüber liegende Winkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich, und man beschreibt einen Kreis, der durch drei Ecken dieses Vierecks geht: so liegt die vierte Ecke der Figur ebenfalls in dem Umfange des Kreises.

Beweis (Lhrs. 128. und 129.).

Lehrsatz 130. Werden an den beiden Endpunkten einer Sehne zwei Linien unter gleichen Winkeln angesetzt: so sind die Theile dieser Linien, welche Sehnen des Kreises sind, gleich groß.

Beweis (26.) und (29.).

Lehrsatz 131. Wenn zwei Dreiecke eine Seite gemein, und den ihr gegenüber liegenden Winkel gleich haben: so liegen Beide in Einem und demselben Kreise.

Beweis (33.).

Lehrsatz 132. Haben zwei Dreiecke die Grundlinie gemein, und ist der derselben gegenüber liegende Winkel in dem ersten Dreieck kleiner, als in dem zweiten: so liegt, wenn beide Dreiecke auf derselben Seite der Grundlinie verzeichnet sind, die Spitze des zweiten Dreiecks innerhalb des Kreises, der um das erste beschrieben ist.

Beweis (33.) und (I. 21.).

Lehrsatz 133. Liegen zwei Dreiecke in demselben Kreise, so daß der Umfang des Kreises durch die Spitzen der Dreiecke geht, und sind die Winkel des einen Dreiecks einzeln den Winkeln des andern gleich: so müssen auch die Seiten des einen Dreiecks den Seiten des andern gleich seyn.

Beweis (26.) und (29.).

Lehrsatz 134. Wenn ein gleichschenkliges und ein ungleichseitiges Dreieck die Grundlinie gemein haben, und in demselben Kreise liegen: so hat das gleichschenklige Dreieck eine größere Höhe, als das ungleichseitige.

Beweis. Man lege durch die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks eine Tangente an den Kreis, so ist diese der Grundlinie parallel; und es liegen daher alle übrigen Punkte des Kreisumfanges der Grundlinie näher, als die Spitze des gleichschenkligen Dreicks.

Lehrsatz 135. Wenn ein gleichschenkliges und ein ungleichseitiges Dreieck die Grundlinie gemein und gleiche Höhe haben, und auf derselben Seite der Grundlinie liegen: so ist „der der Grundlinie gegenüber liegende Winkel" in dem gleichschenkligen Dreieck größer, als in dem ungleichseitigen.

Beweis (Lhrs. 133.) und (Lhrs. 134.).

Lehrsatz 136. Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, und es ist der eine Abschnitt der einen dem einen Abschnitte der andern gleich: so sind beide Sehnen gleich groß.

Beweis (35.).

Lehrsatz 137. Wenn zwei Secanten sich schneiden, und es sind die Theile derselben, welche Sehnen des Kreises sind, gleich groß: so müssen auch die ganzen Secanten gleich groß seyn.

Beweis (36.).

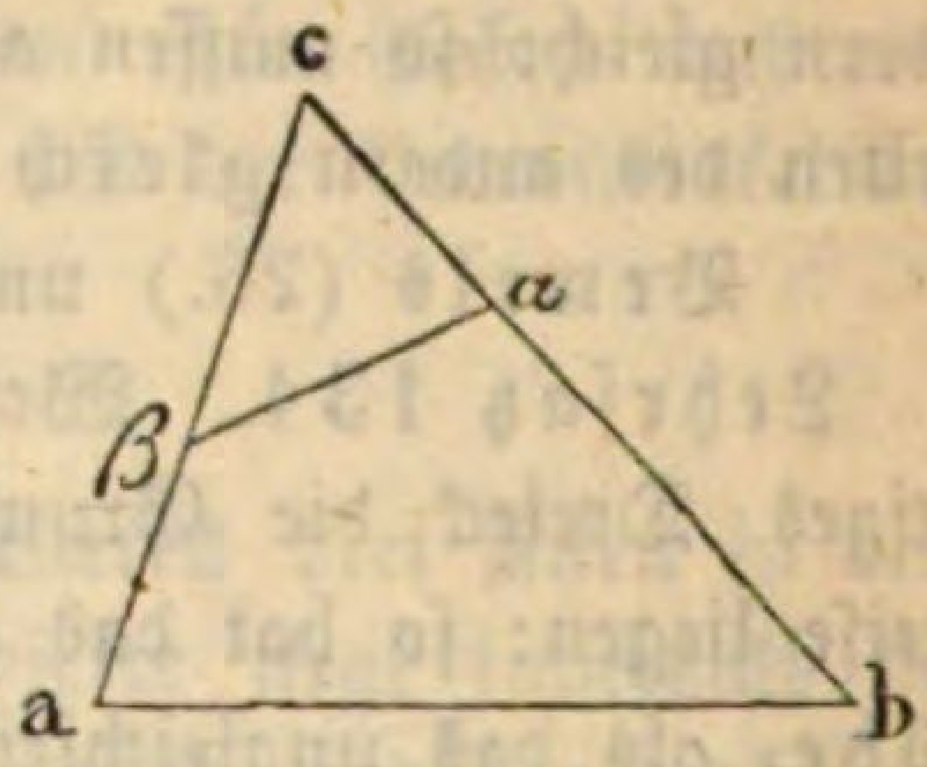
Lehrsatz 138. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Secante durch denselben, die in dem Punkte, wo sie den Kreis das erste Mal trifft, halbirt wird; und zieht man von eben diesem Punkte auch eine Tangente an den Kreis: so ist diese Tangente die Diagonale eines Quadrats, dessen Seite der halben Secante gleich ist.

Beweis (36.) und (I. 47.).

Lehrsatz 139. Werden in einem Kreise zwei gleich große Sehnen gezogen, und man schneidet in beiden gleiche Stücke ab, und zieht eine Sehne, welche durch die beiden Theilpunkte

geht: so sind die Stücke dieser Sehne, welche zwischen jedem der beiden Theilpunkte und dem Kreisumfange liegen, gleich groß.

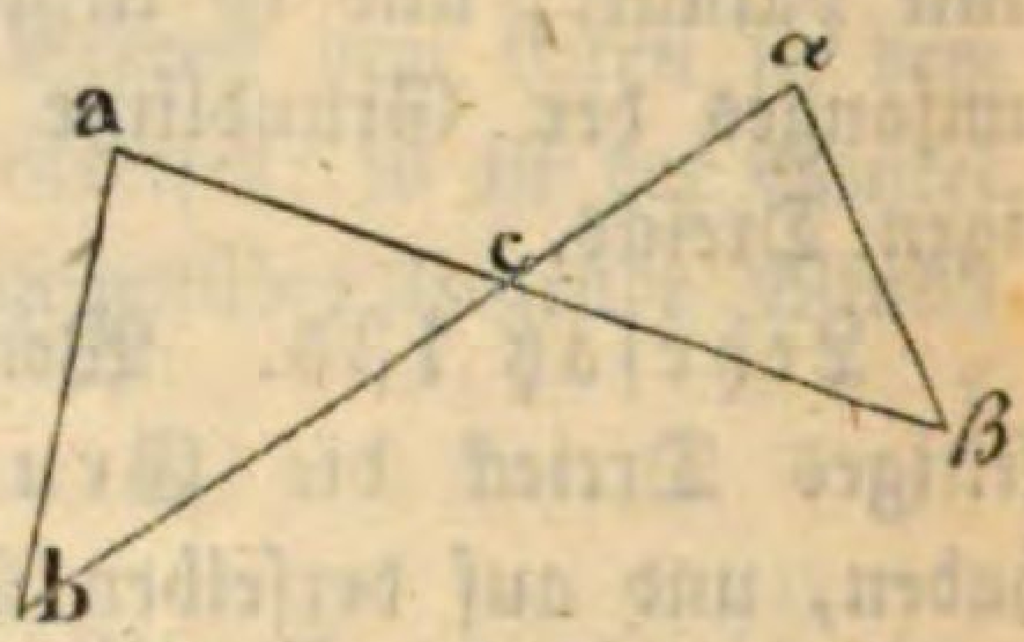
Beweis (35.).



Lehrsatz 140. Wenn man in einem Dreieck abc die Linie $\alpha\beta$ so zieht, daß $\angle c\alpha\beta = \angle cab$: so ist „das unter $c\alpha$ und cb enthaltene Rechteck $c\alpha \times cb$" dem unter $c\beta$ und ca enthaltenen $c\beta \times ca$ gleich.

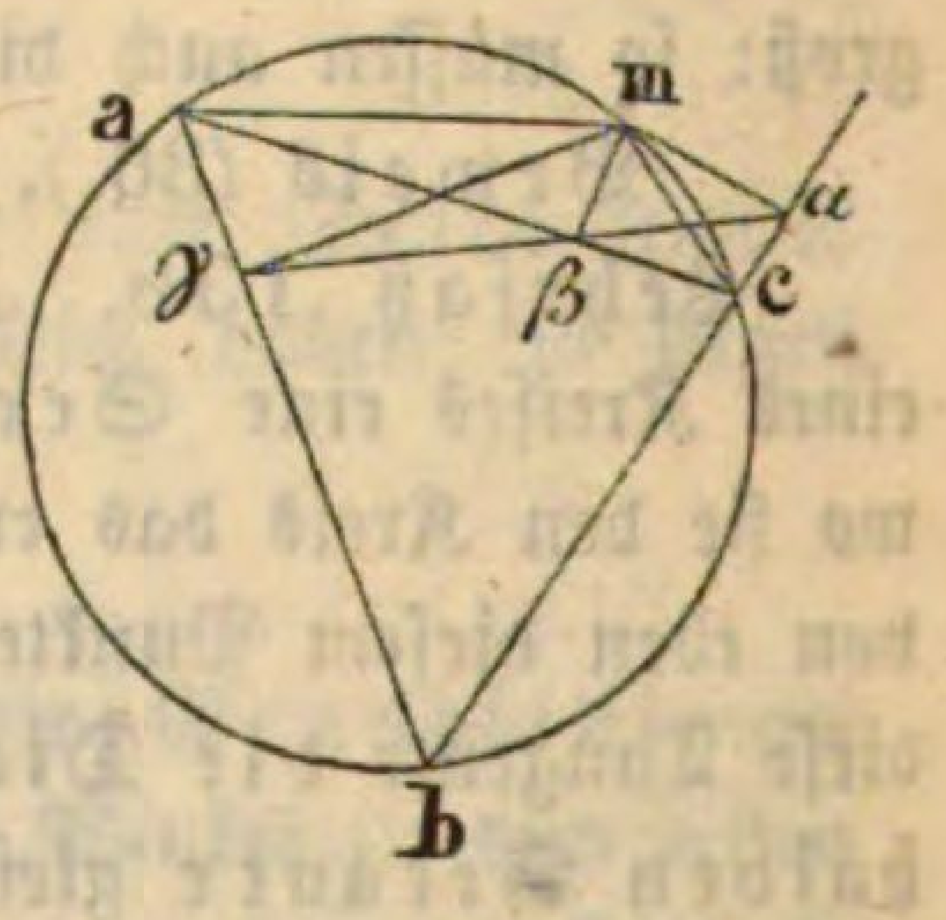
Beweis (22.) und (36.).

Lehrsatz 141. Verlängert man zwei Seiten eines Dreiecks ac und bc, und zieht $\alpha\beta$ so, daß $\angle\alpha = \angle a$: so ist das unter ac und der Verlängerung $c\beta$ dieser Seite enthaltene Rechteck $ac \times c\beta$ eben so groß, als das Rechteck, welches unter der andern Seite bc und deren Verlängerung $c\alpha$ enthalten ist. Es ist also $ac \times c\beta = bc \times c\alpha$.



Beweis (21.), (33.) und (35.).

Lehrsatz 142. Werden drei Punkte des Kreisumfanges durch gerade Linien verbunden, so daß man hierdurch ein Dreieck in dem Kreise erhält, und fället man von irgend einem Punkte des Umfanges Normalen auf die drei Seiten des Dreiecks oder deren Verlängerungen: so liegen die Fußpunkte dieser drei Normalen in gerader Linie.



Beweis. Es sey abc das Dreieck in dem Kreise; m der Punkt des Umfanges, von welchem die Normalen $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ auf die Seiten gefället sind. Man ziehe ma, mc, $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$: so ist

$$\angle m\alpha b = \angle m\gamma b = R$$

und daher in dem Viereck $\alpha m\gamma b$

$$\angle b + \angle \alpha m\gamma = 2\,R$$

aber auch $\angle b + \angle cma = 2\,R$ (22.).

Folglich ist $\angle \alpha m\gamma = \angle cma$

und daher $\angle \alpha mc = \angle \gamma ma$ (G. 3.).

Da aber in dem Viereck $\alpha c \beta m$ die Winkel bei α und $\beta = R$ sind, so läßt sich um dieses Viereck ein Kreis beschreiben; und es ist daher $\angle amc = \angle \alpha\beta c$ (21.)

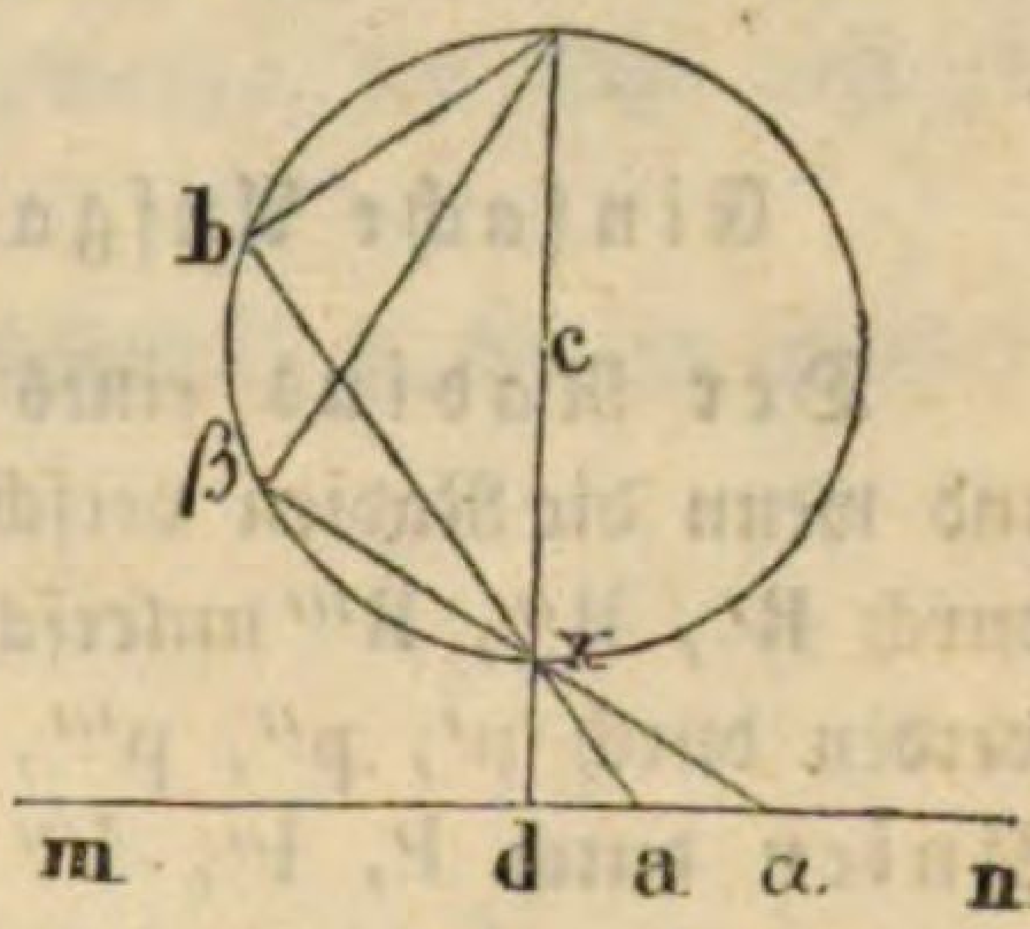
folglich ist auch $\angle \alpha\beta c = \angle \gamma ma$.

Und da $\angle a\beta m = \angle m\gamma a = R$, so kann auch ein Kreis beschrieben werden, der durch die Punkte a, m, β und γ geht. Es ist also auch $\angle \gamma\beta a = \angle \gamma ma$ (21.)

folglich ist $\angle \alpha\beta c = \angle \gamma\beta a$

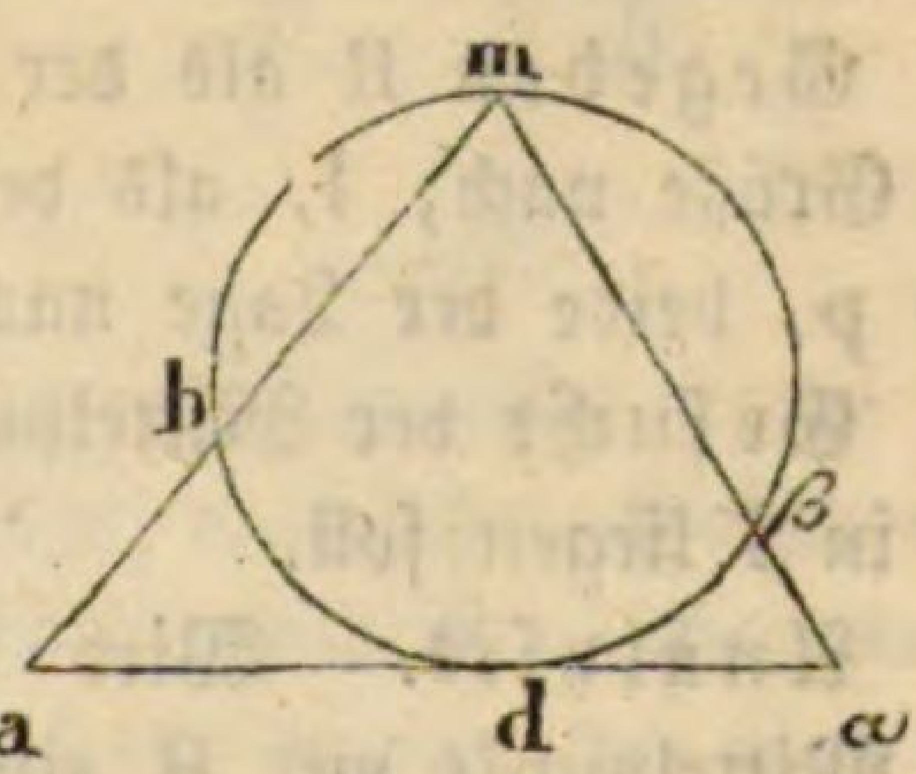
und daher $\alpha\beta$ mit $\beta\gamma$ in gerader Linie.

Lehrsatz 143. Ist ein Kreis gegeben, und eine gerade Linie mn, und man zieht von dem Mittelpunkte c die cd normal auf mn, durch welche der Kreis in x geschnitten wird: so ist, wenn man nun irgend zwei Linien ab und $\alpha\beta$ durch x zieht, welche von dem Kreise und der mn begrenzt werden, immer $ax \times xb = \alpha x \times x\beta$.



Beweis (31.) und (35.).

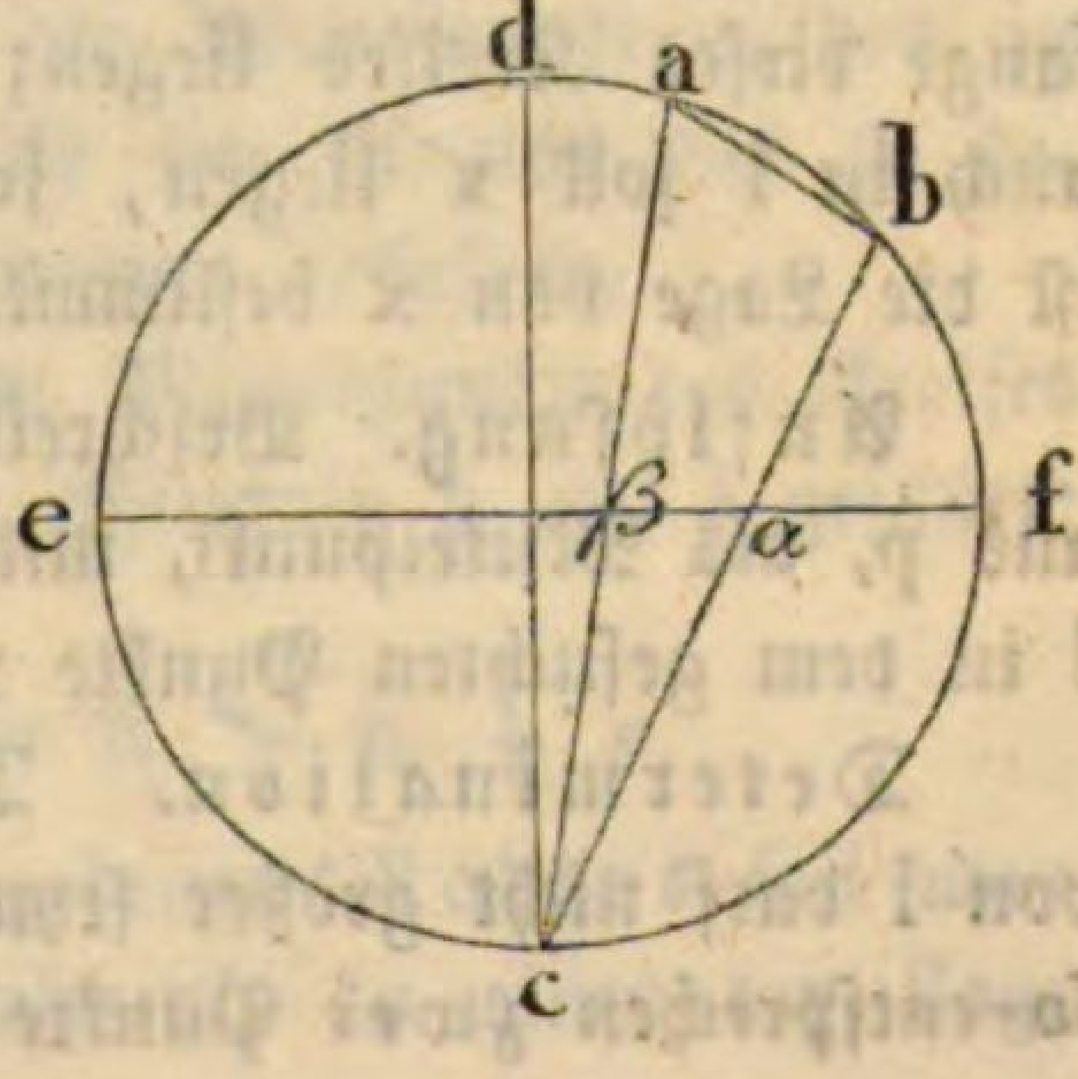
Lehrsatz 144. Legt man, an irgend einen Punkt d des Kreisumfanges, eine Tangente $a\alpha$, und verbindet die Endpunkte a und α mit einem Punkte m des Umfanges: so sind „die unter ab, am, und unter $\alpha\beta$, αm enthaltenen Rechtecke, sammt dem zweifachen Rechteck, das unter den Abschnitten ad und dα der Tangente enthalten ist", dem Quadrat der ganzen Tangente gleich. Es ist also



$$ab \times am + \alpha\beta \times \alpha m + 2\,(ad \times d\alpha) = (a\alpha)^2.$$

Beweis (36.) und (II. 4.).

Lehrsatz 145. Wenn die beiden Durchmesser cd und ef eines Kreises unter rechten Winkeln sich schneiden, und man verbindet den Endpunkt c des einen Durchmessers mit den beiden Punkten a und b des Kreisumfanges: so wird der andere Durchmesser durch die Linien ca



und cb in β und α so geschnitten, daß die vier Punkte a, b, α und β in dem Umfange desselben Kreises liegen.

Beweis (22.) und (Lhrs. 124.).

XVI. Aufgaben, die mit Hülfe der Sätze der drei ersten Bücher der Elemente sich lösen lassen.

---

§. 17.

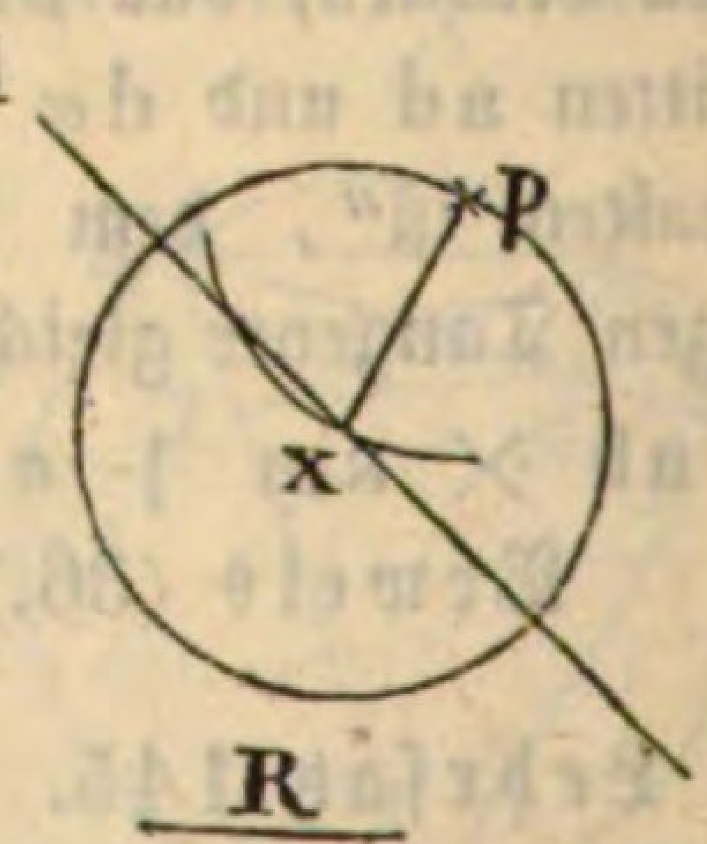
Einfache Aufgaben von den Berührungen.

Der Radius eines Kreises soll mit R bezeichnet werden; und wenn die Radien verschiedener Kreise vorkommen, so werden sie durch R′, R″, R‴ unterschieden. Der Lage nach gegebene Punkte werden durch p′, p″, p‴, und der Lage nach gegebene gerade Linien durch l′, l″, l‴ bezeichnet. Der Größe und Lage nach gegebene Kreislinien sollen durch k′, k″, k‴ bezeichnet werden.

Aufgabe 206. In einer der Lage nach gegebenen geraden Linie soll der Mittelpunkt eines, mit einem gegebenen Radius zu beschreibenden Kreises liegen, der durch einen gegebenen Punkt geht.

Gegeben R als der Radius des zu beschreibenden Kreises der Größe nach; l, als der Ort für den Mittelpunkt desselben, und p, beide der Lage nach.

Gesucht der Mittelpunkt x, der in l liegen soll.



Analysis. Wird aus p als Mittelpunkt mit R ein Kreis beschrieben, so muß x in dem Umfange dieses Kreises liegen; aber auch in l soll x liegen, folglich ist die Lage von x bestimmt.

Auflösung. Beschreibt man aus p, als Mittelpunkt, mit R einen Kreis, so schneidet Dieser l in dem gesuchten Punkte x.

Determination. Der normale Abstand des Punktes p von l darf nicht größer seyn als R; und ist dieser Abstand $<$ R, so entsprechen zwei Punkte der Lage von x.

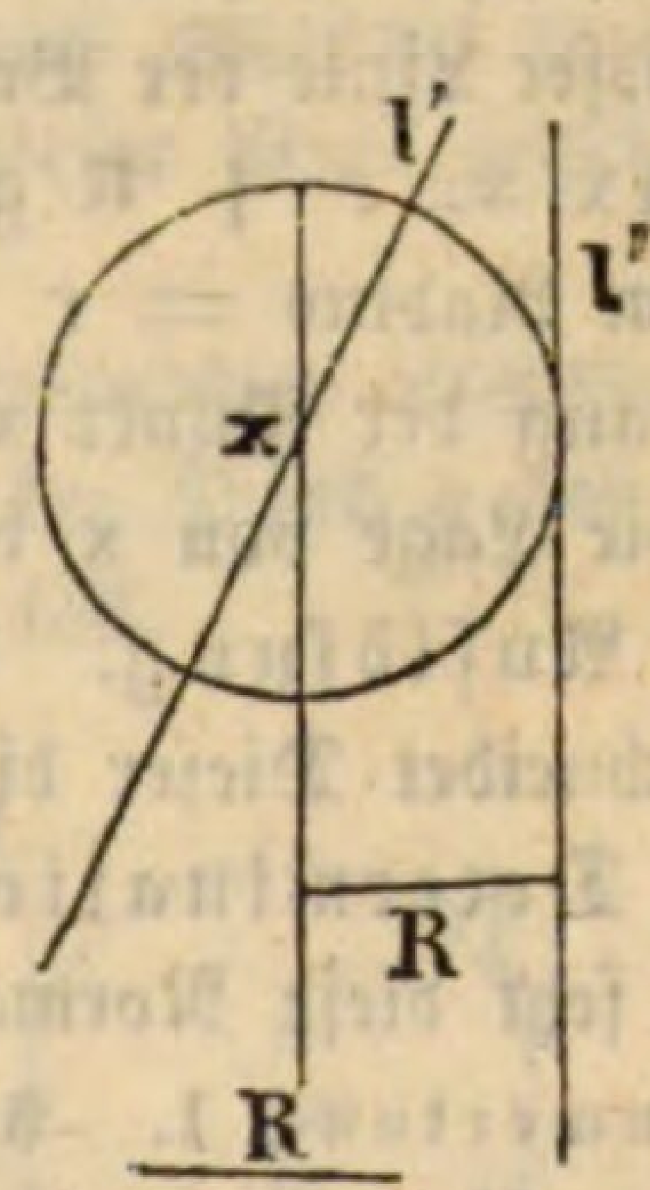
Aufgabe 207. In einer, der Größe und Lage nach gegebenen Kreislinie soll „der Mittelpunkt eines, mit einem gegebenen Radius zu beschreibenden Kreises" liegen, der durch einen der Lage nach gegebenen Punkt geht.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises der Größe nach; k, in dessen Umfang der Mittelpunkt x dieses Kreises liegen soll, und der Punkt p des Umfanges des zu beschreibenden Kreises.

Gesucht die Lage von x.

Aufgabe 208. In einer der Lage nach gegebenen geraden Linie soll „der Mittelpunkt eines, mit einem gegebenen Radius zu beschreibenden Kreises" liegen, der eine zweite, der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Gegeben l′, in welcher der Mittelpunkt x des zu beschreibenden Kreises liegen soll, und l″ als eine Tangente desselben; Beide der Lage nach und R der Größe nach.



Gesucht die Lage von x.

Auflösung. Zieht man in einem Abstande = R von l″ eine Parallele mit l″, so muß x in dieser Parallele liegen; aber auch in l′ liegt x, folglich ist die Lage dieses Punktes bestimmt.

Determination. l′ und l″ dürfen nicht parallel seyn.

Aufgabe 209. In dem Umfange eines der Größe und Lage nach gegebenen Kreises soll „der Mittelpunkt eines mit einem gegebenen Radius zu beschreibenden Kreises" liegen, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Gegeben k, in dessen Umfang der Mittelpunkt x des zu beschreibenden Kreises liegen soll, R als der Radius des zu beschreibenden Kreises, und l als eine Tangente desselben.

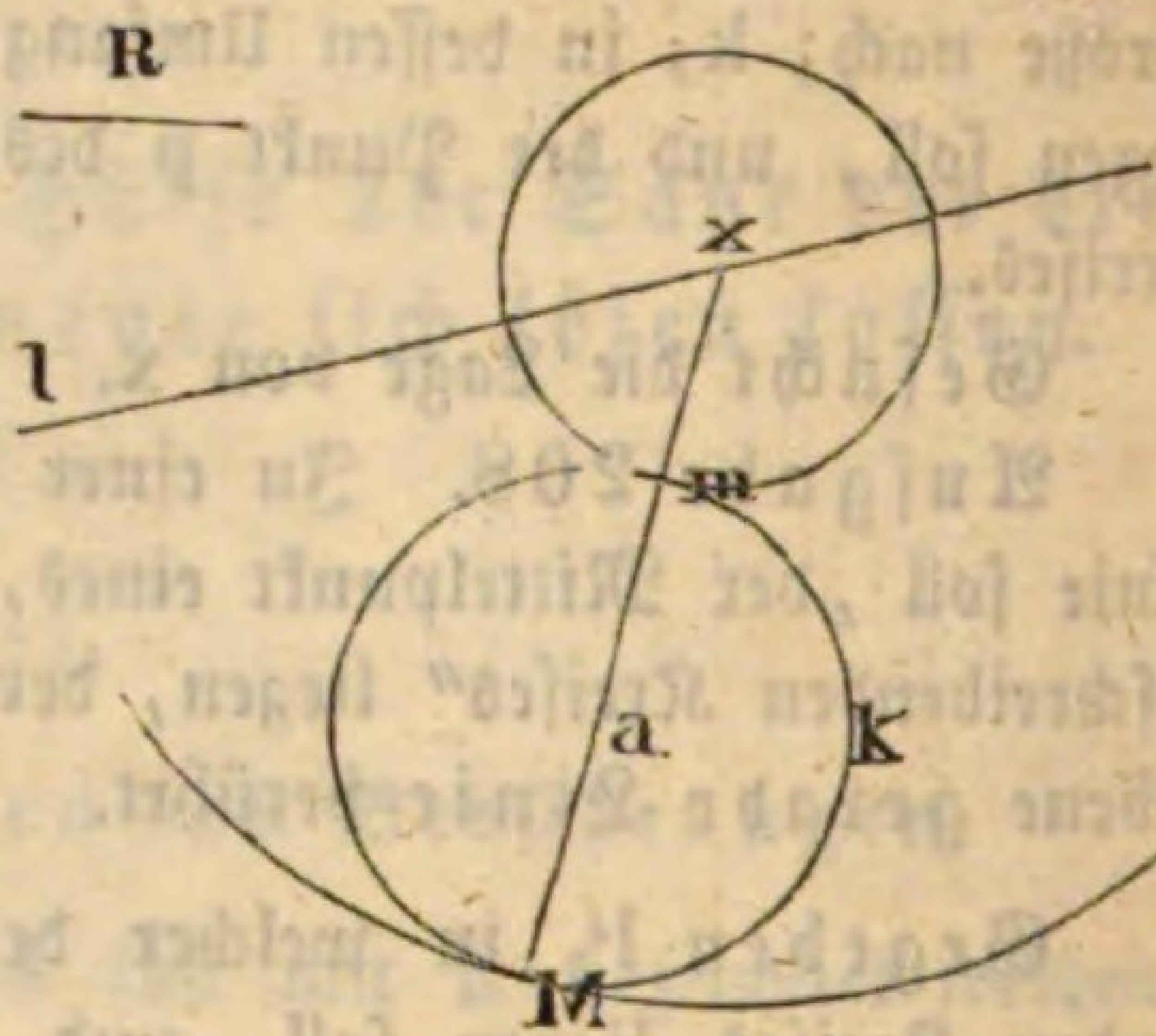
Determination. Wird von dem Mittelpunkte des Kreises k, dessen Radius = r seyn mag, eine Normale h auf l gefället: so darf nicht seyn

$$R < h - r, \text{ und auch nicht } R > h + r.$$

Aufgabe 210. Mit einem gegebenen Radius soll man einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage

nach gegebenen geraden Linie liegt, und der einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Gegeben l, in welcher der Mittelpunkt x des zu beschreibenden Kreises liegen soll, der Lage nach; der Radius R dieses Kreises der Größe nach; und k der Größe und Lage nach, den der zu beschreibende Kreis berühren soll.



Analysis. Da k der Größe und Lage nach gegeben ist, so ist auch der Mittelpunkt a desselben gegeben, und sein Halbmesser, der = r seyn soll. Ist nun x der gesuchte Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises: so muß, wenn man a mit x durch ax verbindet, in dieser Linie der Berührungspunkt m liegen (11. und 12.); und es ist ax = r + R gegeben, also auch der Kreis, der aus a mit einem Radius = r + R beschrieben werden kann, und in dessen Umfang der Punkt x liegt; aber auch in l soll x liegen, folglich ist die Lage von x bestimmt.

Auflösung. Aus a beschreibe mit r + R einen Kreis, so schneidet Dieser die l in dem gesuchten Mittelpunkte x.

Determination. Fället man von a eine Normale auf l, und setzt diese Normale = h, so darf nicht seyn r + R < h.

Anmerkung 1. Aus x kann auch ein Kreis beschrieben werden, der k in M berührt; und es ist alsdann xM = R, also ax = R — r. Daher kann man den Punkt x auch in der Art bestimmen, daß aus a mit R — r ein Kreis beschrieben wird. Diese Auflösung ist aber nur alsdann möglich, wenn R — r nicht kleiner als h ist.

Anmerkung 2. Die gegebene Auflösung setzt zwar voraus, „daß l außerhalb k liege“; sie ist aber auch alsdann brauchbar, wenn k von l geschnitten wird; und es ist hier auch eine zweite Auflösung möglich, so daß der zu beschreibende Kreis innerhalb des gegebenen liegt, wenn r > R, und dabei r — R nicht kleiner ist als h.

Aufgabe 211. Mit einem gegebenen Radius soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Mittelpunkt in dem Umfange eines der Größe und Lage nach gegebenen Kreises liegt, und der einen andern der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises, dessen Mittelpunkt x in dem Umfange von k′ liegen soll, und der k″ berührt.

Gesucht die Lage von x.

Aufgabe 212. Man soll mit einem gegebenen Radius einen Kreis beschreiben, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte derselben berührt.

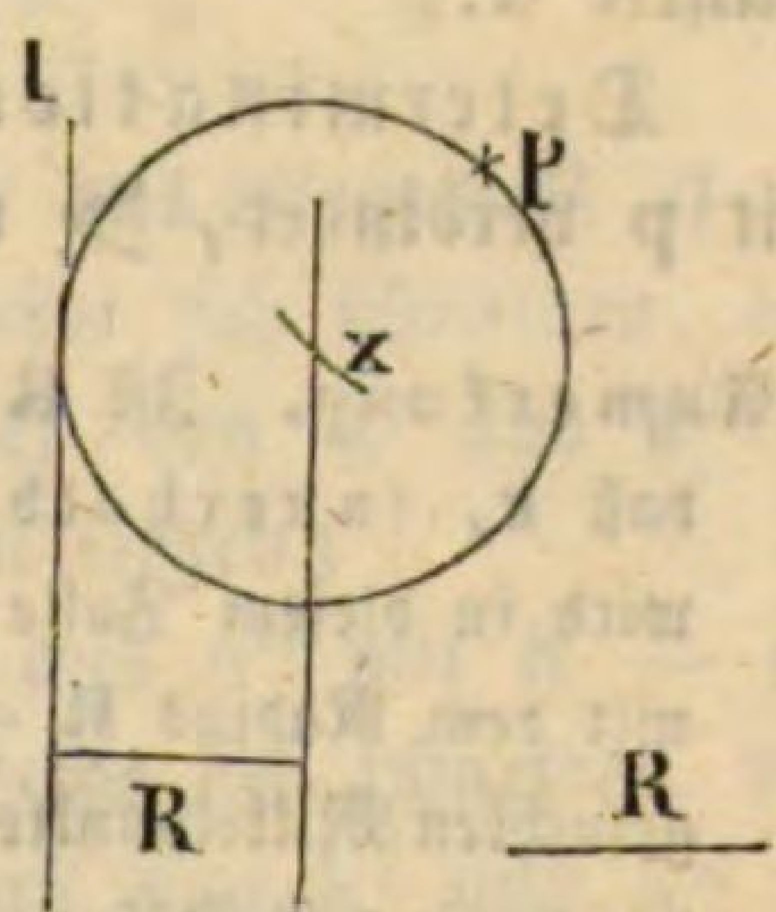
Aufgabe 213. Mit einem gegebenen Radius soll man einen Kreis beschreiben, der einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis in einem in dem Umfange desselben gegebenen Punkte berührt.

Aufgabe 214. Man soll mit einem gegebenen Radius einen Kreis beschreiben, der durch zwei der Lage nach gegebene Punkte geht.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises, und die Punkte p′ und p″ der Lage nach, die in dem Umfange desselben liegen sollen.

Aufgabe 215. Mit einem gegebenen Radius soll ein Kreis beschrieben werden, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt, und durch einen außerhalb dieser Linie gegebenen Punkt geht.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises, die Tangente l desselben der Lage nach, und auch der Punkt p der Lage nach, der in dem Umfange des Kreises liegen soll.



Auflösung. In einem Abstande = R von l ziehe eine Linie parallel der l, und aus p als Mittelpunkt beschreibe mit dem Radius R einen Kreis: so schneidet dieser die gezogene Parallele in dem gesuchten Mittelpunkte x.

Determination. Wird der normale Abstand des Punktes p von l = h gesetzt, so darf nicht seyn h > 2 R.

Aufgabe 216. Mit einem gegebenen Radius soll ein Kreis beschrieben werden, der zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises der Größe nach, und zwei gerade Linien l′ und l″, die Tangenten desselben seyn sollen, der Lage nach.

Auflösung. Man ziehe eine Linie parallel l′, und eine andere parallel l″, Beide in einem Abstande = R von diesen Linien: so schneiden sich beide Parallelen in dem gesuchten Mittelpunkte x.

Determination. Es darf l′ der l″ nicht parallel seyn; es sey denn, daß der Abstand Beider von einander = 2 R ist, und in diesem Falle ist die Aufgabe unbestimmt.

Aufgabe 217. Der Radius eines Kreises ist gegeben; man soll diesen Kreis so beschreiben, daß er durch einen der Lage nach gegebenen Punkt geht, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises; der Punkt p, der in dem Umfange desselben liegen soll, der Lage nach; und der Kreis k, den er berührt, der Größe und Lage nach.



Analysis. Ist x der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises, und a der von k, dessen Radius = r seyn soll: so ist ax = r + R und px = R gegeben, aber auch die Punkte a und p sind gegeben. Folglich auch x.

Auflösung. Aus a, als Mittelpunkt, beschreibe einen Kreis mit dem Radius = r + R, und aus p als Mittelpunkt mit R: so schneiden diese beiden Kreise sich in dem gesuchten Punkte x.

Determination. Es darf nicht seyn die Linie, welche a mit p verbindet, > r + 2 R.

Anmerkung. Ist R > r, so kann der Kreis auch so beschrieben werden, daß k, innerhalb desselben liegend, ihn berührt. Der Mittelpunkt wird in diesem Falle gefunden, wenn man aus a einen Kreis beschreibt mit dem Radius R — r, und aus p mit R; Beide schneiden sich in dem gesuchten Mittelpunkte. In diesem Falle darf aber nicht seyn ap > 2R — r, wenn eine Auflösung möglich seyn soll.

Aufgabe 218. Mit einem gegebenen Radius soll ein Kreis beschrieben werden, der eine der Lage nach gegebene Linie zur Tangente hat, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises; die Linie l der Lage nach, welche eine Tangente desselben seyn soll; und der Kreis k der Größe und Lage nach, der von ihm berührt wird.

Analysis. Zieht man eine der l parallele Linie in einem Abstande = R von derselben, so muß der gesuchte Mittelpunkt in dieser Linie liegen; und eben so auch in der Kreislinie, die aus dem Mittelpunkte a von k mit R + r beschrieben werden kann. Der Durchschnittspunkt Beider ist daher der gesuchte Punkt x, wenn k außerhalb des zu beschreibenden Kreises liegen soll. Wird die Parallele aber von einem, aus a mit R − r beschriebenen Kreise geschnitten: so ist Dieses der gesuchte Mittelpunkt für den Fall, wenn k, innerhalb des zu beschreibenden liegend, ihn berühren soll.

Determination. Ist r der Radius von k, und der Abstand des Mittelpunktes a von l = h: so darf nicht seyn für den ersten Fall $h > 2R + r$, und für den zweiten Fall darf nicht seyn $h > 2R - r$.

Aufgabe 219. Man soll mit einem gegebenen Radius einen Kreis beschreiben, der zwei der Größe und Lage nach gegebene Kreise berührt.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises, und die Kreise k′ und k″ der Größe und Lage nach, die derselbe berühren soll.

Analysis. Ist a′ der Mittelpunkt und r′ der Radius von k′
und a″ „ „ „ r″ „ „ „ k″
so ist

1) wenn man aus a′ mit $R + r'$, und aus a″ mit $R + r''$ Kreise beschreibt, der Punkt, in welchem beide sich schneiden, der Mittelpunkt x des gesuchten Kreises, welcher von k′ und k″ so berührt wird, daß beide außerhalb desselben liegen;

2) wenn man aus a′ mit $R - r'$ und aus a″ mit $R - r''$ Kreise beschreibt, der Punkt, in welchem Beide sich schneiden, der gesuchte Mittelpunkt x, und der Kreis wird von k′ und k″ so berührt, daß Beide innerhalb desselben liegen;

3) wenn man aus a′ mit $R + r'$ und aus a″ mit $R - r''$ Kreise beschreibt, so schneiden sich Beide in dem gesuchten Mittelpunkte x des Kreises; der von den gegebenen Kreisen so berührt wird, daß k′ außerhalb und k″ innerhalb desselben liegt.

Determination. Verbindet man a′ mit a″ durch eine gerade Linie a′a″: so darf nicht seyn

in dem ersten Falle $a'a'' > 2R + r' + r''$,
„ „ zweiten „ $a'a'' > 2R - r' - r''$,
„ „ dritten „ $a'a'' > 2R + r' - r''$.

Anmerkung. Sind die Kreise k′ und k″ so gegeben, daß k″ innerhalb k′ liegt, so muß der zu beschreibende Kreis ebenfalls innerhalb k′ liegen, und daher $R < r'$ seyn; und es sind alsdann wieder zwei Fälle möglich, da k″ entweder innerhalb oder außerhalb des zu beschreibenden Kreises denselben berühren kann.

Aufgabe 220. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch zwei der Lage nach gegebene Punkte geht, und dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen Linie liegt.

Gegeben die Punkte p′ und p″ der Lage nach, die in dem Umfange des Kreises liegen sollen; und l der Lage nach, in welcher Linie der Mittelpunkt x liegt.

Aufgabe 221. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch zwei, der Lage nach gegebene Punkte geht, und dessen Mittelpunkt in dem Umfange eines, der Größe und Lage nach gegebenen, Kreises liegt.

Gegeben die Punkte p′ und p″, die in dem Umfange des zu beschreibenden Kreises liegen sollen; und k der Größe und Lage nach, in dessen Umfang der Mittelpunkt x liegt.

Anmerkung. Die Aufgabe 220. wird unbestimmt, wenn p′ und p″ auf verschiedenen Seiten von l liegen, und die Linie, welche p′ mit p″ verbindet, von l normal halbirt wird. Die Aufgabe 221. läßt nur alsdann eine Auflösung zu, wenn man p′ mit p″ verbindet, und diese Linie, normal halbirt, diese Halbirungslinie k trifft. Wird k geschnitten, so giebt es immer zwei verschiedene Lagen für x.

Aufgabe 222. Drei gerade Linien sind der Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in der einen dieser Linien liegt und der die andern beiden Linien berührt.

Gegeben l′, l″ und l‴ der Lage nach; in l′ soll der Mittelpunkt x des zu beschreibenden Kreises liegen, l″ und l‴ sollen Tangenten desselben seyn.

Auflösung. Man verlängere l″ und l‴, bis sie sich schneiden, und halbire den von denselben gebildeten Winkel: so liegt der Mittelpunkt x in dem Durchschnittspunkte der Halbirungslinie und l′. Sind l″ und l‴ parallel, so liegt der Mittelpunkt x in der Linie, die denselben ebenfalls parallel ist, und von Beiden gleich weit absteht.

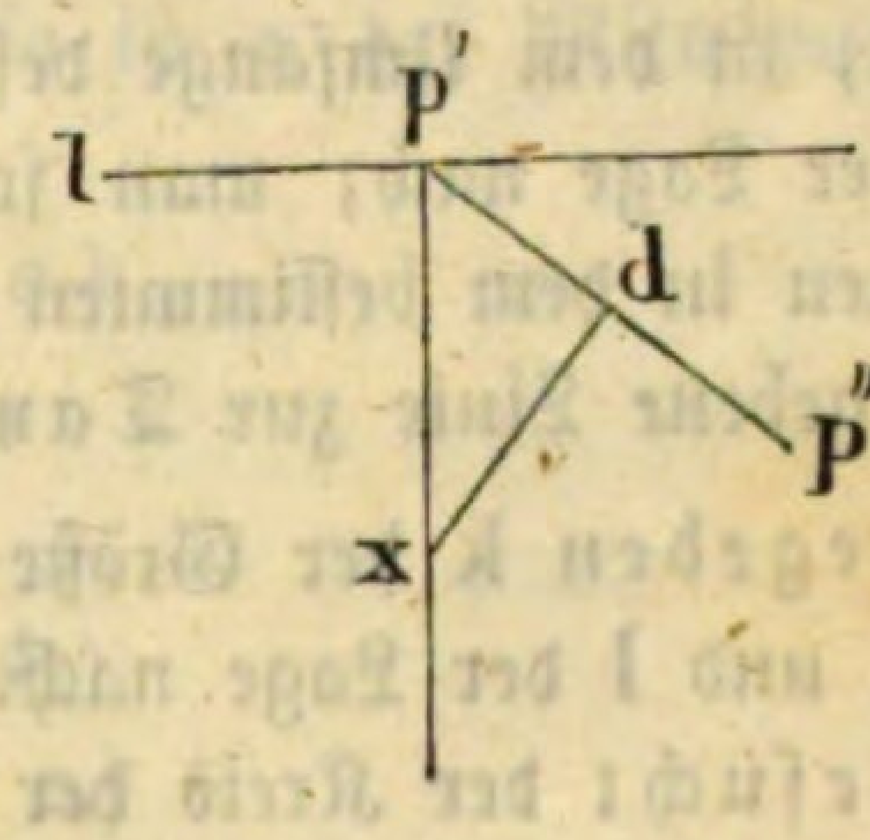
Determination. l′ muß wenigstens Eine der beiden übrigen Linien schneiden, und zwar unter einem Winkel, der größer ist, als die Hälfte des Winkels, unter welchem l″ und l‴ sich schneiden.

Aufgabe 223. Zwei gerade Linien sind der Lage nach, und ein Kreis der Größe und Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in dem Umfange des gegebenen Kreises liegt, und der die beiden der Lage nach gegebenen Linien berührt.

Gegeben l′, l″ der Lage nach, und es sollen diese Linien Tangenten des zu beschreibenden Kreises seyn; und k der Größe und Lage nach. In dem Umfange von k soll der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises liegen.

Aufgabe 224. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt der Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der durch diesen Punkt geht, und die Linie in einem gegebenen Punkte derselben berührt.

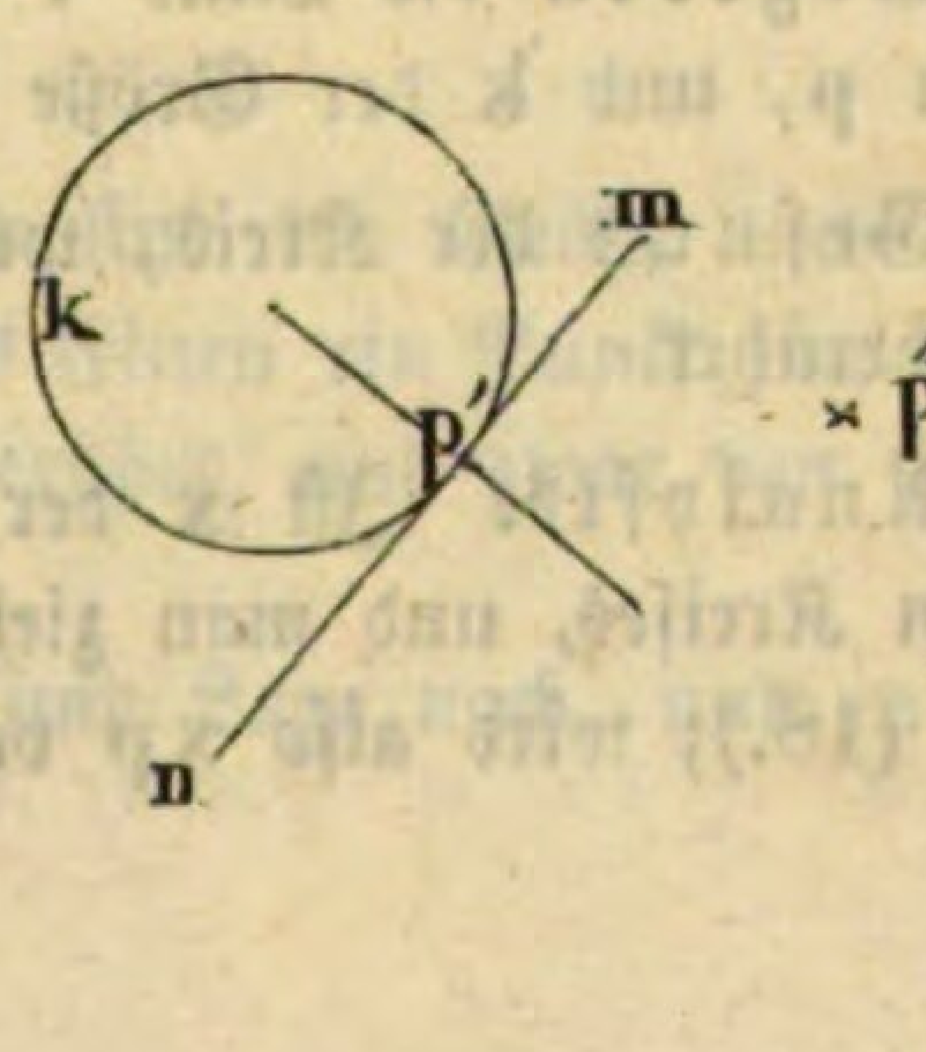
Gegeben die Linie l; welche Tangente des zu beschreibenden Kreises seyn soll, der sie in dem Punkte p′ berührt, und der zugleich durch den zweiten Punkt p″ geht.



Analysis. Errichtet man in p′ eine Normale auf l, so muß in dieser Normale des Kreises Mittelpunkt x liegen (19.). Derselbe muß aber auch in der Normale dx liegen, die auf p′p″ in dem Halbirungspunkte d dieser Linie errichtet werden kann; folglich ist die Lage von x bestimmt.

Aufgabe 225. Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, und in dem Umfange desselben ein Punkt, und ein zweiter Punkt der Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen in dem gegebenen Punkte berührt, und in dessen Umfang der andere gegebene Punkt liegt.

Gegeben k der Größe und Lage nach, und in dem Umfange desselben der Punkt p′ und außerdem p″.



Gesucht der Kreis der Größe und Lage nach, der k in p′ berührt und durch p″ geht.

Analysis. Zieht man in p′

eine Tangente an k, so muß der zu beschreibende Kreis Diese ebenfalls in p' berühren. Daher kömmt es bloß darauf an, „einen Kreis zu beschreiben, der die mn in p' berührt, und der durch p'' geht''; wie bei Aufg. 224.

Aufgabe 226. Zwei gerade Linien sind der Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der beide Linien berührt, und zwar die Eine in einem bestimmten Punkte derselben.

Gegeben l' und l'', und in l' der Punkt p.

Gesucht der Kreis der Größe und Lage nach, der l' in p berührt und auch l'' zur Tangente hat.

Auflösung. Verlängere l' und l'', bis sie sich schneiden; halbire den Winkel, unter welchem sie sich schneiden; und errichte in p auf l' eine Normale: so trifft diese die Linie, welche den Winkel halbirt, in dem Mittelpunkte x des zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 227. Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, in dem Umfange desselben ein Punkt, und außerdem eine Linie der Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen in dem bestimmten Punkte berührt, und die der Lage nach gegebene Linie zur Tangente hat.

Gegeben k der Größe und Lage nach, p in dem Umfange von k, und l der Lage nach.

Gesucht der Kreis der Größe und Lage nach, der k in dem Punkte p berührt, und der auch l berührt.

Analysis. Zieht man durch p an k eine Tangente: so muß der zu beschreibende Kreis Diese in p berühren, und auch l. Die Aufgabe ist also nicht verschieden von 226.

Aufgabe 228. Es ist eine gerade Linie der Lage nach gegeben, und in derselben ein Punkt, und ein Kreis der Größe und Lage nach; es soll ein Kreis beschrieben werden, der die gegebene Linie in p, und auch den Kreis k berührt.

Gegeben die Linie l der Lage nach, und in derselben der Punkt p, und k der Größe und Lage nach.

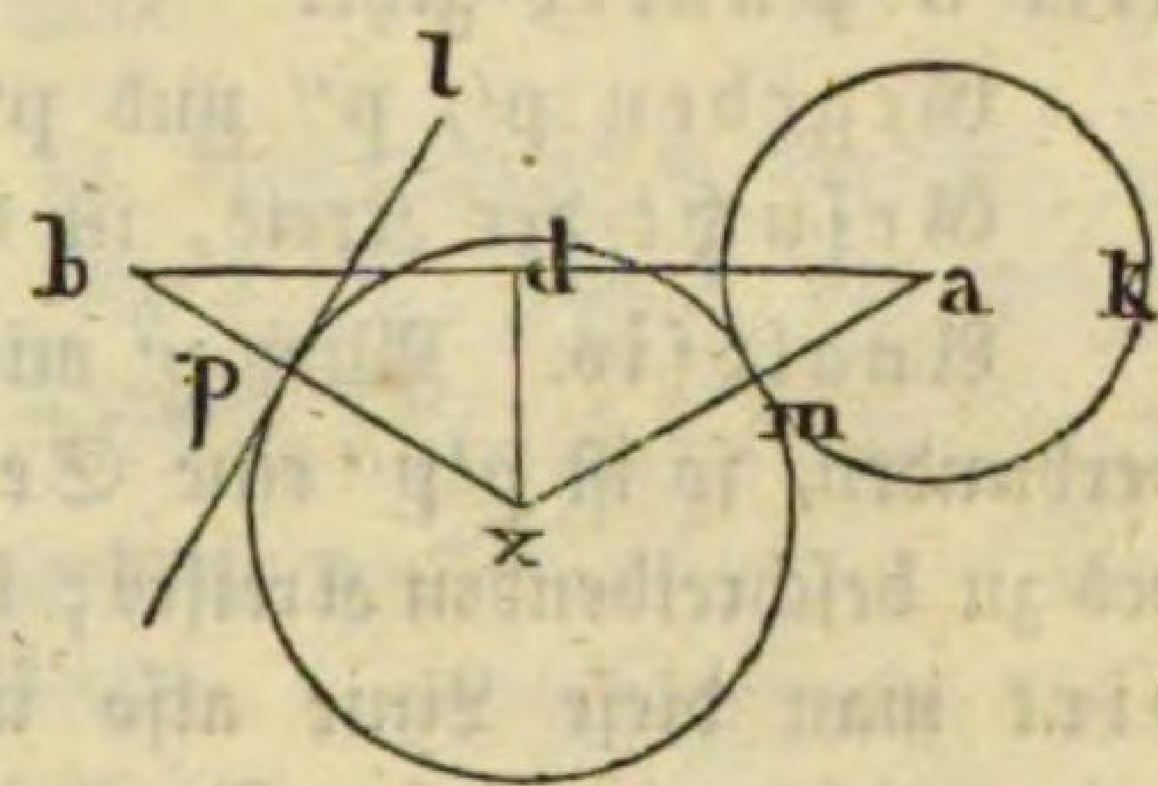
Gesucht der Kreis, welcher l in p berührt, und der k ebenfalls berührt.

Analysis. Ist x der gesuchte Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises, und man zieht xp, so steht diese Linie normal auf l (18.); wird also xp verlängert, und pb = ma genommen:

so ist b gegeben, aber auch a ist gegeben, also ab der Größe und Lage nach, und daher auch $\llcorner$ b.

$$\begin{array}{l} \text{Da } xp = xm \\ \text{und } pb = ma \\ \hline \text{so ist } bx = ax \end{array}$$

folglich $\triangle$ abx gleichschenklig. Und da die **Grundlinie** ab desselben und der **Winkel** b an der Grundlinie gegeben ist, so ist auch x gegeben.



Auflösung. In p errichte man eine Normale, und nehme pb = ma so groß, als der Radius des gegebenen Kreises k ist; verbinde a mit b, halbire ab in d, und errichte in diesem Punkte auf ab eine Normale; verlängere bp, bis sie diese Normale in x schneidet: so ist x der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis.

$$\begin{array}{ll} \text{Da } db = da & \text{(p. c.)} \\ \llcorner xdb = \llcorner xda & \text{„} \\ \text{und } xd = xd & \\ \hline \text{so ist auch } xb = xa & \text{(I. 4.)} \\ \text{aber } pb = ma & \text{(p. c.)} \\ \hline \text{Folglich ist } xp = xm. & \end{array}$$

Da nun l normal auf xp in p ist, so ist l eine **Tangente** des mit xp aus x beschriebenen Kreises; und weil xma eine gerade Linie ist, so wird k von diesem Kreise in m berührt.

Anmerkung. Der Kreis kann auch so beschrieben werden, „daß k, innerhalb desselben liegend, ihn berührt"; wofür die Construction aus dem Angegebenen gefunden werden kann.

Aufgabe 229. Zwei Kreise sind der Größe und Lage nach gegeben, und in dem Umfange des Einen ein Punkt; man soll **einen Kreis** beschreiben, der Beide berührt, und zwar den Einen in dem gegebenen Punkte.

Gegeben k′ und k″ der Größe und Lage nach, und in dem Umfange von k′ der Punkt p.

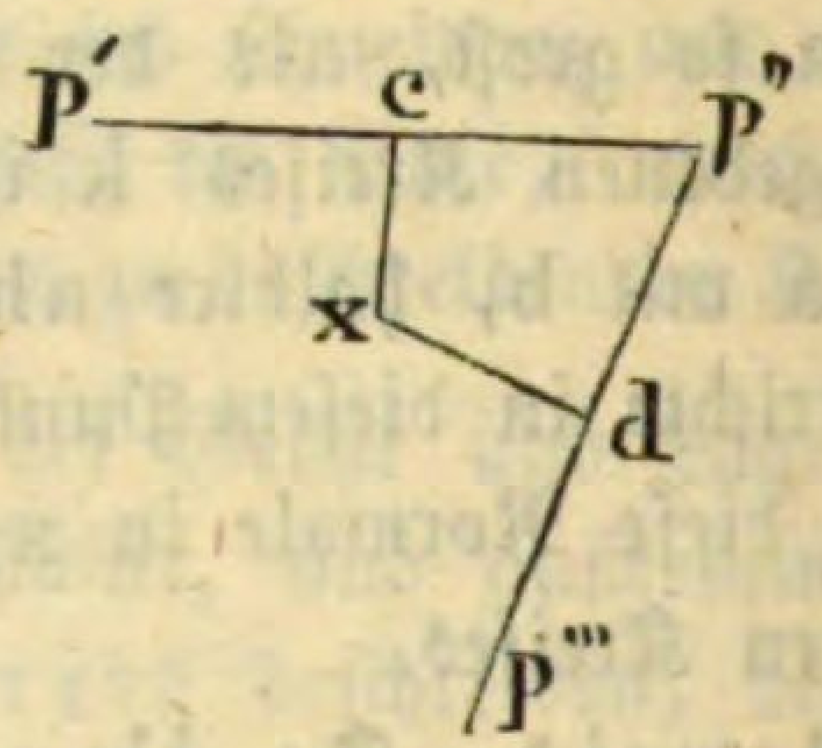
Gesucht der Kreis, welcher k' in p berührt, und der auch k'' berührt.

Auflösung. Zieht man durch p an k' eine Tangente, so muß der zu beschreibende Kreis Diese in p berühren; und sonach ist nun die Aufgabe von der vorigen nicht verschieden.

Aufgabe 230. Drei Punkte sind gegeben, die nicht in gerader Linie liegen; man soll einen Kreis beschreiben, der durch alle 3 Punkte geht.

Gegeben p', p'' und p'''.

Gesucht der Kreis, in dessen Umfang diese Punkte liegen.



Analysis. Wird p' mit p'' verbunden, so ist p'p'' eine Sehne des zu beschreibenden Kreises; halbirt man diese Linie also in c, und errichtet in diesem Punkte eine Normale auf p'p'', so muß der gesuchte Mittelpunkt x in dieser Linie liegen. Und eben so muß er auch in der Linie liegen, welche in dem Halbirungspunkte d der p''p''' normal auf dieser Linie ist; und hierdurch ist x bestimmt.

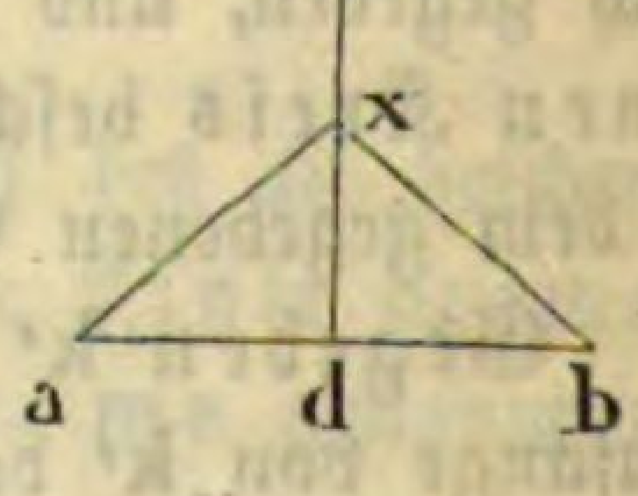
---

§. 18.

Aufgaben von den Sehnen im Kreise.

Aufgabe 231. Von einem Kreise ist eine Sehne und der Radius der Größe nach gegeben; man soll den Abstand der Sehne von dem Mittelpunkte des Kreises finden.

Gegeben die Sehne **S** und der Radius **R** des Kreises, Beide der Größe nach.



Auflösung. Beschreibt man ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem **R** die Hypotenuse ist, und $\frac{1}{2}$ **S** die eine Kathete: so ist die andere Kathete der Abstand dieser Sehne von dem Mittelpunkte des Kreises (3.). Ist also ab = **S** die gegebene Sehne, und man halbirt dieselbe in d; errichtet in diesem Punkte eine Normale dm

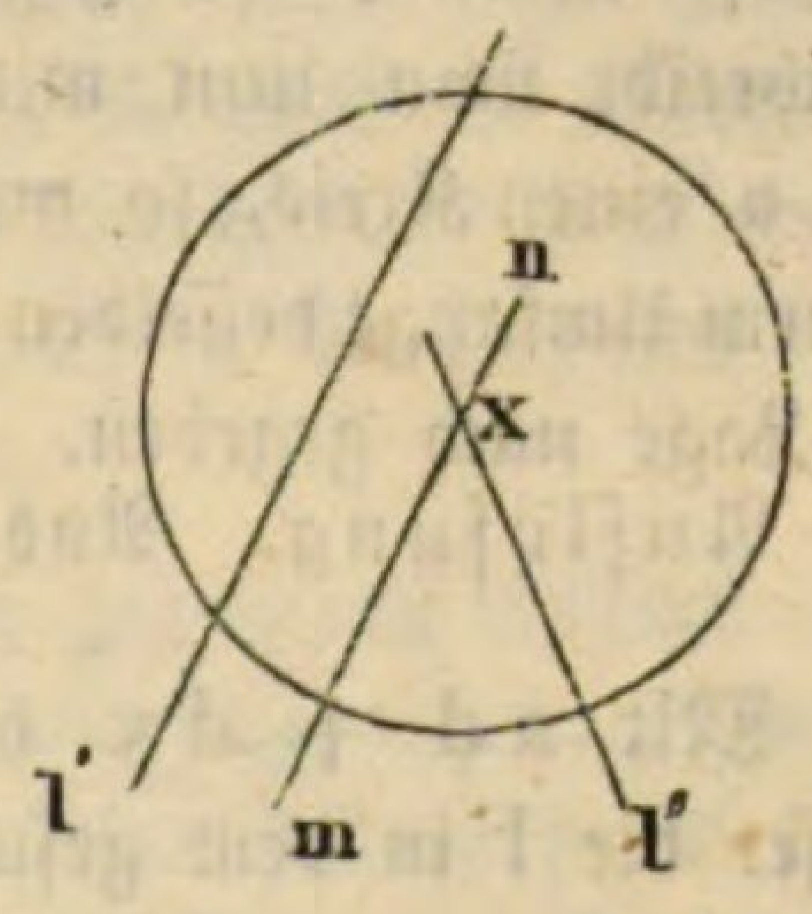
auf ab, und beschreibt aus a mit R einen Kreis, der die dm in x schneidet: so ist dx der gesuchte Abstand.

Determination. Es darf nicht seyn $\frac{1}{2}$ S > R.

Aufgabe 232. Mit einem gegebenen Radius soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen Linie liegt; und der eine andere der Lage nach gegebene Linie so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück derselben Sehne des Kreises wird.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises; die Linie l'', in welcher der Mittelpunkt liegen soll; und l' von welcher ein Stück = S Sehne des Kreises werden soll.

Analysis. Da S und R gegeben sind, so ist auch der Abstand des Mittelpunktes von S gegeben (Aufgabe 231.); zieht man also in diesem Abstande die mn parallel der l', so muß in mn der Mittelpunkt des Kreises liegen. Aber auch in l'' soll er liegen; folglich liegt er in dem Punkte x, in welchem mn und l'' sich schneiden.



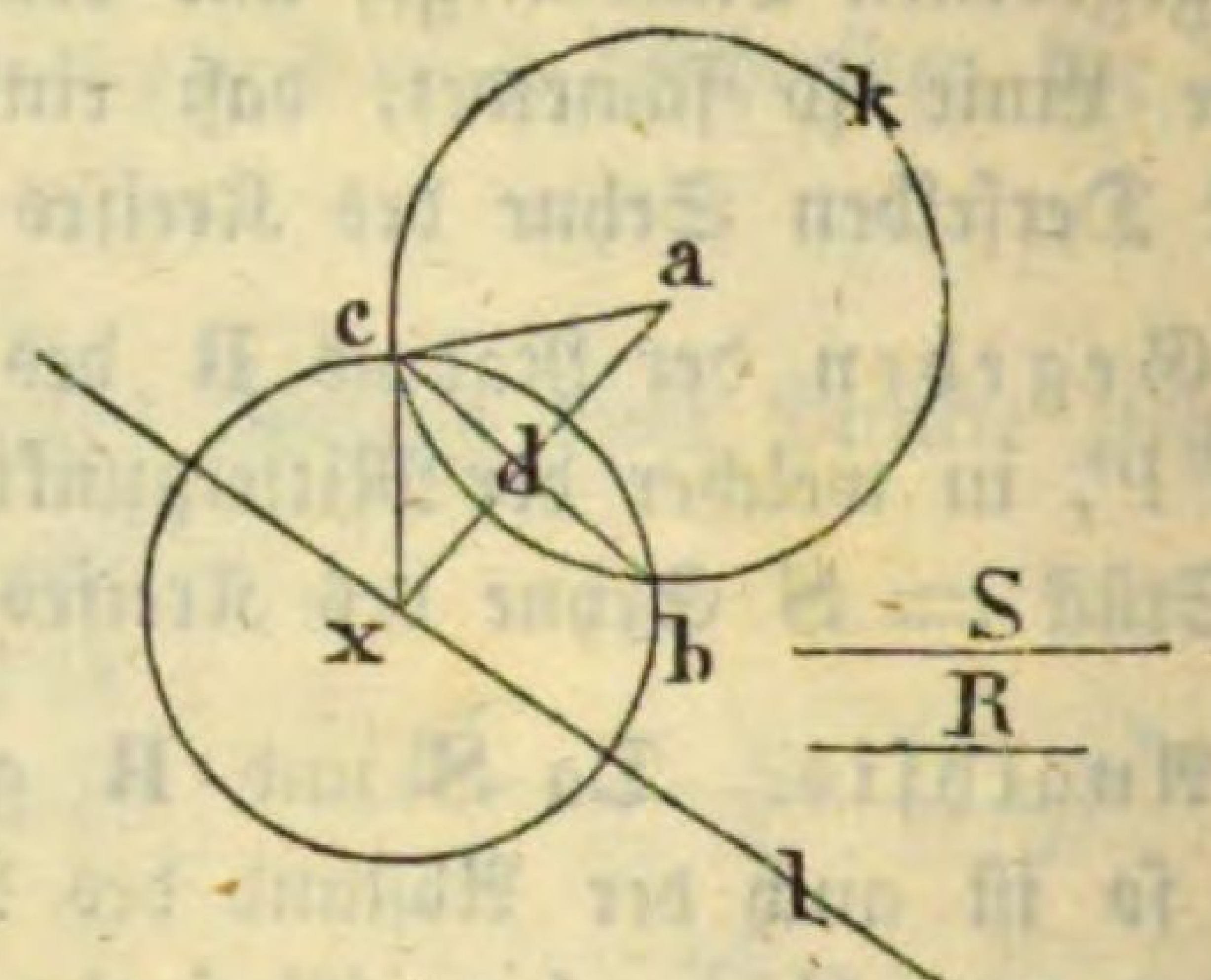
Determination. Es darf l'' nicht parallel mit l' seyn.

Aufgabe 233. Mit einem gegebenen Radius = R soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Mittelpunkt in dem Umfange eines der Größe und Lage nach gegebenen Kreises k liegt; und der eine der Lage nach gegebene gerade Linie l so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück derselben, = S, Sehne des Kreises werde.

Aufgabe 234. Man soll mit einem gegebenen Radius einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie liegt, und der einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis so schneidet: daß Beide eine der Größe nach gegebene Sehne gemein haben.

Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises, der Größe; die Linie l der Lage nach, in welcher der Mittelpunkt x des zu beschreibenden Kreises liegen soll; und der Kreis k der Größe und Lage nach, welcher von dem zu beschreibenden so geschnitten werde, daß Beide die der Größe nach gegebene Sehne S gemein haben.

Analysis. Es sey x der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises. Da k der Größe und Lage nach gegeben ist, so ist auch der Radius ac = r desselben gegeben; aber auch die Sehne bc = S ist gegeben, folglich der Abstand ad derselben von dem Mittelpunkte a (Aufg. 231.). Da xc = R und bc = S gegeben sind: so ist auch der Abstand der cb von x, also xd der Größe nach gegeben. Da ∟ adc = R und auch ∟ xdc = R (3.), so liegt ad mit xd in gerader Linie (I. 14.); da nun ad und xd gegeben sind, so ist auch ax gegeben. Beschreibt man nun mit ax aus a einen Kreis, so muß x in dem Umfange desselben liegen; aber auch in l liegt x, folglich ist x der Lage nach gegeben.



Auflösung. Aus S und ac = r suche ad (Aufg. 231.)
„ „ „ R „ suche xd.

Mit ad + dx beschreibe aus a einen Kreis, so schneidet Dieser die l in dem gesuchten Mittelpunkte x.

Determination. Der normale Abstand des Punktes a von l darf nicht größer, als ad + dx seyn; und wenn dieser Abstand kleiner ist, als ad + dx, so giebt es für x zwei verschiedene Punkte in l.

Aufgabe 235. Zwei Kreise k′ und k″ sind der Größe und Lage nach gegeben; man soll mit einem gegebenen Radius = R einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in dem Umfange von k′ liegt, und der k″ so schneidet, daß Beide eine der Größe nach gegebene Sehne, = S, gemein haben.

Aufgabe 236. Mit einem gegebenen Radius soll ein Kreis beschrieben werden, der durch einen der Lage nach gegebenen Punkt geht, und eine der Lage nach gegebene Linie so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück dieser Linie Sehne des Kreises werde.



Gegeben der Radius R des zu beschreibenden Kreises; der Punkt p, der in dem Umfange desselben liegen soll; und die Linie l, von welcher ein der Größe nach gegebenes Stück, = S, eine Sehne des Kreises sey.

Analysis. Da S und R gegeben sind, so ist auch der Abstand des Mittelpunktes x des zu beschreibenden Kreises von S, und also auch von l gegeben. Wird in diesem Abstande eine Linie mn der ab parallel gezogen, so muß in mn der Mittelpunkt des Kreises liegen, der durch p gehen soll, und dessen Radius = R man kennt. Die Auflösung ist daher nun der von Aufg. 206. gleich.

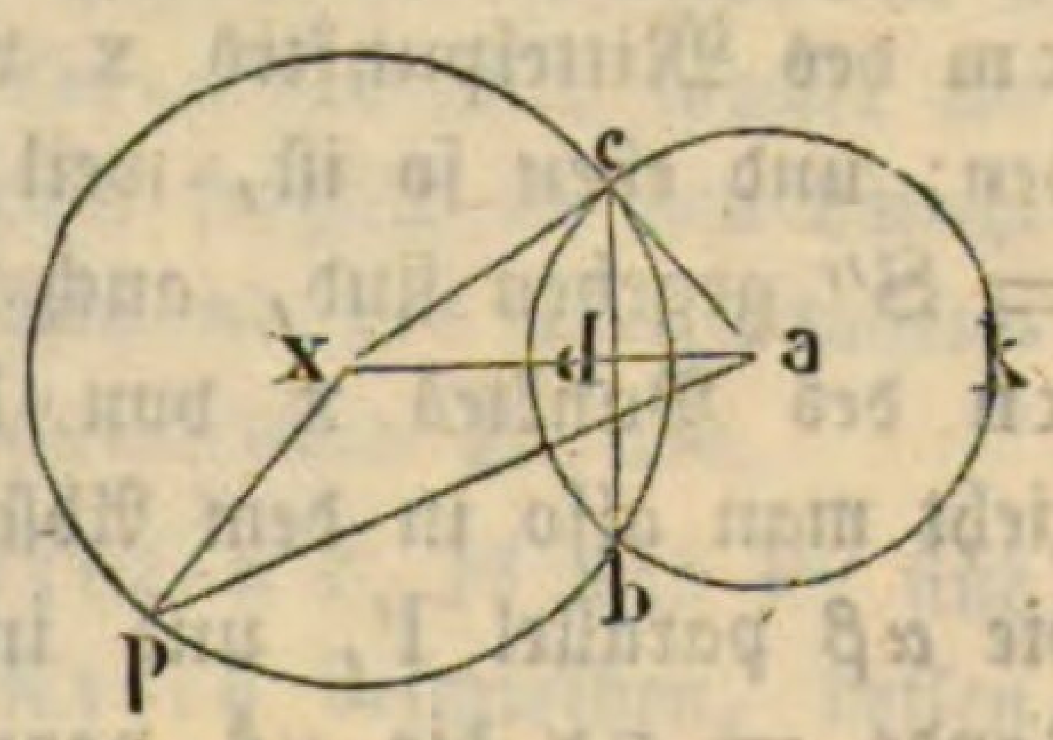
Aufgabe 237. Mit einem gegebenen Radius, = R, soll ein Kreis beschrieben werden, der die der Lage nach gegebene Linie l′ berührt, und eine andere gegebene Linie l″ so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück derselben, = S, Sehne des Kreises werde.

Analysis. Durch R und S ist der Abstand des Mittelpunktes von S und also auch von l″ gegeben; und zieht man in diesem Abstande eine Linie parallel der l″, so muß in dieser der Mittelpunkt des Kreises liegen, der l′ berühren soll, und dessen Radius = R gegeben ist. Der Mittelpunkt kann daher nach der Anleitung Aufg. 208. gefunden werden.

Aufgabe 238. Man soll mit einem gegebenen Radius = R einen Kreis beschreiben, der den der Größe und Lage nach gegebenen Kreis k berührt, und die der Lage nach gegebene Linie l so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück derselben, = S, Sehne des Kreises wird.

Auflösung. Die Aufgabe läßt sich auf Aufg. 210. zurückführen.

Aufgabe 239. Man soll mit einem gegebenen Radius = R einen Kreis beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt p geht, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis k so schneidet, daß Beide eine der Größe nach gegebene Sehne, = S, gemein haben.



Analysis. Da k gegeben ist, so ist auch der Radius ac = r gegeben; aber auch die Sehne bc = S ist gegeben, folglich der Abstand ad; und eben so, weil xc = R gegeben ist, auch xd (Aufgabe 231.); daher kennt man ax. Aber auch px = R ist gegeben, und die Punkte p und a der Lage nach, also auch die Linie pa. Folglich sind von Δ apx

alle drei Seiten gegeben, und die Eine Seite pa zugleich der Lage nach; folglich ist auch x der Lage nach bestimmt.

Aufgabe 240. Man soll mit einem der Größe nach gegebenen Radius R einen Kreis beschreiben, der die der Lage nach gegebene Linie l berührt, und den der Größe und Lage nach gegebenen Kreis k so schneidet: daß Beide eine der Größe nach gegebene Sehne, = S, gemein haben.

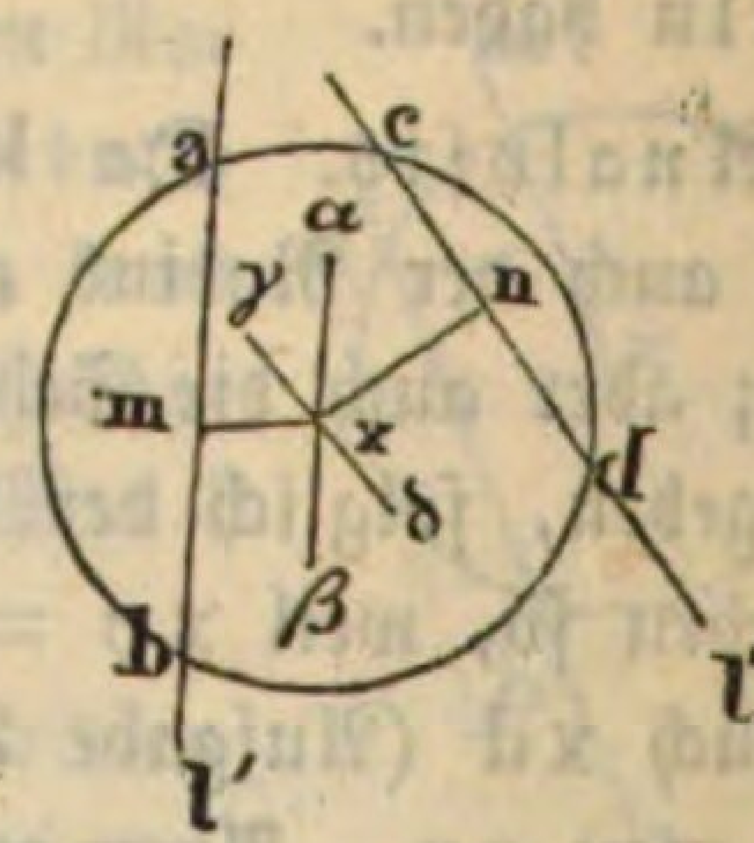
Auflösung. Wird in einem Abstande, = R, eine Linie parallel der l gezogen: so muß in dieser der Mittelpunkt des mit R zu beschreibenden Kreises liegen, der k so schneiden soll, daß Beide eine Sehne = S gemein haben; und Dieses ist die Aufg. 234.

Aufgabe 241. Mit einem der Größe nach gegebenen Radius = R soll man einen Kreis beschreiben, der den der Größe und Lage nach gegebenen Kreis k′ berührt, und den ebenfalls der Größe und Lage nach gegebenen Kreis k″ so schneidet, daß Beide eine Sehne = S gemein haben.

Auflösung. Beschreibt man aus dem Mittelpunkte von k′, dessen Radius = r seyn soll, einen Kreis mit einem Radius = r + R: so muß in dem Umfange dieses Kreises der Mittelpunkt des mit R zu beschreibenden liegen, der k″ so schneiden soll, daß Beide die Sehne = S gemein haben; und Dieses ist die Aufgabe 235., welche in derselben Art, wie Aufgabe 234., sich lösen läßt.

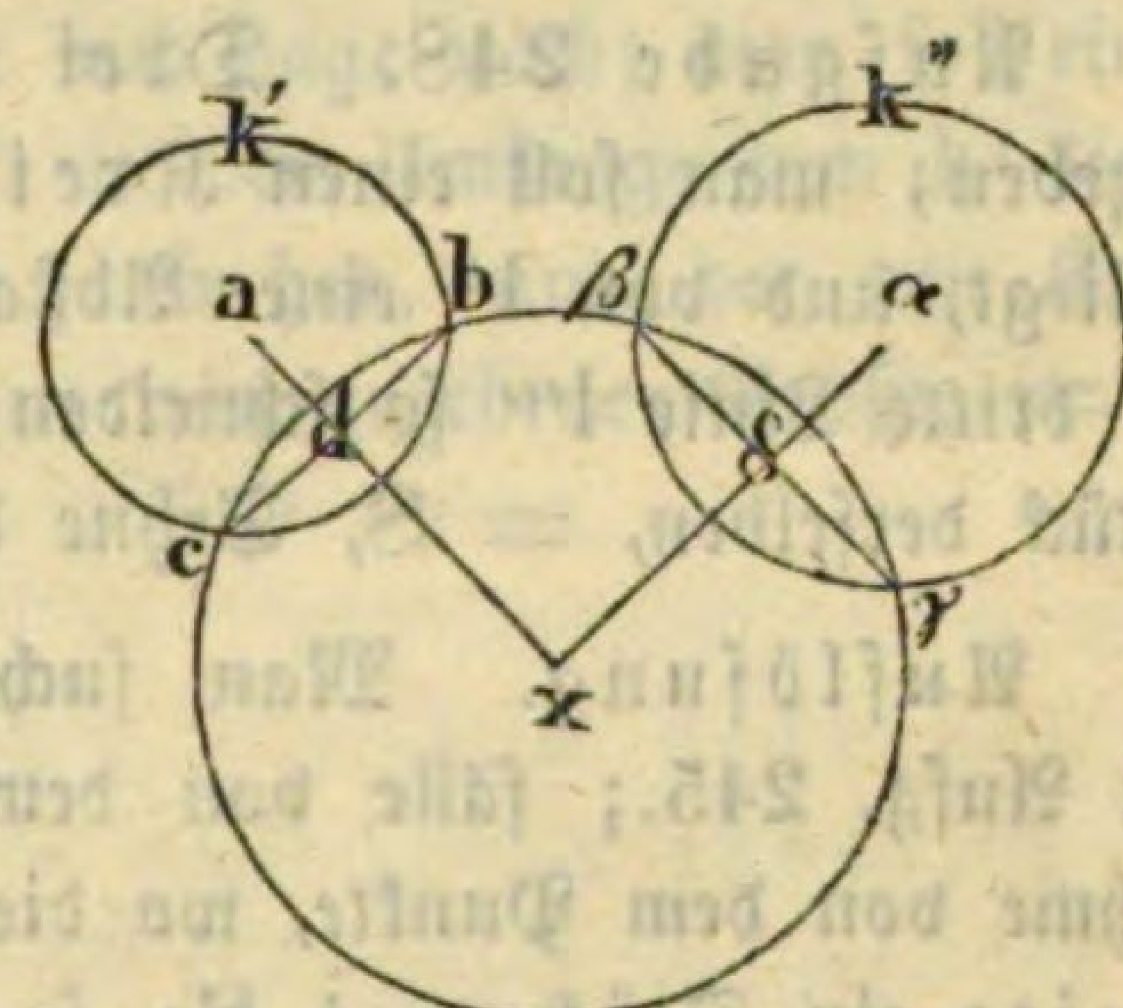
Aufgabe 242. Zwei gerade Linien sind der Lage nach gegeben; man soll mit einem gegebenen Radius einen Kreis beschreiben, der beide Linien so schneidet, daß „ein der Größe nach gegebenes Stück einer Jeden“ Sehne dieses Kreises wird.

Gegeben l′ der Lage nach, von welcher ein Stück = S′
und l″ „ „ „ „ „ „ „ = S″
Sehne eines mit R zu beschreibenden Kreises werden soll.



Analysis. Da R und ab = S′ gegeben sind, so ist der Abstand xm des Mittelpunktes x von l′ gegeben; und eben so ist, weil R und cd = S″ gegeben sind, auch der Abstand xn des Punktes x von l″ gegeben; zieht man also in dem Abstande = mx die $\alpha\beta$ parallel l′, und in dem Abstande = nx die $\gamma\delta$ parallel l″: so schneiden sich diese Parallelen in dem Mittelpunkte x.

Aufgabe 243. Zwei Kreise sind der Größe und Lage nach gegeben; man soll mit einem gegebenen Radius einen Kreis beschreiben, der Beide so schneidet, daß er mit Jedem derselben eine gegebene Sehne gemein hat.



Gegeben k′ und k″ der Größe und Lage nach; und der Radius R des zu beschreibenden Kreises, der mit k′ eine Sehne = S′ und mit k″ eine Sehne = S″ gemein haben soll.

Analysis. Setzt man den Radius von $k' = r'$ und von $k'' = r''$: so ist gegeben

durch r' und $cb = S'$ der Abstand ad
„ R „ $cb = S'$ „ „ xd
„ r'' „ $\gamma\beta = S''$ „ „ $\alpha\delta$
„ R „ $\gamma\beta = S''$ „ „ $x\delta$.

Folglich sind ax und αx gegeben. Da nun die Punkte a und α der Lage nach gegeben sind, so ist auch x gegeben.

Aufgabe 244. Man soll mit einem gegebenen Radius = R einen Kreis beschreiben, der die der Lage nach gegebene gerade Linie l so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück derselben = S′ Sehne dieses Kreises werde; und zugleich soll der zu beschreibende Kreis den, der Größe und Lage nach gegebenen Kreis k, so schneiden, daß Beide eine der Größe nach gegebene Sehne = S″ gemein haben.

Aufgabe 245. Zwei gerade Linien l′, l″ sind der Lage nach gegeben, und ein Punkt p; man soll einen Kreis beschreiben, der durch p geht, dessen Mittelpunkt in l′ liegt, und der von l″ einen gegebenen Abstand = h hat.

Auflösung. Zieht man in dem gegebenen Abstande = h eine der l″ parallele Linie, so muß in dieser der Mittelpunkt des Kreises liegen; aber auch in l liegt Derselbe, folglich in dem Durchschnitte der Parallele mit l′; und der Abstand des Durchschnittspunktes von p ist der Radius des zu beschreibenden Kreises.

Aufgabe 246. Drei gerade Linien l′, l″ und l‴ sind der Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in l′ liege, und von l″ einen gegebenen Abstand = h habe; und es soll dieser Kreis l‴ berühren.

Aufgabe 247. Es sind zwei gerade Linien l' und l'' der Lage nach, und ein Kreis k der Größe und Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der k berührt; dessen Mittelpunkt in l' liege und von l'' einen gegebenen Abstand = h habe.

Aufgabe 248. Drei gerade Linien sind ihrer Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in l' liegt, und von l'' einen Abstand = h hat; und es soll der Kreis die dritte Linie l''' so schneiden, daß ein der Größe nach gegebenes Stück derselben, = S, Sehne des Kreises wird.

Auflösung. Man suche die Lage des Mittelpunktes, wie bei Aufg. 245.; fälle von demselben eine Normale auf l''' und nehme von dem Punkte, wo die Normale die l''' trifft, auf jeder Seite ein Stück = $\frac{1}{2}$ S: so ist hierdurch die Sehne ihrer Lage nach bestimmt.

Aufgabe 249. Zwei gerade Linien l', l'' sind der Lage nach, und ein Kreis k ist der Größe und Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in l' liegt und der von l'' einen gegebenen Abstand = h hat, und der den Kreis k so schneidet, daß Beide eine der Größe nach gegebene Sehne = S gemein haben.

Aufgabe 250. Man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in dem Umfange des der Größe und Lage nach gegebenen Kreises k liege, und von der der Lage nach gegebenen Linie l einen gegebenen Abstand = h habe; und es soll dieser Kreis durch einen der Lage nach gegebenen Punkt p gehen.

Aufgabe 251. Zwei gerade Linien l' und l'' sind der Lage nach gegeben, und ein Kreis k der Größe und Lage nach. Man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in dem Umfange von k liegt, und von l' einen gegebenen Abstand = h hat; und es soll dieser Kreis l'' berühren.

Aufgabe 252. Eine gerade Linie l ist der Lage nach gegeben, und zwei Kreise k' und k'' der Größe und Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in dem Umfange von k' liegt, der von l einen Abstand = h hat; und es soll dieser Kreis k'' berühren.

Aufgabe 253. Zwei gerade Linien l' und l'' sind der Lage nach gegeben, und ein Kreis k der Größe und Lage nach; es soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Mittelpunkt in dem Umfange

von k liegt, der von l' einen Abstand = h hat; und es soll dieser Kreis l'' so schneiden, daß ein der Größe nach gegebenes Stück dieser Linie, = S, Sehne des Kreises werde.

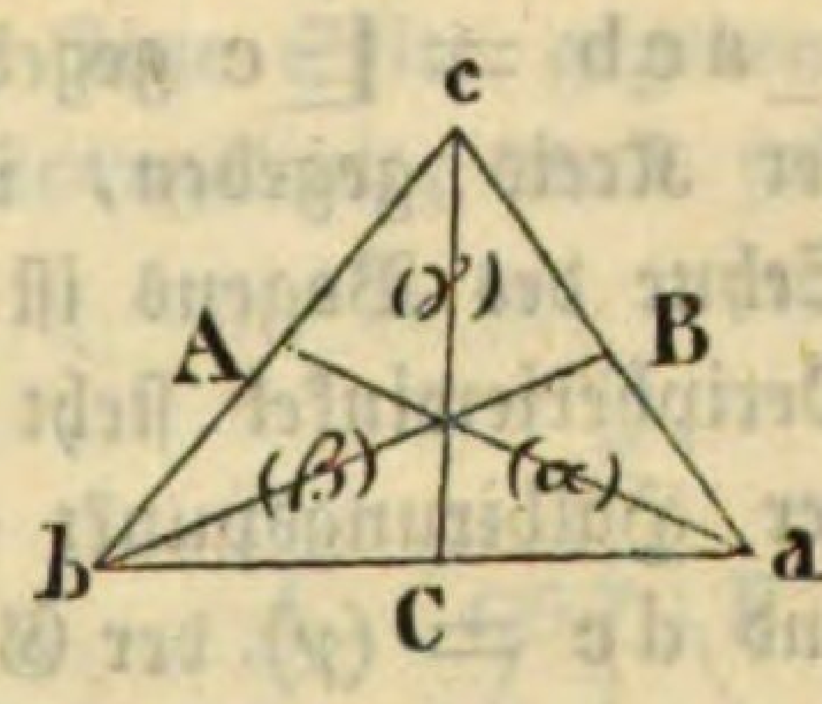
Aufgabe 254. Eine Linie l ist der Lage nach gegeben, und zwei Kreise k' und k'' der Größe und Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in dem Umfange von k' liegt, der von l einen gegebenen Abstand = h hat, und der den Kreis k'' so schneidet, daß Beide eine Sehne von gegebener Größe, = S, gemein haben.

---

§. 19.

Construction der Dreiecke, wenn unter den gegebenen Stücken Linien vorkommen, welche die Spitzen derselben mit den Halbirungspunkten der gegenüber liegenden Seiten verbinden.

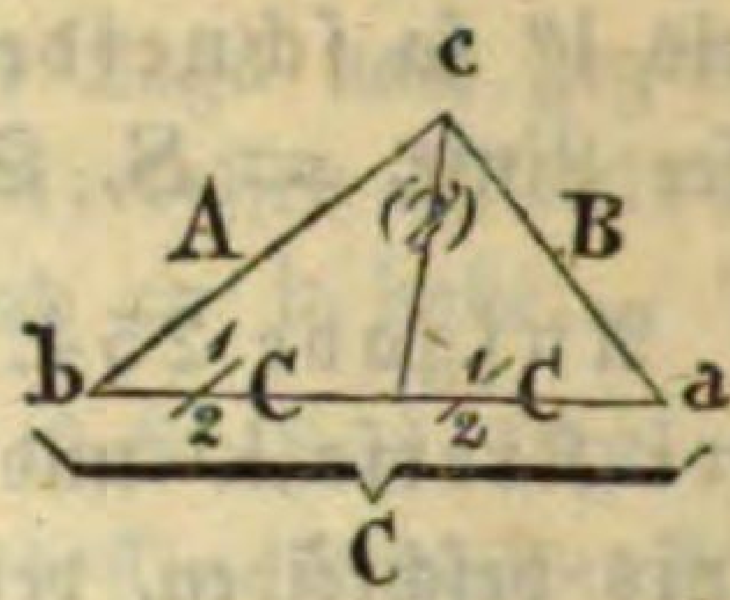
Wird in einem Dreieck die Seite ab = C in dem Punkte C halbirt und C mit c verbunden, so soll die Verbindungslinie cC mit (γ) bezeichnet werden. Eben so ist, wenn bc = A in A halbirt wird, aA = (α); und wenn ac = B in B halbirt ist, bB = (β). Während also (nach der eingeführten Bezeichnung) α, β und γ die Normalen sind, welche von a auf A, von b auf B und von c auf C gefället werden können: werden durch dieselben Zeichen, wenn sie in Klammern eingeschlossen sind, also durch (α), (β) und (γ) die Linien bezeichnet, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüber liegenden Spitzen des Dreiecks verbinden. Diese Linien sollen der Kürze wegen Halbirungslinien genannt werden, und es ist daher die zu C gehörige Halbirungslinie = (γ) ꝛc.



Aufgabe 255. Von einem Dreieck sind zwei Seiten gegeben, und die zu der einen dieser Seiten gehörige Halbirungslinie; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A, C und (γ).

Aufgabe 256. Es sind von einem Dreieck zwei Seiten gegeben, und die zu der dritten Seite gehörige Halbirungslinie; man soll das Dreieck verzeichnen.



Gegeben A, B und (γ).

Auflösung. Siehe Aufgabe 2. Seite 96.

Aufgabe 257. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, ein an derselben anliegender Winkel, und die zu einer andern Seite gehörige Halbirungslinie.

Gegeben A, $\angle$ b und (γ).

Aufgabe 258. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, ein an derselben anliegender Winkel, und die zu der gegebenen Seite gehörige Halbirungslinie.

Gegeben C, $\angle$ a und (γ).

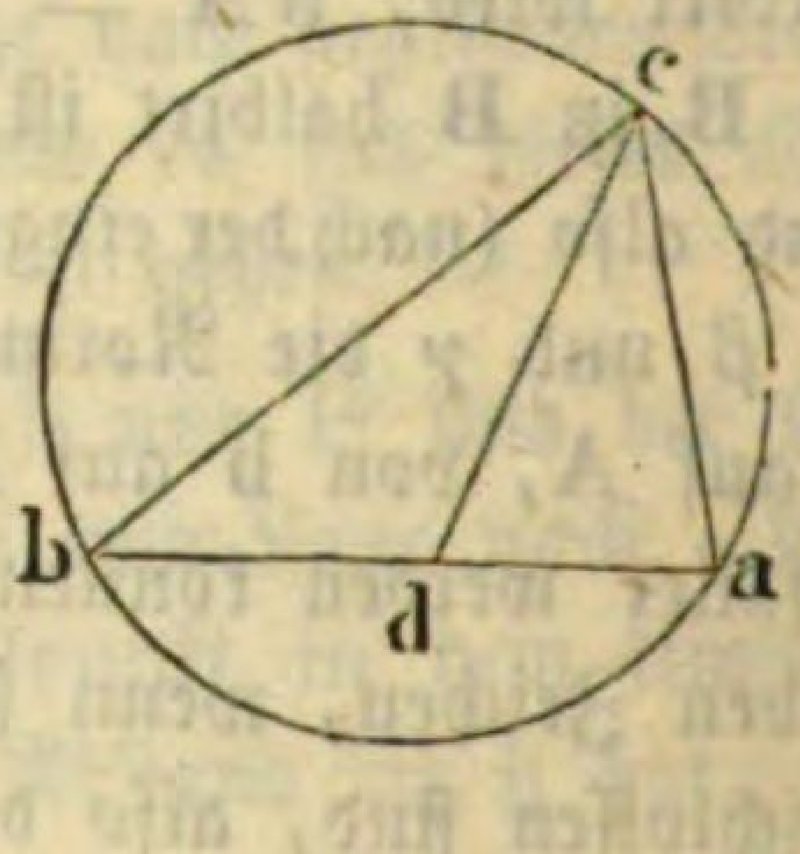
Aufgabe 259. Es sind von einem Dreieck zwei Winkel gegeben, und Eine Halbirungslinie.

Gegeben $\angle$ a, $\angle$ b und (γ).

Aufgabe 260. Von Einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, der ihr gegenüber liegende Winkel, und die zu der gegebenen Seite gehörige Halbirungslinie; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C, $\angle$ c und (γ).

Analysis. Da ab = C und $\angle$ acb = $\angle$ c gegeben sind: so ist auch der Kreis gegeben, in welchem ab die Sehne des Bogens ist, auf dem $\angle$ c als Peripheriewinkel steht (33.). Ferner ist der Halbirungspunkt d der ab gegeben, und dc = (γ) der Größe nach. Folglich auch der Punkt c, und daher das Dreieck, in welchem die gegebenen Stücke vorkommen.

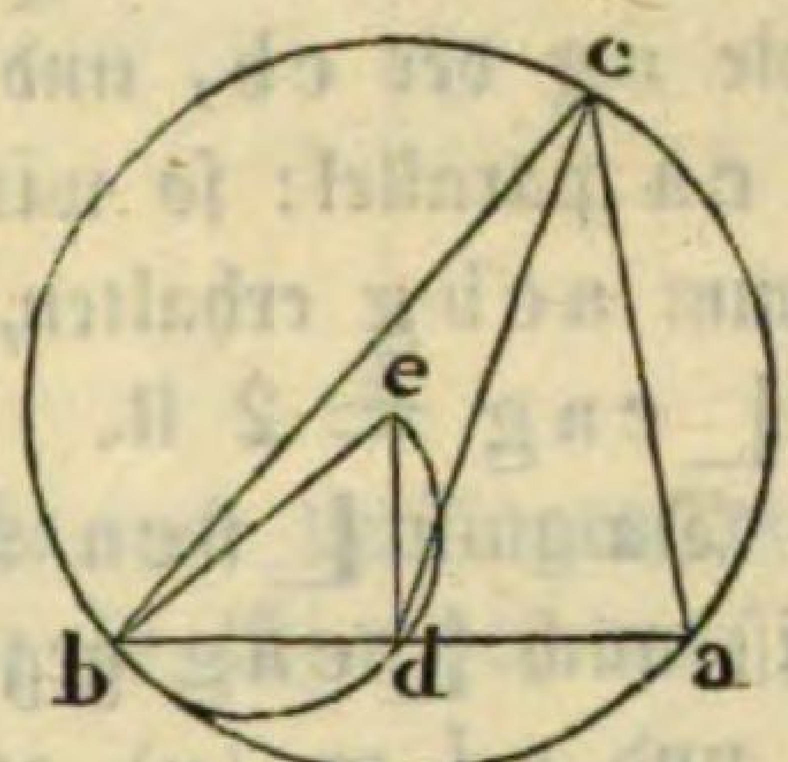


Auflösung. Beschreibe den Kreis, in welchem ab = C die Sehne des Bogens ist, wozu $\angle$ c als Peripheriewinkel gehört (33.). Halbire ab in d, und beschreibe aus d als Mittelpunkt einen Kreisbogen mit einem Radius = (γ), und verbinde endlich den Punkt c, in welchem dieser Bogen den zuvor beschriebenen Kreis schneidet, mit a und mit b: so ist abc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 261. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, der ihr gegenüber liegende Winkel und die zu einer anderen Seite gehörige Halbirungslinie; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben A, $\angle$ a und (γ).

Analysis. Da bc = A und $\angle$ bac = $\angle$ a gegeben sind: so kann der Kreis beschrieben werden, in welchem $\angle$ a als Peripheriewinkel auf dem Bogen steht, zu dem A als Sehne gehört. Ist cd = (γ), so wird ab in d halbirt, und es ist daher, wenn man ed zieht, diese Linie normal auf ab (3.), daher ist $\angle$ bde ein Winkel im Halbkreis (31.); nun ist eb gegeben, also auch der Halbkreis bde; aber auch c ist gegeben, und cd = (γ) der Größe nach; folglich der Punkt d, und daher die Linie bda der Größe und Lage nach.

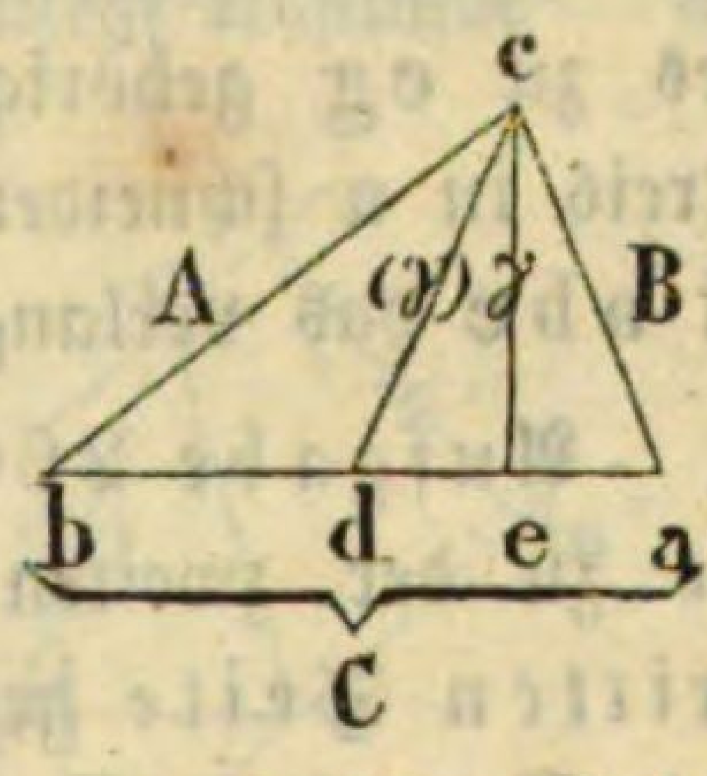


Auflösung. Beschreibe den Kreis acb, so daß bc = A die Sehne des Bogens ist, zu welchem $\angle$ a als Peripheriewinkel gehört (33.); ziehe den Radius eb, und beschreibe über demselben den Halbkreis edb. Aus c schlage einen Bogen mit einem Radius = (γ), welcher den Halbkreis in d schneidet. Hierauf ziehe man von b durch d die Linie bda, die den Kreis in a trifft, und verbinde a mit c: so ist abc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 262. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, die zu derselben gehörige Normale und Halbirungslinie; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben C, γ und (γ).

Analysis. Durch γ und (γ) ist das rechtwinklige Dreieck ecd gegeben, also auch die Punkte c und d. Wird nun da = db = $\frac{1}{2}$ C genommen, so sind auch die Punkte a und b bekannt, und daher auch Δ abc.



Aufgabe 263. Von einem Dreieck ist gegeben Eine Seite, und die zu einer andern Seite gehörige Normale und Halbirungslinie.

Gegeben A, γ und (γ).

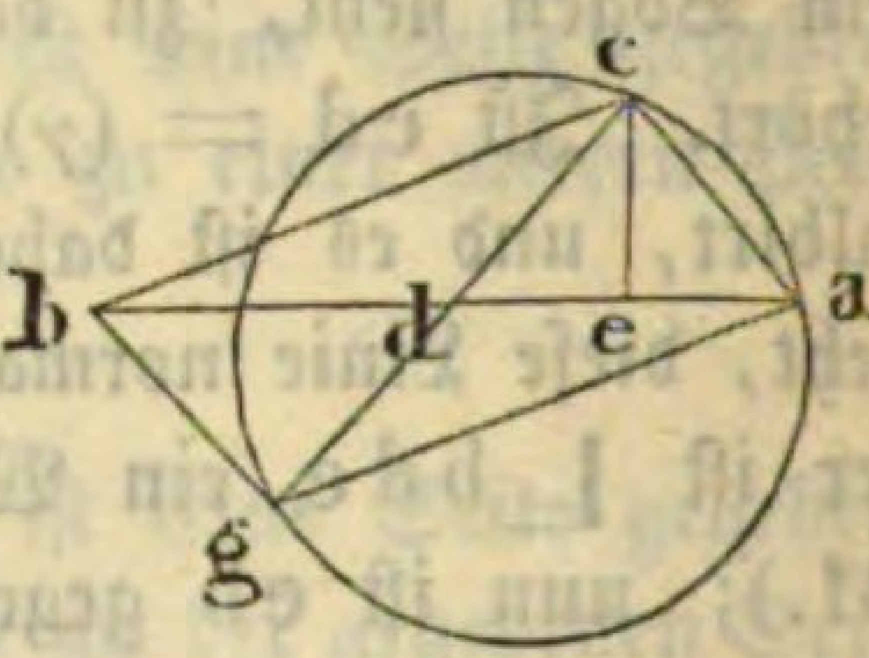
Aufgabe 264. Es ist von einem Dreieck Ein Winkel gegeben, und die zu einer anliegenden Seite gehörige Normale und Halbirungslinie.

Gegeben $\angle$ b, γ und (γ).

Aufgabe 265. Von einem Dreieck ist Ein Winkel gegeben, und die zu der gegenüber liegenden Seite gehörige Normale und Halbirungslinie.

Gegeben $\angle$ c, γ und (γ).

Analysis. Es sey acb das verlangte Dreieck, ziehe durch a die ag der cb, und durch b die bg der ca parallel: so wird das Parallelogramm acbg erhalten, und es ist $\angle$ bca + $\angle$ cag = 2 R.



Da nun $\angle$ bca = $\angle$ c gegeben, so ist auch $\angle$ cag gegeben. Da cd = dg und cd = (γ) gegeben ist, so ist cg ebenfalls gegeben. Es ist also cg gegeben, und der ihr gegenüber liegende Winkel cag; folglich kann der Kreis beschrieben werden, in welchem cg die Sehne des Bogens ist, zu dem $\angle$ cag als Peripheriewinkel gehört (33).

Da cd = (γ) und ce = γ gegeben sind, so ist das rechtwinklige Dreieck ced gegeben; und daher de, also ba der Lage nach, und folglich ihr Durchschnittspunkt a mit dem Kreise; und weil db = da, so ist auch der Punkt b gegeben, und hierdurch das verlangte Dreieck abc.

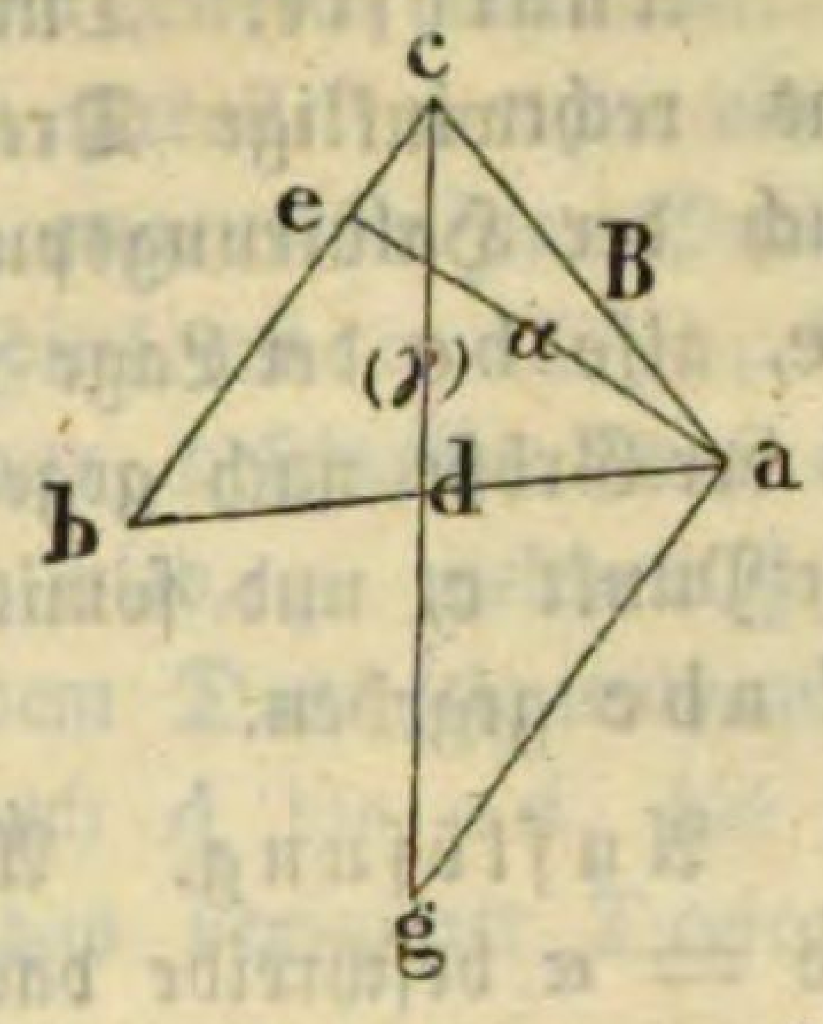
Auflösung. Aus cd = (γ) und ce = γ beschreibe das rechtwinklige Dreieck ced. Ueber cg als Sehne beschreibe einen Kreis, in welchem $\angle$ cag = 2 R — $\angle$ c der Peripheriewinkel des zu cg gehörigen Bogens ist; verlängere de, bis sie diesen Kreis in a schneidet; nimm db = da, und ziehe ac und bc, so ist abc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 266. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, die zu der zweiten Seite gehörige Normale, und die zu der dritten Seite gehörige Halbirungslinie.

Gegeben **B**, α und (γ).

Analysis. Ist abc das verlangte Dreieck; ac = **B**; die Normale ae = α, und cd = (γ) die Halbirungslinie von ab: so ist (wenn man cd verlängert, dg = dc nimmt, und ag zieht) $\triangle$ adg $\cong$ $\triangle$ bdc (I. 4.), und daher ag parallel cb. Nun ist, durch ac = **B** und ae = α, das rechtwinklige Dreieck aec gegeben, also die Punkte c und a und cb der Lage nach; daher auch

die der cb parallel ag, der Lage nach. Da nun $cg = 2(\gamma)$ der Größe nach gegeben ist, so ist g der Lage nach bestimmt; und weil cg in d halbirt wird, so ist d gegeben, also ad, und folglich der Punkt b.



Auflösung. Aus $ac = B$ und $ae = \alpha$ beschreibe das rechtwinklige Dreieck aec; durch a ziehe ag parallel ce, und aus c beschreibe mit $cg = 2(\gamma)$ einen Kreisbogen, der die Parallele in g schneidet; ziehe cg, halbire dieselbe in d, ziehe ad, verlängere diese Linie und die ce, bis sie sich in b schneiden: so ist abc das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 267. Von einem Dreieck ist Ein Winkel gegeben, die zu der gegenüberliegenden Seite gehörige Halbirungslinie, und die zu einer andern Seite gehörige Normale.

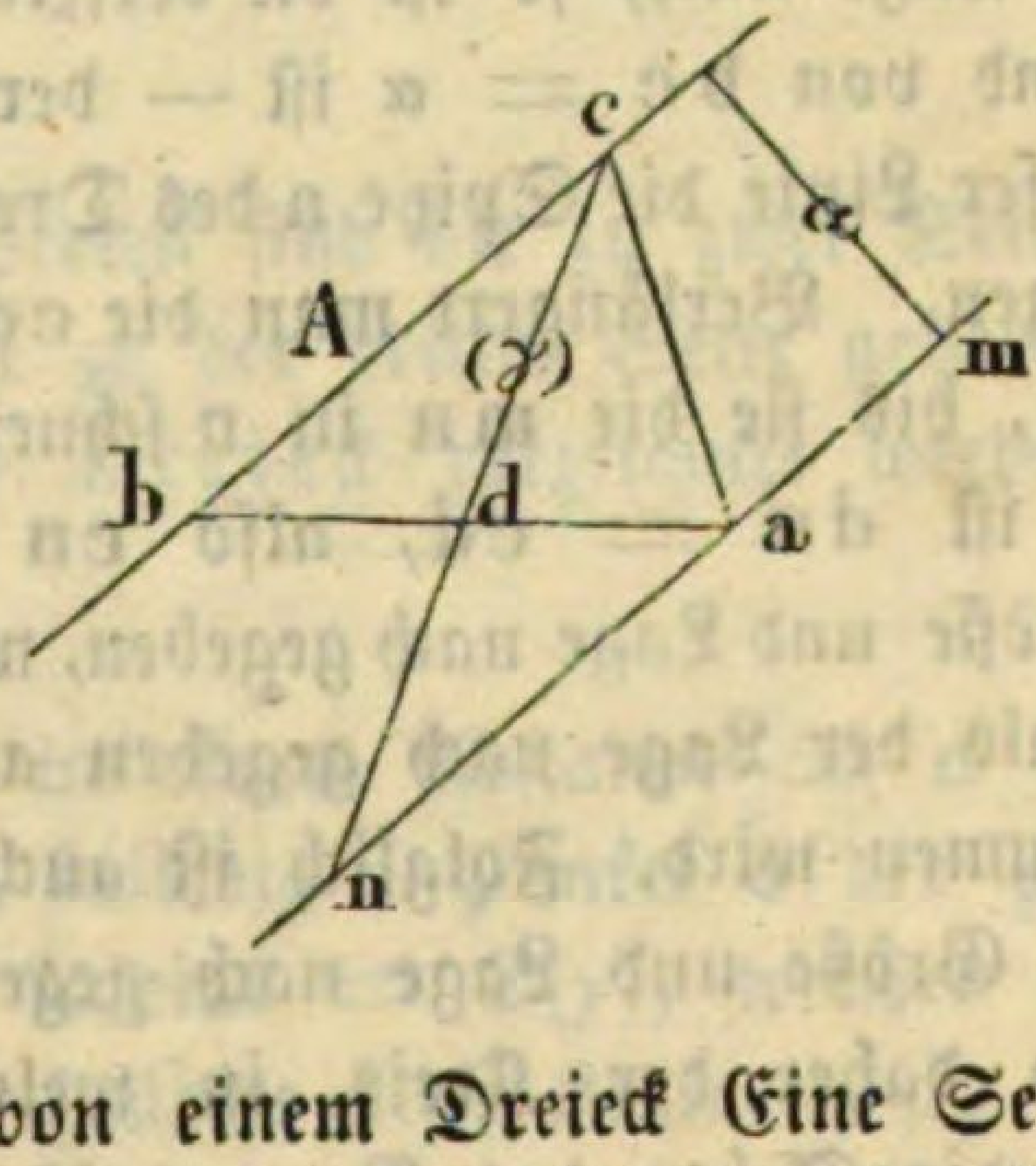
Gegeben $\llcorner c$, (γ) und α.

Auflösung. Da das rechtwinklige Dreieck aec aus $\llcorner c$ und $ae = \alpha$ beschrieben werden kann, so läßt sich die Aufgabe ganz eben so wie die vorige lösen.

Aufgabe 268. Man kennt von einem Dreieck Eine Seite, die zu derselben gehörige Normale, und die zu einer andern Seite gehörige Halbirungslinie.

Gegeben A, α und (γ).

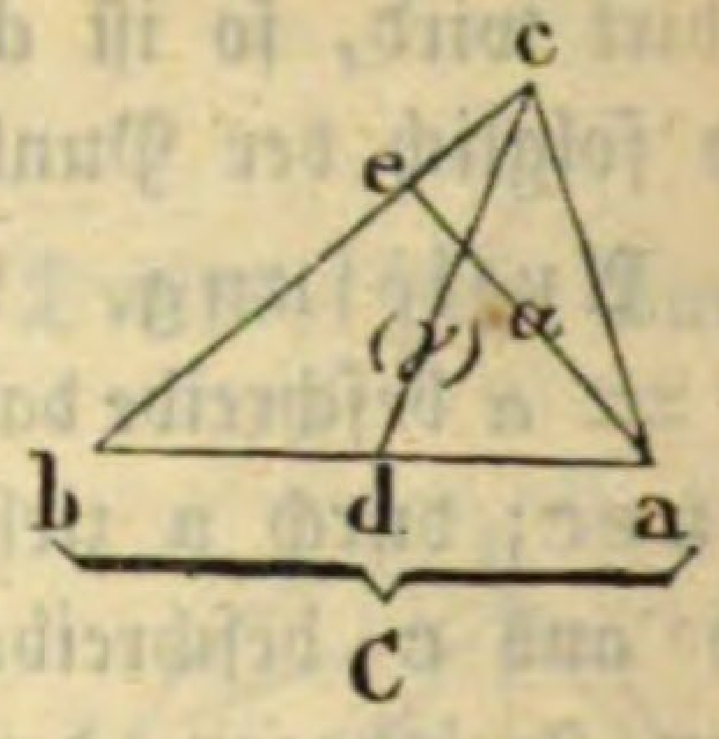
Auflösung. Nimm $cb = A$, und in einem Abstande $= \alpha$ von derselben ziehe mn parallel der A; von c aus beschreibe einen Kreisbogen mit einem Radius $cn = 2(\gamma)$, der die mn in n schneidet. Ziehe cn; halbire dieselbe in d, und durch d ziehe von b aus die bd; verlängere dieselbe, bis sie die mn in a trifft, und verbinde a mit c: so ist abc das verlangte Dreieck.



Aufgabe 269. Man kennt von einem Dreieck Eine Seite, die zu derselben gehörige Halbirungslinie, und die Normale einer andern Seite des Dreiecks.

Gegeben C, (γ) und α.

Analysis. Durch ab = C und die Normale ae = α ist das rechtwinklige Dreieck aeb gegeben; auch der Halbirungspunkt d der ab und be, also bc der Lage nach; aber dc = (γ) ist der Größe nach gegeben: folglich ist auch der Punkt c, und somit das verlangte Dreieck abc gegeben.



Auflösung. Aus ab = C und ae = α beschreibe das rechtwinklige Dreieck aeb; halbire ab in d, und beschreibe aus d mit einem Radius = (γ) einen Kreisbogen, der die be in c schneidet, und ziehe ca: so ist abc „das gesuchte Dreieck".

Aufgabe 270. Von einem Dreieck kennt man Einen Winkel, die zu der einen anliegenden Seite gehörige Normale, und die Halbirungslinie, welche zu der anderen an diesem Winkel anliegenden Seite gehört.

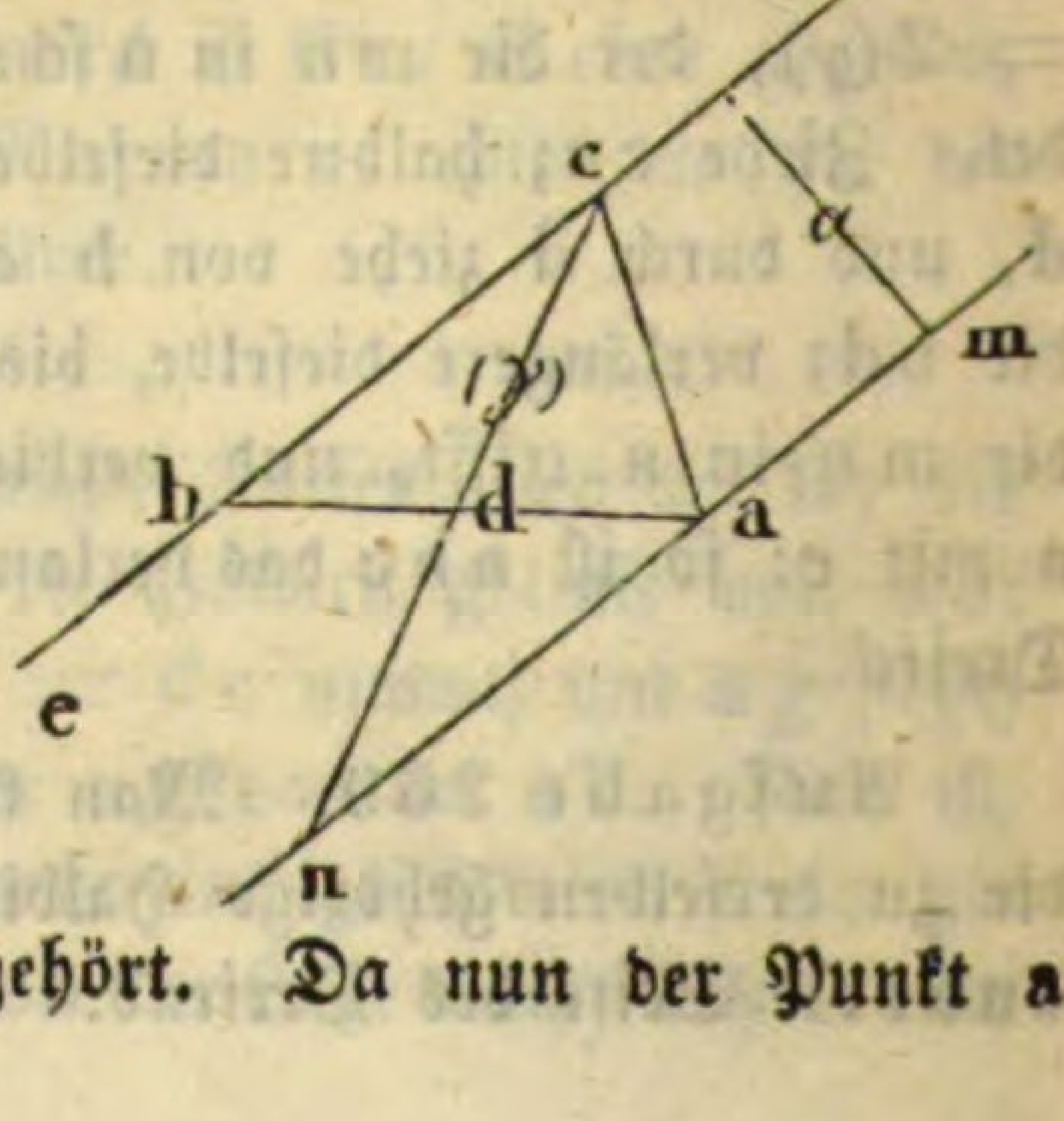
Gegeben $\angle$ b, α und (γ).

Auflösung. Wie bei der vorigen Aufgabe; da Δ aeb aus $\angle$ b und ae = α beschrieben werden kann.

Aufgabe 271. Von einem Dreieck ist Ein Winkel gegeben, die zu der gegenüberliegenden Seite gehörige Normale, und die zu einer andern Seite des Dreiecks gehörige Halbirungslinie.

Gegeben $\angle$ a, α und (γ).

Analysis. Ist bc die nicht bekannte Seite A des Dreiecks der Lage nach, so ist die derselben parallele Linie mn; — deren Abstand von bc = α ist — der Lage nach gegeben, und es muß in dieser Linie die Spitze a des Dreiecks liegen. Verlängert man die cd = (γ), bis sie die mn in n schneidet: so ist dn = cd, also cn der Größe und Lage nach gegeben, wenn c als der Lage nach gegeben angenommen wird. Folglich ist auch cd der Größe und Lage nach gegeben, und daher der Kreis, in welchem cd die Sehne des Bogens ist, zu welchem $\angle$ a als Peripheriewinkel gehört. Da nun der Punkt a



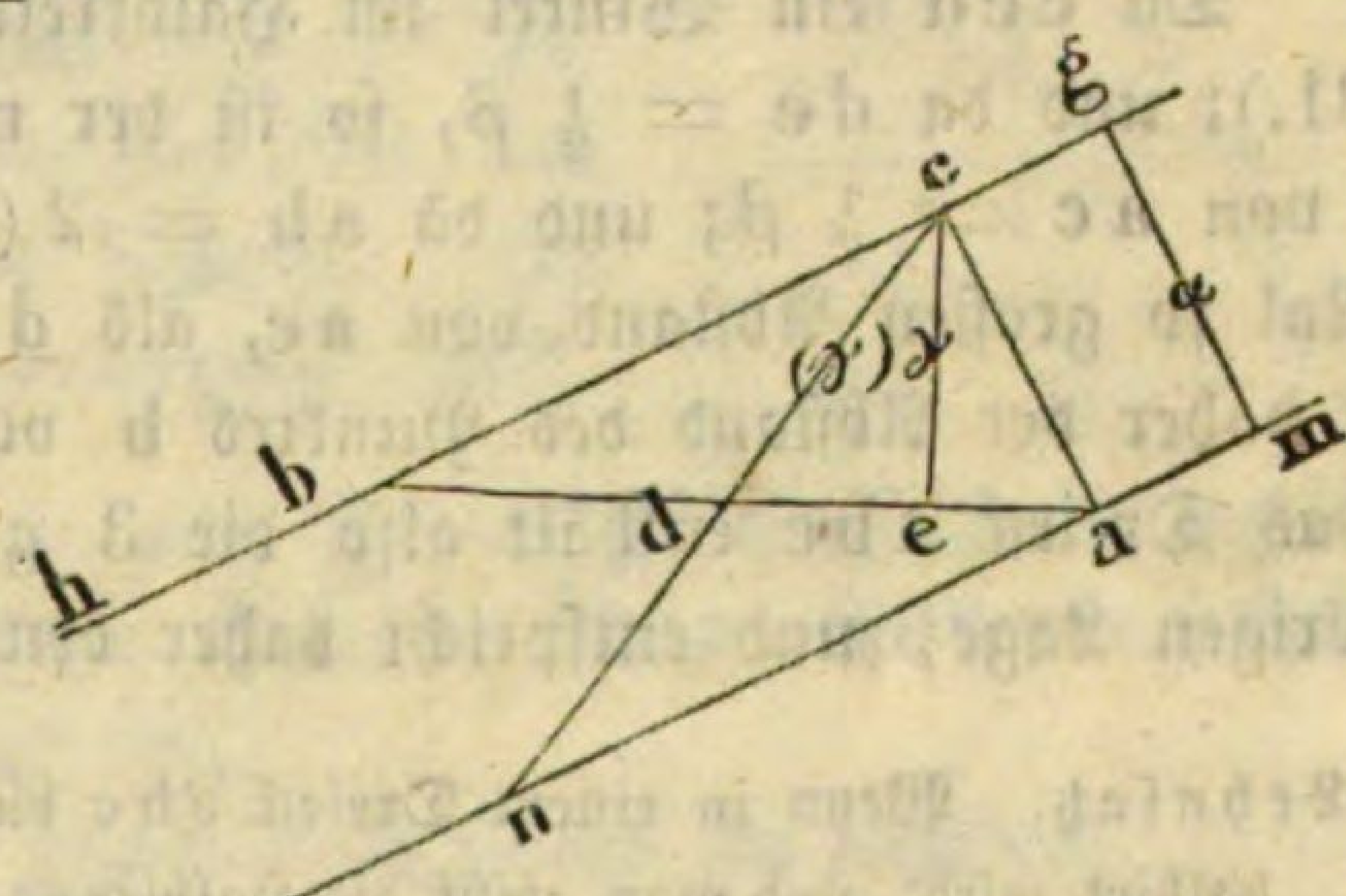
in dem Umfange dieses Kreises liegen muß, und auch in mn: so ist a der Lage nach gegeben, und dadurch das Dreieck bestimmt.

Auflösung. Ziehe ce, und derselben parallel mn in einem Abstande $= \alpha$. Aus dem beliebig in ce angenommenen Punkte c beschreibe einen Kreisbogen mit einem Radius cn $= 2(\gamma)$, der die mn in n schneidet; halbire cn in d, und beschreibe über cd einen Kreis; so daß cd Sehne des Bogens wird, zu welchem ∟a als Peripheriewinkel gehört (33.). Von dem Durchschnittspunkte a dieses Kreises mit mn ziehe ac, und durch d die ad, bis sie verlängert die ce in b trifft: so ist abc „das verlangte Dreieck".

Aufgabe 272. Von einem Dreieck kennt man die zu Einer Seite gehörige Normale und Halbirungslinie, und es ist außerdem die zu einer andern Seite gehörige Normale gegeben.

Gegeben γ, (γ) und α.

Auflösung. Ziehe gh, und derselben parallel mn in einem Abstande $= \alpha$. Von einem in gh beliebig angenommenen Punkte c beschreibe einen Kreisbogen mit cn $= 2(\gamma)$, der die mn in n schneidet; halbire cn in d, beschreibe über cd einen Halbkreis, und schlage aus c mit γ einen Bogen,



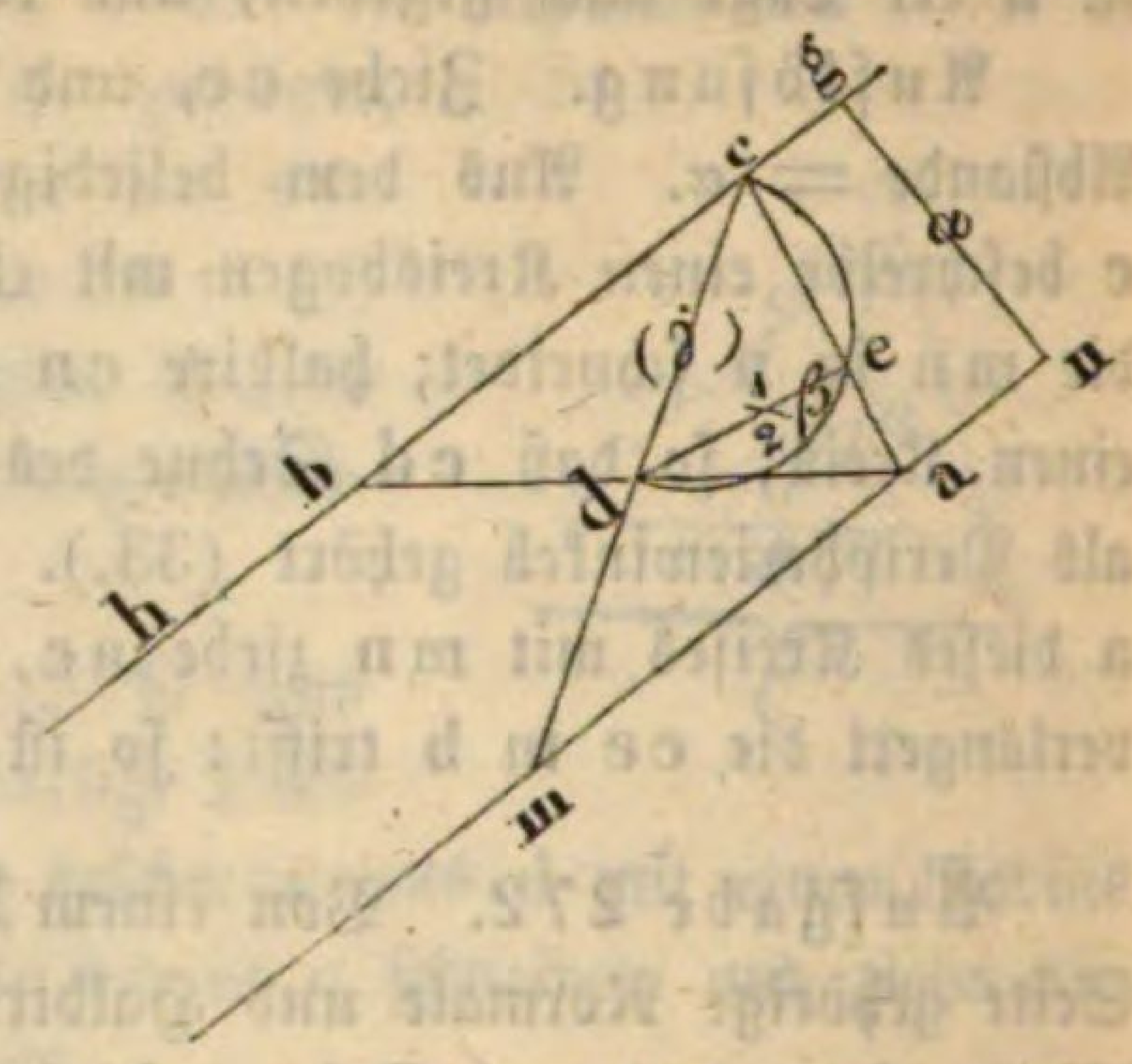
der den Halbkreis in e schneidet. Durch d und e ziehe eine Linie, bis sie gh in b und mn in a trifft; und ziehe ac, so ist abc „das gesuchte Dreieck".

Aufgabe 273. Von einem Dreieck sind die zu zwei Seiten desselben gehörigen Normalen und die zu der dritten Seite gehörige Halbirungslinie gegeben; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben α, β und (γ).

Auflösung. Ziehe gh, und in einem Abstande $= \alpha$ die derselben parallele mn. Aus einem beliebigen Punkte c der gh schlage einen Kreisbogen mit einem Radius $= 2(\gamma)$, welcher die mn in m schneidet, und ziehe cm. Halbire diese Linie in d, beschreibe über cd einen Halbkreis, und aus d mit einem Radius $= \frac{1}{2}\beta$ einen Bogen, der diesen Halbkreis in e schneidet. Von c

ziehe durch e die cea und von a durch d die adb: so ist hierdurch das gesuchte Dreieck abc construirt.

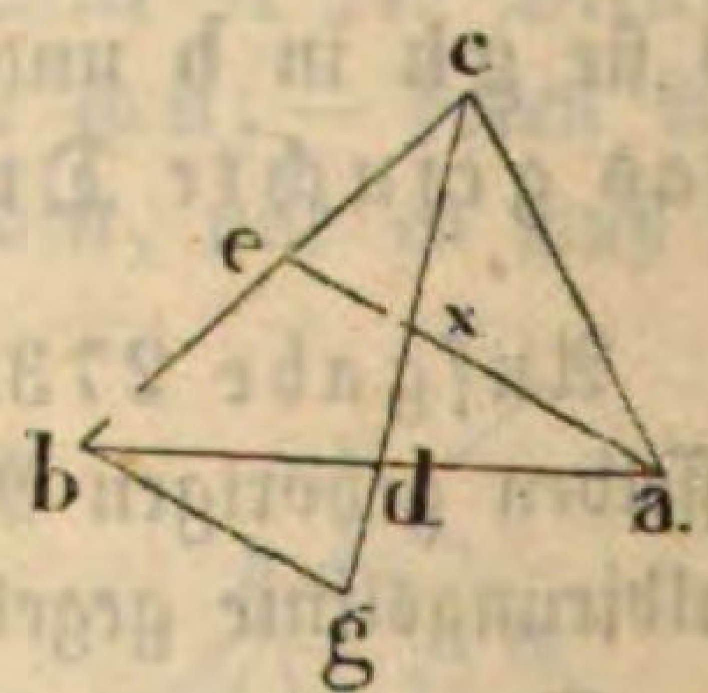


Beweis. Da cm in d halbirt, und mn der gh parallel ist, so ist ab in d ebenfalls halbirt. Folglich ist cd die zu der Seite ab des Dreiecks gehörige Halbirungslinie; und weil cm $= 2(\gamma)$, so ist cd $= (\gamma)$.

Da mn der gh parallel in einem Abstande $= \alpha$ gezogen ist, so ist der Abstand des Punktes a von bc ebenfalls $= \alpha$; und es ist also die zu bc gehörige Normale des Dreiecks $= \alpha$.

Da ced ein Winkel im Halbkreis ist, so ist derselbe = R (31.); und da de $= \frac{1}{2}\beta$, so ist der normale Abstand des Punktes d von ac $= \frac{1}{2}\beta$; und da ab = 2(ad), so hat b einen zwei Mal so großen Abstand von ac, als d von demselben hat; und es ist daher der Abstand des Punktes b von ac $= 2 \times \frac{1}{2}\beta = \beta$. Das Dreieck abc enthält also die 3 gegebenen Stücke in der gehörigen Lage, und entspricht daher den Bedingungen der Aufgabe.

Lehnsatz. Wenn in einem Dreieck abc die Seite ba in d und cb in e halbirt wird, und man zieht die Halbirungslinien cd und ae: so schneiden sich diese Linien in x so, daß cx = 2(xd) und ax = 2(xe) ist.



Beweis. Durch b ziehe eine Linie parallel der ea, bis sie die verlängerte cd in g schneidet so ist:

$\angle$ dbg = $\angle$ dax (I. 29.)
$\angle$ bdg = $\angle$ adx (I. 15.)
und bd = ad (p. h.)

Also Δ bdg $\cong$ Δ adx (I. 26.)
und daher dg = dx; folglich ist xg = 2 (xd).

Da ce = eb (p. h.) und ex parallel bg (p. c.)
so ist nach dem Lehnsatze Seite 140. auch cx = xg
Und weil xg = 2(xd)
so ist cx = 2 (xd)
und aus gleichen Gründen ist auch ax = 2(xe).

Zusatz. Da, wenn man von b aus die Halbirungslinie an ac zieht, durch Diese die cd eben so getheilt werden muß, daß der obere Theil zwei

Mal so groß als der untere ist: so folgt, daß diese Halbirungslinie ebenfalls durch x gehen muß. Die drei zu einem Dreieck gehörigen Halbirungslinien schneiden sich also in einem und demselben Punkte; und es wird jede derselben in diesem Punkte so getheilt, daß der Theil zwischen x und der Spitze des Dreiecks zwei Mal so groß ist, als der Theil zwischen diesem Punkte und der Seite.

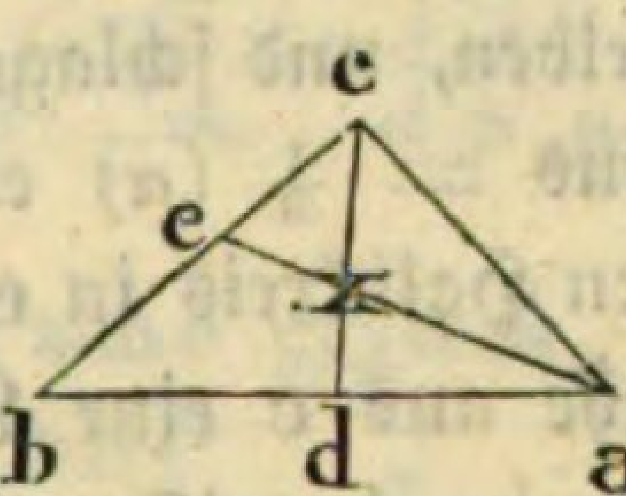
Aufgabe 274. Von einem Dreieck sind zwei Halbirungslinien gegeben, und die zu der Einen gehörige Seite des Dreiecks.

Gegeben (α), (γ) und C.

Analysis. Da ab = C gegeben ist, so ist auch $ad = \frac{1}{2}C$ ebenfalls gegeben.

Es ist $ac = (\alpha)$ gegeben, also auch $ax = \frac{2}{3}(\alpha)$

„ „ $cd = (\gamma)$ „ „ „ $dx = \frac{1}{3}(\gamma)$



Folglich sind von $\Delta\, adx$ alle drei Seiten gegeben, und daher das Dreieck. Verlängert man ad bis db = ad, und ax bis ae = (α); zieht durch b und e eine Linie, bis sie die verlängerte dx in c schneidet, und zieht ca, so ist abc „das verlangte Dreieck".

Aufgabe 275. Von einem Dreieck ist Eine Seite gegeben, und die zu den beiden übrigen Seiten gehörigen Halbirungslinien.

Gegeben B, (α) und (γ).

Analysis. In der Figur Aufg. 274. ist gegeben

$ac = B$

$ae = (\alpha)$ also auch $ax = \frac{2}{3}(\alpha)$

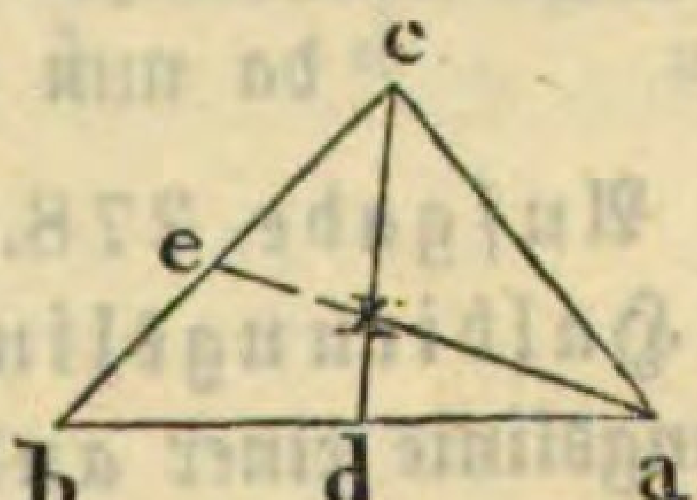
$cd = (\gamma)$ „ „ $cx = \frac{2}{3}(\gamma)$

Folglich ist $\Delta\, acx$ gegeben, und hierdurch auch $\Delta\, abc$.

Aufgabe 276. Von einem Dreieck ist Ein Winkel gegeben, die zu der demselben gegenüberliegenden Seite gehörige Halbirungslinie, und die Halbirungslinie einer andern Seite des Dreiecks.

Gegeben $\llcorner c$, (γ) und (α).

Analysis. Da $ae = (\alpha)$ gegeben ist, und $\llcorner c$: so kann



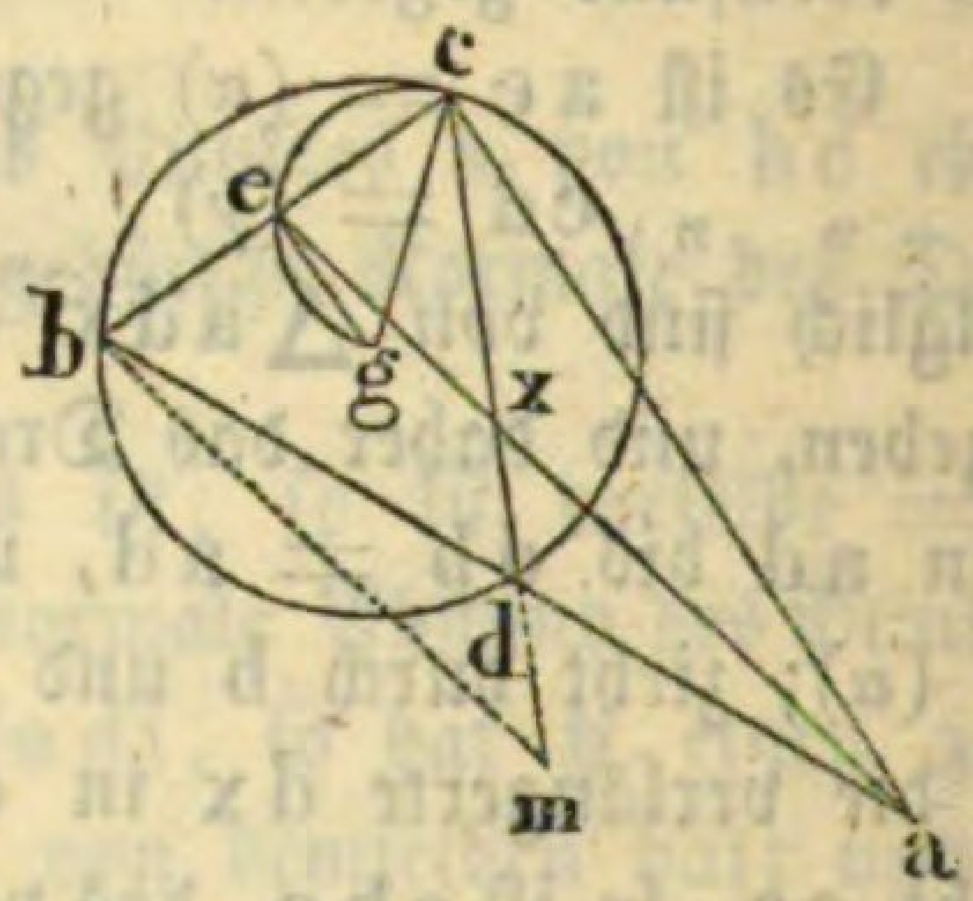
ein Kreis beschrieben werden von der Art, daß $ae = (\alpha)$ die Sehne des Bogens ist, zu welchem $\llcorner c$ als Peripheriewinkel gehört (33.). Da $ax = \frac{2}{3}(\alpha)$, so ist der Punkt x gegeben; und auch $xc = \frac{2}{3}(cd) = \frac{2}{3}(\gamma)$ ist gegeben. Folglich kann man aus x

mit einem Radius = $\frac{2}{3}$ (γ) einen Kreisbogen beschreiben, der den zuerst beschriebenen Kreis in c schneiden wird, und es ist hierdurch Δace gegeben. Wird hierauf cx gezogen und verlängert, bis cd = (γ); und durch a und d eine Linie, bis sie die verlängerte ce in b schneidet: so ist Δabc „das gesuchte Dreieck".

Aufgabe 277. Von einem Dreieck ist Ein Winkel gegeben, und die zu den beiden anliegenden Seiten gehörigen Halbirungslinien; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben ∟b, (α) und (γ).

Auflösung. Beschreibe einen Kreis, so daß cd = (γ) Sehne des Bogens wird, zu welchem ∟b als Peripheriewinkel gehört (33.); und nimm cx = $\frac{2}{3}$ (cd); ziehe den Radius gc des beschriebenen Kreises, beschreibe einen Halbkreis über demselben, und schlage aus x mit einem Radius = $\frac{1}{3}$ (α) einen Bogen, bis er den Halbkreis in e schneidet. Durch e ziehe aus c eine Linie, bis sie den Kreis in b trifft; und von b ziehe durch d eine Linie, und verlängere dieselbe, bis sie die verlängerte ex in a schneidet. Verbinde endlich a mit c, so ist abc „das gesuchte Dreieck".



Beweis. Es ist cd = (γ) (p. c.) und ∟gec = R (31.) Folglich ist bc in e halbirt (3.), also ae eine Halbirungslinie des Dreiecks abc. Wird aber durch b die bm der ex parallel gezogen, bis sie die verlängerte cd in m schneidet: so ist,

da ce = eb, auch cx = xm
aber cx = 2 (xd) (p. c.)

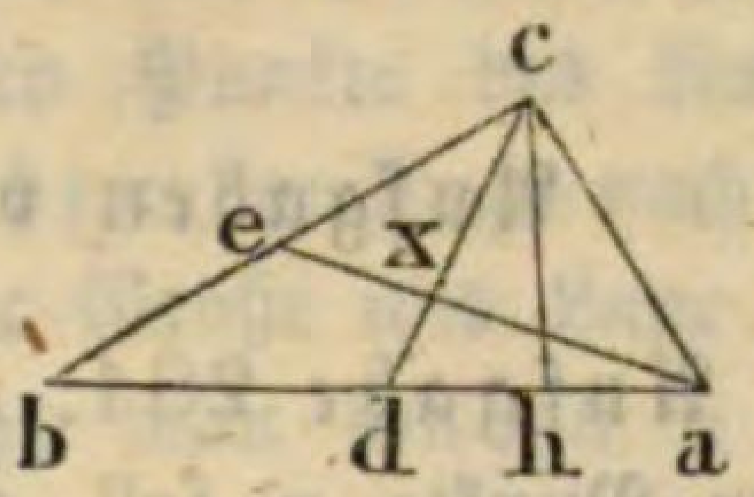
folglich xm = 2 (xd) und daher xd = dm
und daher Δxda ≅ Δmdb
folglich ist ad = db.

Es ist also auch cd = (γ) eine Halbirungslinie des Dreiecks
und daher ax = 2 (xe) und ae = 3 (xe)
da nun xe = $\frac{1}{3}$ (α), so ist ae = (α).

Aufgabe 278. Von einem Dreieck ist die Normale und die Halbirungslinie Einer Seite gegeben, und auch die Halbirungslinie einer andern Seite.

Gegeben γ, (γ) und (α).

Analysis. Da ch = γ und cd = (γ) gegeben ist: so ist Δ chd gegeben, und daher ba der Lage nach.

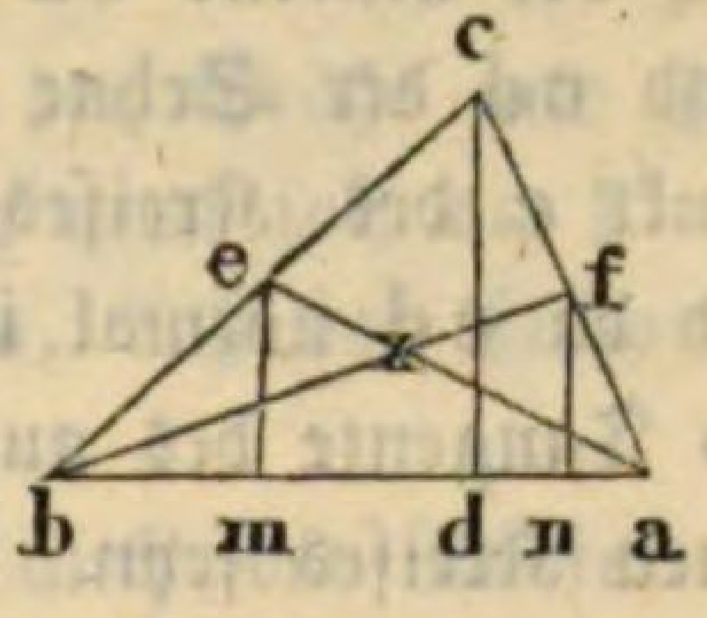


Aber ae = (α), und daher ax = $\frac{2}{3}$ (α) ist der Größe, und der Punkt x der Lage nach gegeben; folglich auch der Punkt a, und daher ae = (α) der Größe und Lage nach, und hierdurch „das gesuchte Dreieck".

Aufgabe 279. Von einem Dreieck sind zwei Halbirungslinien gegeben, und die Normale der dritten Seite.

Gegeben (α), (β) und γ.

Analysis. Durch ae = (α) wird bc in e, und durch bf = (β), die ac in f halbirt; werden also die Normalen cd, em und fn auf ab gefället, so ist, da cd = γ, em = $\frac{1}{2}$ γ (Lehnsatz Seite 140), und auch fn = $\frac{1}{2}$ γ.



Durch ae = (α) und em = $\frac{1}{2}$ γ, ist Δame gegeben,
und „ bf = (β) und fn = $\frac{1}{2}$ γ, ist Δbnf „ .

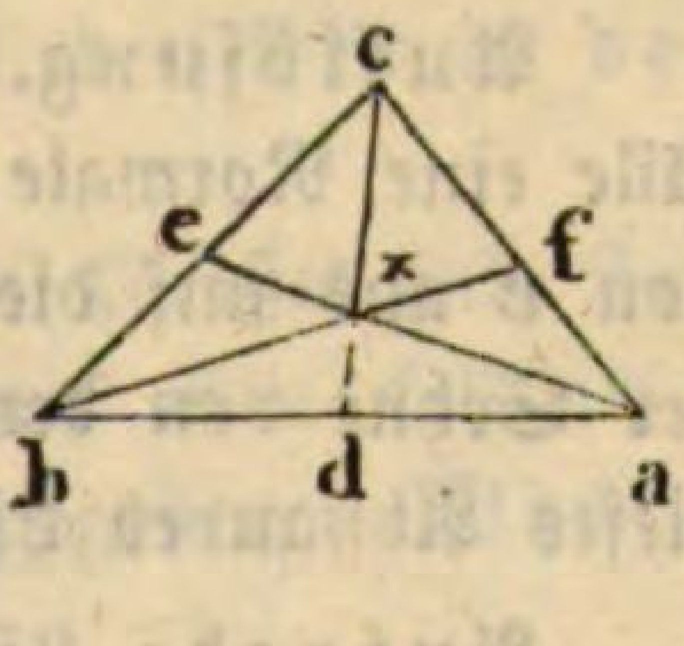
Aber auch der Punkt x ist gegeben, in welchem ae und bf sich schneiden, da ax = $\frac{2}{3}$ (α) und bx = $\frac{2}{3}$ (β) seyn muß. Folglich sind diese Dreiecke auch ihrer Lage nach gegeben, wodurch Δabc bestimmt ist.

Aufgabe 280. Man kennt von einem Dreieck die drei Halbirungslinien desselben; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben (α), (β) und (γ).

Analysis. Da gegeben ist
ae = (α), so ist auch ax = $\frac{2}{3}$ (α) ebenfalls gegeben,
bf = (β), „ „ bx = $\frac{2}{3}$ (β) „ „
cd = (γ), „ „ xd = $\frac{1}{3}$ (γ) „ „

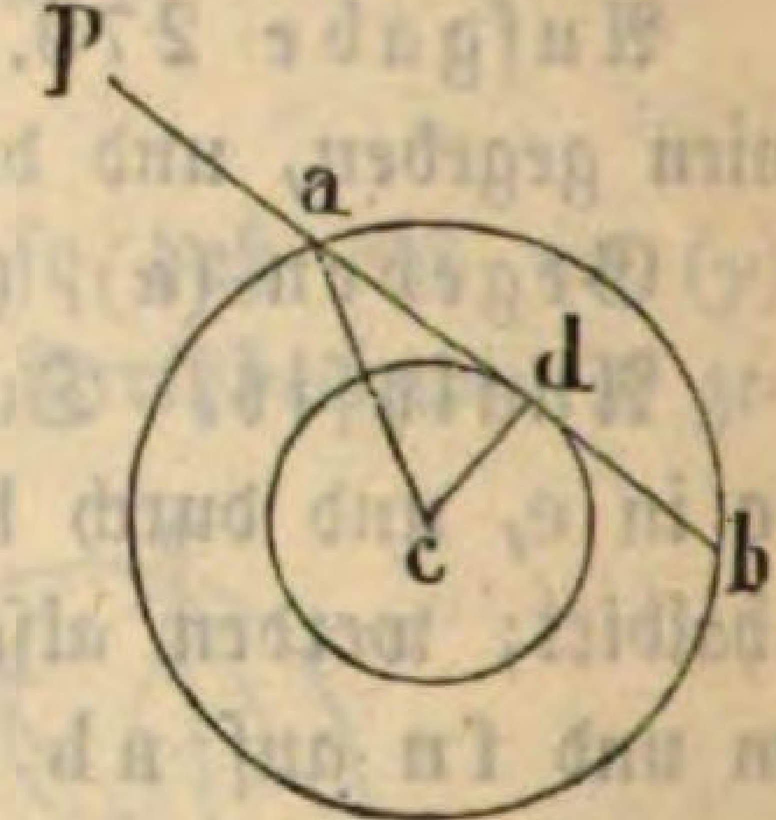
Folglich sind gegeben von dem Dreieck axb zwei Seiten xa, xb, und die zu der dritten Seite gehörige Halbirungslinie xd; also ist Δaxb gegeben (Aufg. 256.), und hierdurch ist Δabc ebenfalls gegeben.



§. 20.

Aufgaben von Sehnen und Tangenten.

Aufgabe 281. Von einem, außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte p soll eine Linie durch den Kreis gezogen werden: so daß der Theil dieser Linie, welcher Sehne des Kreises wird, eine gegebene Länge = S hat.



Analysis. Ist ab = S die der Größe nach gegebene Sehne: so ist, da auch der Radius ca gegeben ist, der Abstand cd der Sehne S von dem Mittelpunkt c des Kreises ebenfalls gegeben; und da cd normal ist auf ab, so muß ab Tangente des aus c mit cd beschriebenen Kreises seyn.

Auflösung. Nimm den Abstand der gegebenen Sehne S von dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises, beschreibe aus c mit diesem Abstande einen Kreis, und ziehe von p aus eine Tangente an denselben (16.): so ist das Verlangte geschehen.

Determination. Es darf nicht seyn $S > 2R$, wenn R der Radius des gegebenen Kreises ist.

Aufgabe 282. Innerhalb eines Kreises ist ein Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Sehne des Kreises legen, die eine gegebene Länge hat.

Aufgabe 283. Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, und eine gerade Linie der Lage nach; man soll eine Sehne des Kreises von gegebener Länge so ziehen, daß sie der der Lage nach gegebenen Linie parallel ist.

Auflösung. Aus dem Mittelpunkte c des gegebenen Kreises fälle eine Normale auf die der Lage nach gegebene Linie l. Schneide von c aus auf dieser Normale ein Stück ab, das dem Abstande der Sehne von dem Mittelpunkte gleich ist, und ziehe am Endpunkte dieses Abstandes die Sehne parallel der l.

Aufgabe 284. Ein Kreis k ist der Größe und Lage nach gegeben, und eine Linie l der Lage nach; man soll in dem Kreise eine Sehne von gegebener Länge ziehen, welche die l unter einem rechten Winkel schneidet.

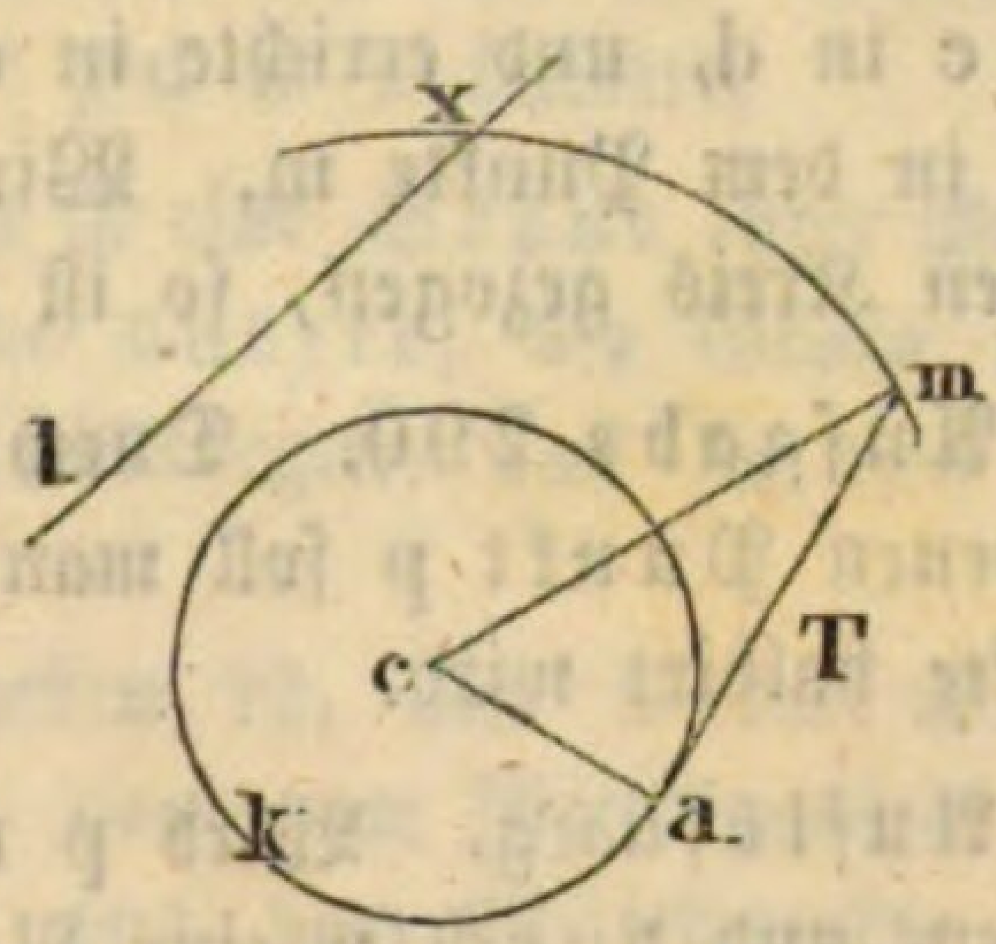
Auflösung. Man ziehe einen Radius parallel der l, und schneide auf demselben den Abstand der Sehne von dem Mittelpunkte ab, und fälle von dem hierdurch bestimmten Punkte des Radius eine Normale auf l: so ist Diese „die Sehne der Lage nach".

Aufgabe 285. Ein Kreis k ist der Größe und Lage nach gegeben, und eine Linie l der Lage nach; man soll in k eine Sehne von gegebener Länge, = S, so ziehen, daß sie die l unter einem gegebenen Winkel φ schneidet.

Auflösung. Setzt man an l in irgend einem Punkte derselben eine Linie l′ unter dem Winkel φ an, und zieht nun eine Sehne = S parallel der l′ (Aufg. 283.): so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 286. Es ist ein Kreis k der Größe und Lage nach gegeben, und eine Linie l der Lage nach; man soll an k eine Tangente T von gegebener Länge so ziehen, daß der Endpunkt derselben in der Linie l liegt.

Analysis. Da k gegeben ist, so ist auch der Radius ca desselben gegeben; aber auch am = T ist der Größe nach gegeben, folglich cm der Größe nach (Aufg. 1.); und daher der Kreis, welcher mit cm aus c beschrieben werden kann, der Größe und Lage nach; und in dem Umfange dieses Kreises muß der Endpunkt der Tangente liegen. Da nun aber derselbe auch in l liegen soll: so ist der Endpunkt x der Tangente, und daher auch Diese selbst ihrer Lage nach (16.) bestimmt.



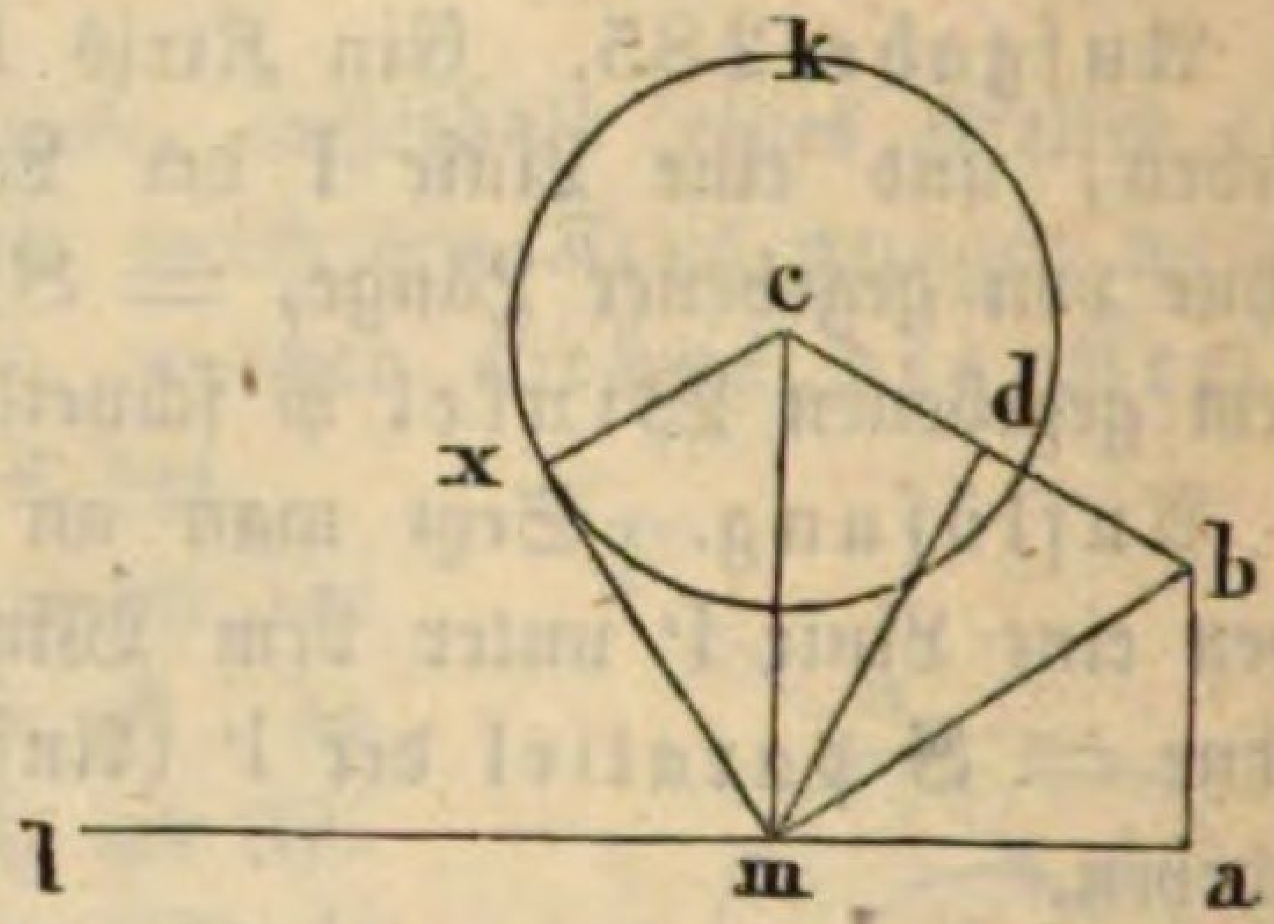
Aufgabe 287. Zwei Kreise k′ und k″ sind der Größe und Lage nach gegeben; man soll an k′ eine Tangente von gegebener Länge so ziehen, daß der Endpunkt derselben in dem Umfange von k″ liegt.

Aufgabe 288. Ein Kreis k ist der Größe und Lage nach, und eine Linie l der Lage nach gegeben; man soll an k eine Tangente ziehen, welche die l unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Aufgabe 289. Ein Kreis k ist der Größe und Lage nach gegeben, und eine an dem einen Endpunkte begrenzte gerade Linie l der Lage nach; man soll eine Tangente an k ziehen, so daß das

durch dieselbe abgeschnittene Stück von l der gegebenen Tangente gleich sey.

Analysis. Es sey a der Endpunkt von l, und m der gesuchte Punkt, in welchem l von der zu ziehenden Tangente getroffen wird, und mx die Tangente: so soll seyn mx = ma. Man errichte auf l in a die Normale ab = cx, und ziehe mb, mc: so ist



$\Delta mab \cong \Delta mxc$

und daher mb = mc, folglich Δ bmc gleichschenklig.

Nun ist bc der Größe und Lage nach bestimmt, folglich auch der Punkt m.

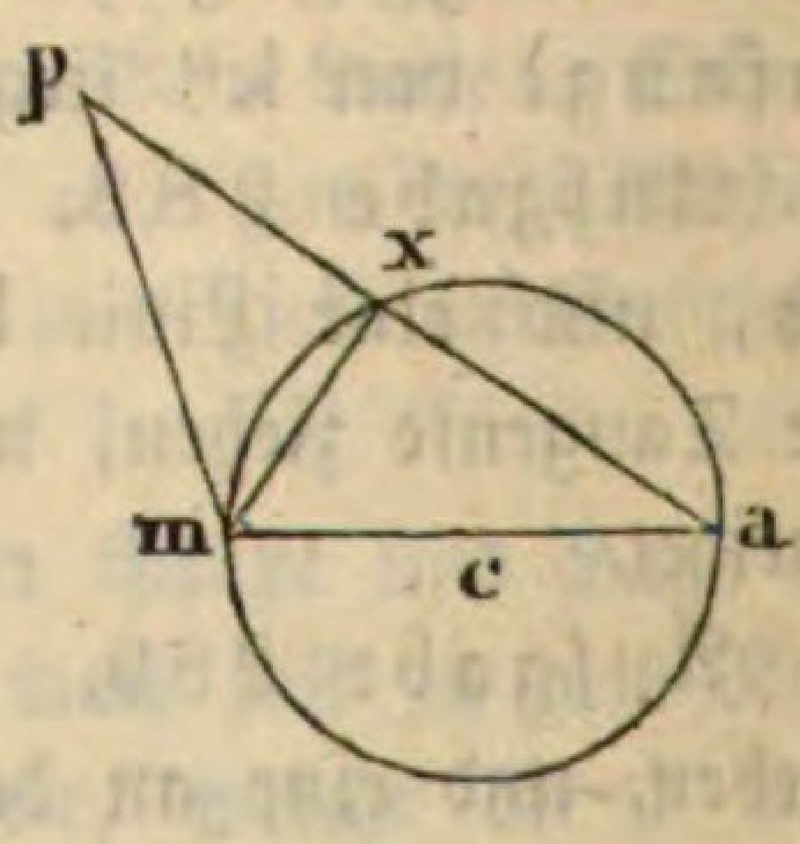
Auflösung. Auf l errichte in a eine Normale ab so groß, als der Radius des gegebenen Kreises k; verbinde b mit c, halbire die bc in d, und errichte in d auf bc eine Normale: so trifft diese die l in dem Punkte m. Wird jetzt von m eine Tangente mx an den Kreis gezogen, so ist mx = ma.

Aufgabe 290. Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt p soll man eine Sehne ziehen, die in diesem Punkte halbirt wird.

Auflösung. Wird p mit dem Mittelpunkte des Kreises verbunden, und durch p eine Normale mit der Verbindungslinie gezogen: so ist diese „die gesuchte Sehne".

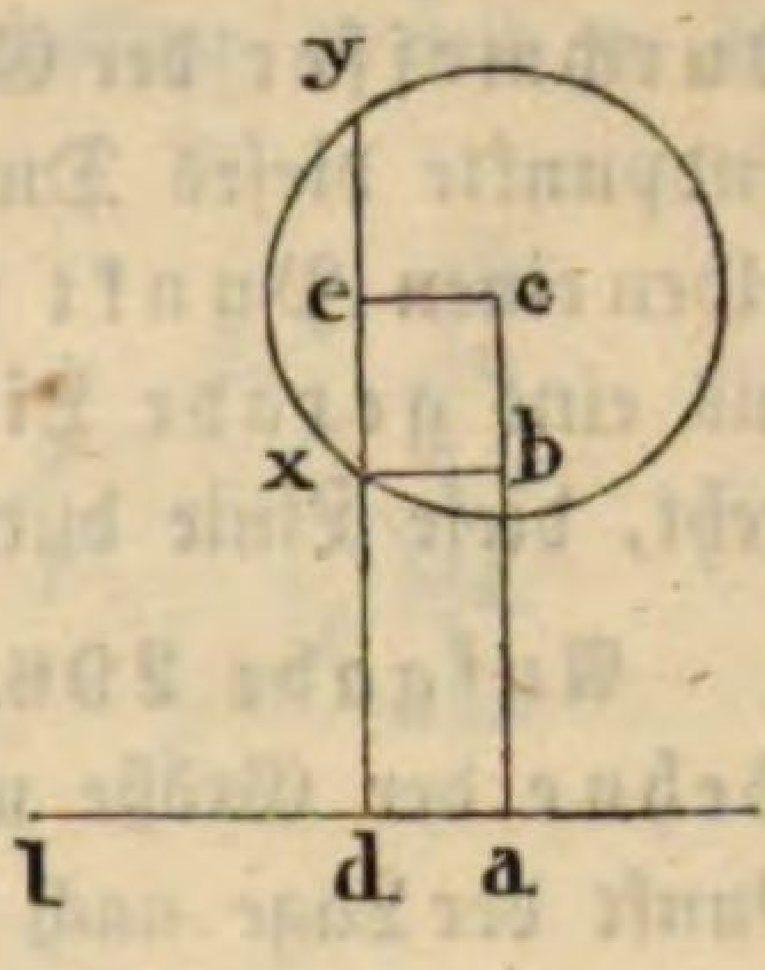
Aufgabe 291. Man soll, von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte p, eine Secante durch den Kreis ziehen; so daß der Theil derselben, welcher außerhalb des Kreises liegt, dem Theile gleich ist, der eine Sehne desselben bildet.

Auflösung. Aus p beschreibe mit einer Linie, die dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich ist, einen Bogen, bis er den Kreis in m schneidet; von m ziehe durch den Mittelpunkt den Durchmesser mca, und verbinde a mit p, so wird diese Linie in x halbirt; wie verlangt wird.



Aufgabe 292. Ein Kreis iſt der Größe und Lage nach gegeben, und eine Linie l außerhalb des Kreiſes der Lage nach; man ſoll auf l eine Normale errichten, die durch den Kreis halbirt wird, ſo daß alſo der Theil derſelben außerhalb des Kreiſes dem Theile gleich iſt, welcher eine Sehne des Kreiſes bildet.

Analyſis. Iſt yxd die auf l zu ziehende Normale, ſo muß ſeyn yx = xd; wird aber ce normal auf xy gezogen, ſo iſt xy in e halbirt, und daher iſt xd = 2 (xe). Da nun, wenn man ca normal auf l zieht, und xb parallel der l, cb = ex und ba = xd wird: ſo iſt auch ba = 2 (cb), alſo cb = $\frac{1}{3}$ (ca). Aber ca iſt gegeben, alſo auch der Punkt b, und daher der Punkt x.



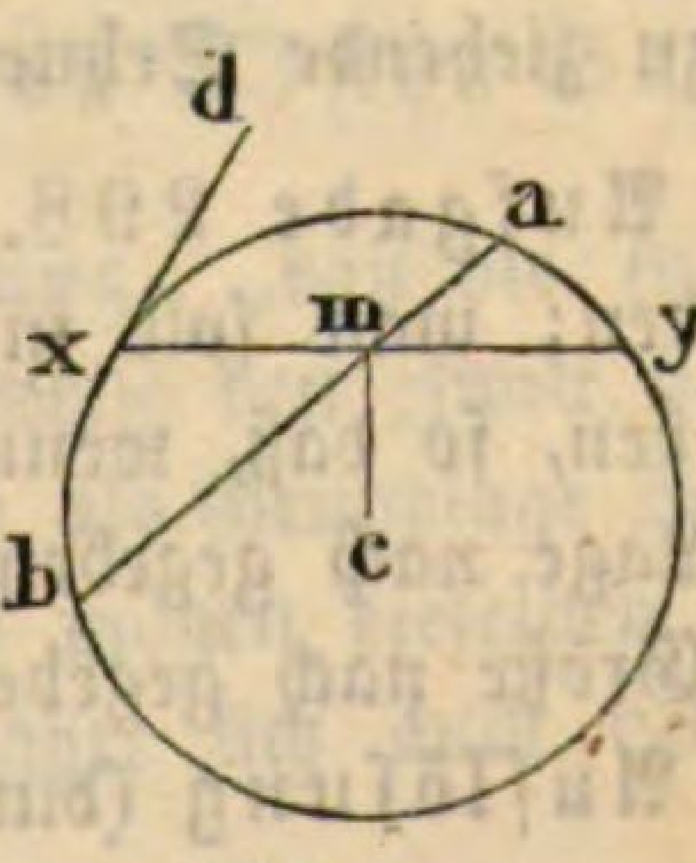
Auflöſung. Von dem Mittelpunkte c des gegebenen Kreiſes ziehe die Normale ca auf l, nimm cb = $\frac{1}{3}$ (ca) und ziehe durch b die bx parallel der l. Durch x ziehe yd parallel der ca, ſo wird die yd in x halbirt.

Aufgabe 293. In einem Kreiſe iſt eine Sehne ihrer Größe und Lage nach gegeben; man ſoll eine andere, der Größe nach gegebene Sehne = S ſo in den Kreis legen, daß ſie von der erſtern halbirt wird.

Analyſis. Da der Kreis gegeben iſt, und S der Größe nach, ſo iſt auch der Abſtand der S von dem Mittelpunkte des Kreiſes gegeben; und beſchreibt man aus dem Mittelpunkte mit dieſem Abſtande einen Kreis, ſo ſchneidet dieſe die der Lage nach gegebene Sehne in dem Punkte, durch welchen S gelegt werden muß.

Aufgabe 294. Ein Kreis iſt gegeben, und in demſelben eine Sehne S der Größe und Lage nach; man ſoll eine andere Sehne ziehen, die von S halbirt wird, und dieſelbe unter einem gegebenen Winkel φ ſchneidet.

Analyſis. Es ſey ab die der Größe und Lage nach gegebene, und xy die zu ziehende Sehne; welche in m halbirt wird, und die ab ſo ſchneidet, daß $\angle$ xmb = φ. Ziehe cm: ſo iſt



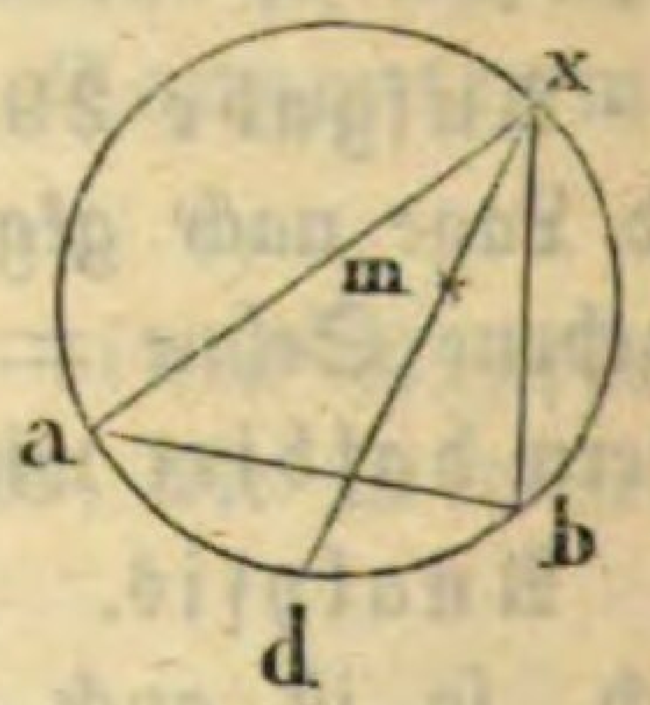
$$\angle cmx = R \quad (3.)$$
$$\text{aber } \angle bmx = \varphi \text{ gegeben}$$

also auch $\angle cmb$ gegeben, und dadurch der Punkt m.

Determination. Zieht man an x die Tangente xd, so muß seyn $\angle \varphi < \angle yxd$.

Aufgabe 295. Es ist ein Kreis, und in demselben ein Durchmesser der Größe und Lage nach gegeben, und an dem einen Endpunkte dieses Durchmessers eine Tangente; man soll in derselben einen Punkt so bestimmen, daß, wenn man von diesem Punkte aus eine gerade Linie an den andern Endpunkt des Durchmessers zieht, diese Linie durch den Kreis halbirt wird.

Aufgabe 296. Es ist ein Kreis und in demselben eine Sehne der Größe und Lage nach gegeben, und außerdem ist ein Punkt der Lage nach gegeben; man soll in dem Umfange des Kreises einen Punkt so bestimmen, daß, wenn man von demselben Linien zieht an die Endpunkte der Sehne und durch den gegebenen Punkt, die letztere den von den beiden ersteren eingeschlossenen Winkel halbirt.



Auflösung. Ist ab die gegebene Sehne und m der gegebene Punkt, so halbire man den Bogen ab in d (30.), und ziehe von d durch m eine Linie: so trifft diese den Umfang in dem gesuchten Punkte x, so daß $\angle bxd = \angle axd$ wird (27.).

Aufgabe 297 Ein Kreis ist gegeben und eine Sehne desselben der Größe und Lage nach. Durch einen der Lage nach gegebenen Punkt p soll man eine Sehne so ziehen, daß dieselbe von der der Größe und Lage nach gegebenen halbirt wird.

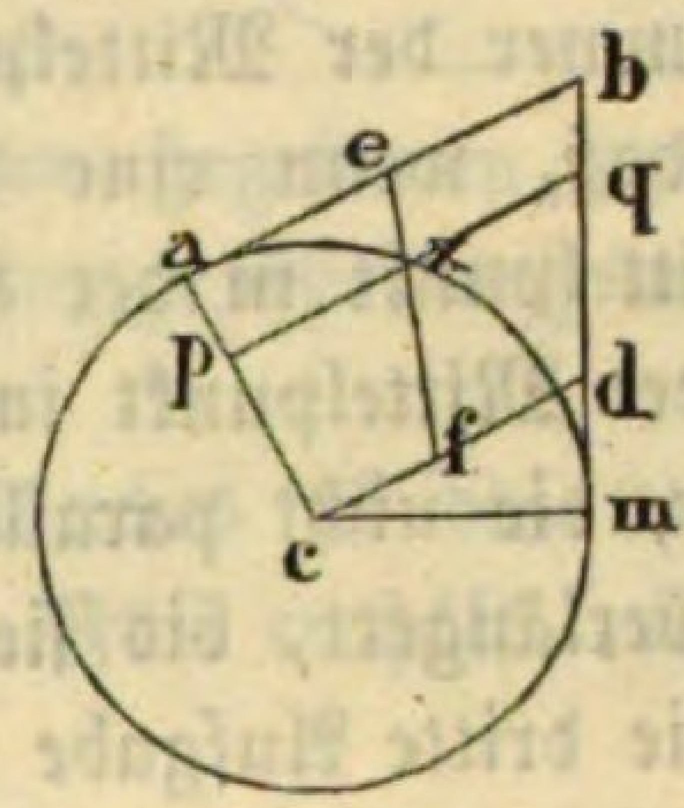
Auflösung. Verbinde den gegebenen Punkt p mit dem Mittelpunkte c des Kreises und beschreibe über pc einen Halbkreis: so schneidet dieser die gegebene Sehne in dem Punkte, durch welchen die zu ziehende Sehne gehen muß.

Aufgabe 298. Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben; man soll in dem Umfange dieses Kreises einen Punkt angeben, so daß, wenn man von diesem Punkte Linien durch zwei der Lage nach gegebene Punkte p′ und p″ zieht, diese Linien einen der Größe nach gegebenen Winkel einschließen.

Auflösung (durch den 33sten Satz).

Aufgabe 299. Ein Kreis und ein Radius desselben sind der Größe und Lage nach gegeben, und an diesem Kreise eine Tangente, die nicht durch den Endpunkt des gegebenen Radius geht. Man soll von einem zu bestimmenden Punkte der Tangente eine Normale auf den Radius fällen, die da, wo sie den Kreis schneidet, halbirt wird.

Auflösung. Errichte an beiden Endpunkten **c** und **a** des gegebenen Radius Normalen, bis sie die Tangente **mb** in **d** und **b** schneiden, halbire die Linien **cd** und **ab** in **f** und **e**, und ziehe **fe**. Durch den Punkt **x**, in welchem diese den Kreis schneidet, ziehe **pq** parallel der **ab** und **cd**, so ist **pq** die verlangte Linie.



Beweis. Dieser beruhet darauf „daß, wenn man in einem Paralleltrapez **abdc** die beiden parallelen Seiten **ab** und **cd** halbirt, und die Halbirungspunkte durch eine gerade Linie **ef** verbindet, jede Linie **pq**, welche man parallel den parallelen Seiten in dem Trapez zieht, durch **ef** halbirt wird".

Aufgabe 300. Eine gerade Linie innerhalb und eine außerhalb eines der Größe und Lage nach gegebenen Kreises sind der Lage nach gegeben; man soll durch den Kreis eine Linie bis an die beiden der Lage nach gegebenen ziehen, so daß dieselbe da, wo sie den Kreis schneidet, halbirt wird, und die eine Linie unter einem gegebenen Winkel trifft.

Auflösung. Diese ist im Wesentlichen der Auflösung der vorigen Aufgabe gleich, und stützt sich auf denselben Satz wie jene.

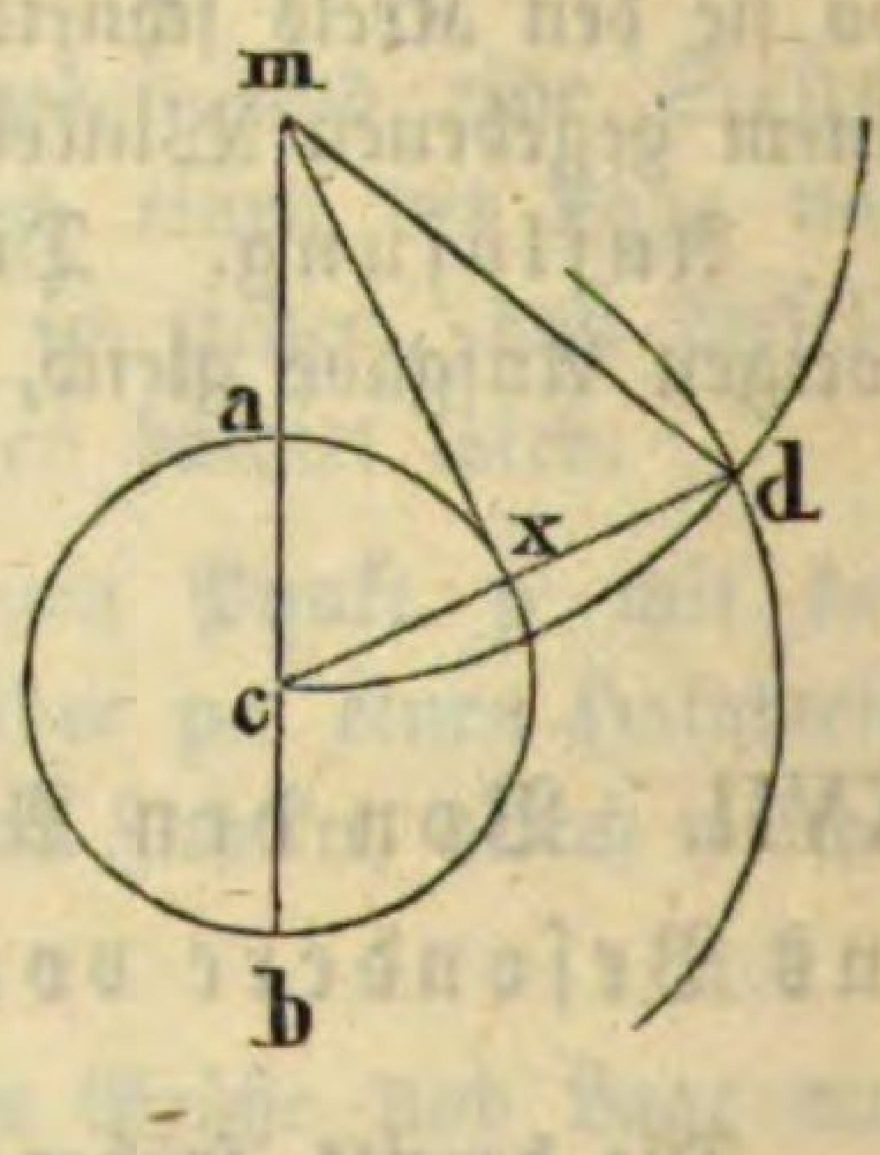
XVII. Von den Aufgaben des dritten Buches und ins Besondere von der Aufgabe des 33sten Satzes.

Die bereits früher aufgestellte Behauptung, „daß die in den Elementen vorkommenden Aufgaben vorzugsweise den Zweck haben: Mittel für die Construction darzubieten, und als Grundlage bei der Auflösung aller vorkommenden Aufgaben, es mögen dieselben theoretisch oder praktisch seyn, zu dienen", bewährt sich auch bei den Aufgaben des dritten Buches.

Von den sechs Aufgaben, die in diesem Punkte vorkommen, lehren zwei „den Mittelpunkt eines Kreises zu finden" wenn derselbe entweder vollständig gegeben ist, oder auch nur ein Bogen desselben. Dadurch, daß in dem letztern Falle (25.) drei verschiedene Fälle angegeben werden, erhält man die Construction für die Auffindung des Mittelpunktes; wenn gegeben ist a) der Vollkreis, b) der Halbkreis, c) ein Bogen, der kleiner, und d) ein Bogen, der größer ist, als der Halbkreis. Das Wesentliche der Auflösung, und „wodurch immer der Mittelpunkt gefunden werden kann", beruhet darauf, „daß, wenn eine Sehne eines Kreises normal halbirt wird, der Mittelpunkt in der Halbirungslinie liegen muß"; und es wird daher der Mittelpunkt immer gefunden, wenn man zwei verschiedene Sehnen, die nicht parallel sind, normal halbirt, und die Halbirungslinien verlängert, bis sie sich schneiden.

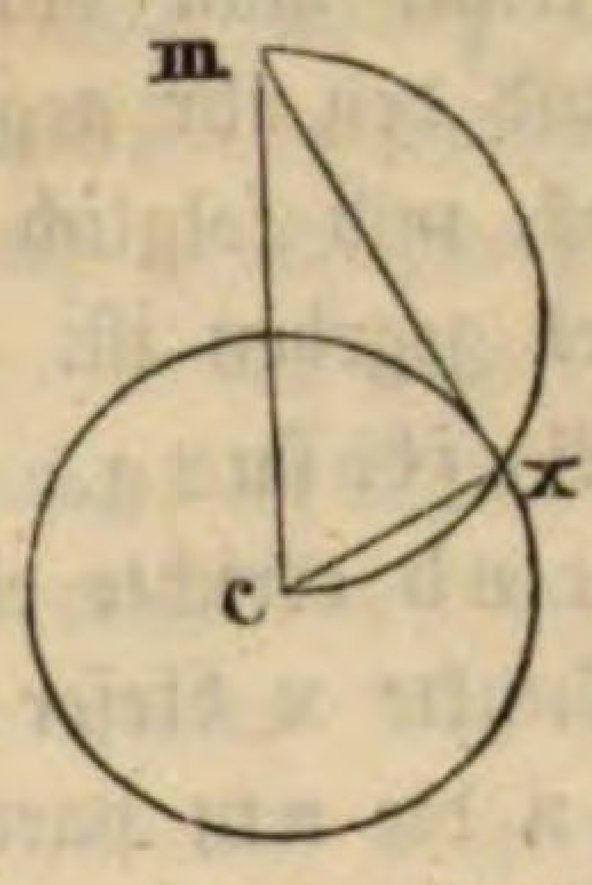
Die dritte Aufgabe (17.) lehrt, „an einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, die durch einen außerhalb des Kreises der Lage nach gegebenen Punkt geht"; und diese Aufgabe findet immer ihre Anwendung, wenn es darauf ankömmt „eine gerade Linie zu ziehen, die von einem gegebenen Punkte einen bestimmten Abstand haben soll". Außer dem in (17.) angegebenen Verfahren bei der Auflösung dieser Aufgabe kann dieselbe auch noch auf verschiedene andere Arten gelös't werden, von welchen folgende beide hier angeführt zu werden verdienen:

Ist c der Mittelpunkt des Kreises, und m der Punkt, durch welchen die Tangente gehen soll: so ziehe man von m aus durch c eine Linie, beschreibe aus m als Mittelpunkt mit mc einen Kreis, und aus c mit dem Durchmesser ab ebenfalls einen, der den erstern in d schneidet. Wird hierauf d mit c verbunden, so schneidet diese Linie den Kreis in dem Punkte x, in welchem die Tangente aus m denselben berührt. Denn zieht man md, so ist



$$\begin{aligned} cd = ab = 2\,(cx), \text{ also } cx &= xd \\ mc &= md \\ \text{und } mx &= mx \\ \hline \text{folglich } \triangle mxc &\cong mxd \\ \text{und daher } \llcorner mxc = \llcorner mxd &= R. \end{aligned}$$

mx steht also normal auf cx an dem Endpunkte des Radius, und ist daher eine Tangente.



Ferner wird der Punkt m mit c verbunden, und man beschreibt über mc einen Halbkreis, so schneidet dieser den gegebenen Kreis ebenfalls in dem Berührungspunkte x der Tangente. Denn da $\angle$ mxc ein Winkel im Halbkreise ist, so ist derselbe = R (31.), und daher mx eine Tangente des Kreises (16.)

Die vierte Aufgabe lehrt, „einen jeden gegebenen Kreisbogen zu halbiren (30.); und es ist Dieses die einzige Theilung des Kreisbogens, welche geometrisch ausführbar ist.

Die wichtigste Aufgabe des dritten Buches ist die 5te (33.), von welcher die 6te (34.) den umgekehrten Fall enthält. Die Aufgabe Satz 33., lautet:

„Ueber einer gegebenen geraden Linie ab soll ein Kreisabschnitt beschrieben werden, der einen geradlinigen Winkel faßt, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist".

Diese Aufgabe läßt sich auch auf folgende Art ausdrücken:

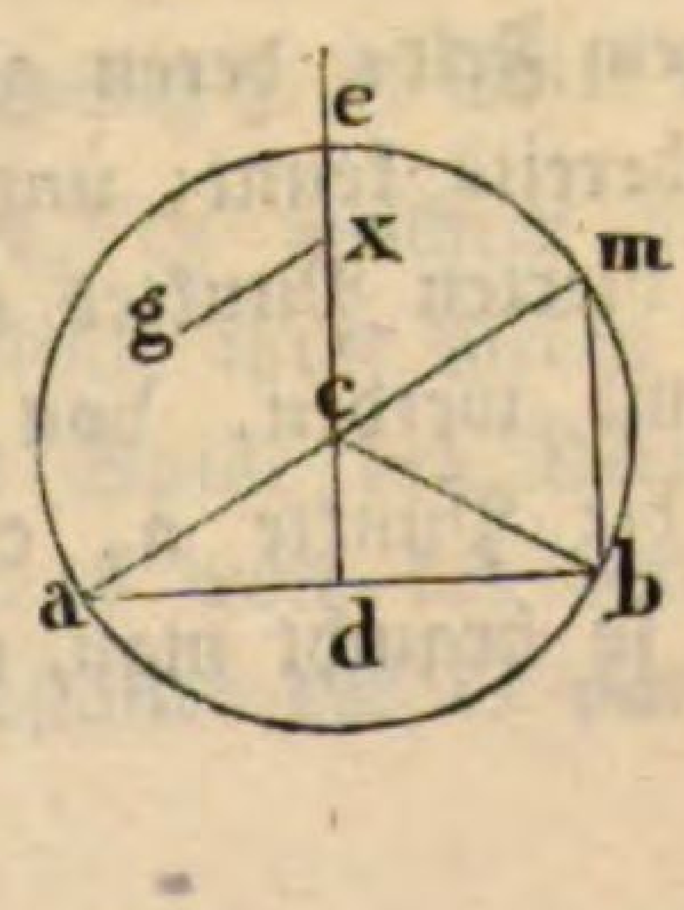
„Es ist eine gerade Linie gegeben und ein Winkel; man soll einen Kreis beschreiben von der Art, daß der gegebene Winkel Peripheriewinkel des Bogens wird, zu welchem die gegebene Linie als Sehne gehört".

Bei der Auflösung werden die Sätze benutzt: a) wenn man eine Sehne normal halbirt, so liegt des Kreises Mittelpunkt in der Halbirungslinie (3.); b) der auf einem Bogen stehende Peripheriewinkel ist dem Winkel gleich, welchen die Sehne mit der an dem einen Endpunkte derselben gezogenen Tangente des Kreises einschließt: (32.); und c) zieht man in dem Berührungspunkte einer Tangente eine Normale auf derselben, so geht Diese durch den Mittelpunkt des Kreises (19.)

Die folgende Analysis führt übrigens noch zu einer andern Auflösung dieser Aufgabe.

Analysis. Es ist $\angle$ amb = x gegeben, also auch

$\angle$ acb = 2 x (20.)



Nun ist, wenn man cd normal auf ab zieht, $\angle$ acd = $\angle$ bcd.

Folglich ist auch $\angle$ acd = x gegeben.

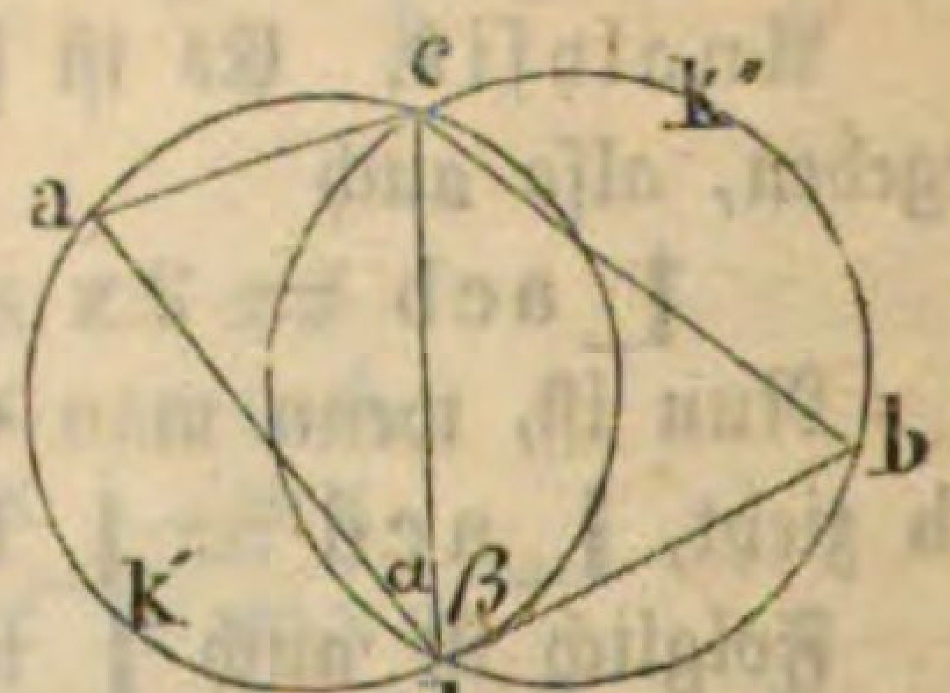
Da ab gegeben ist, so ist ad = $\frac{1}{2}$ ab ebenfalls gegeben; also kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck acd die Kathete ad und den ihr gegenüber liegenden Winkel = x, wodurch das Dreieck, und folglich auch ca, also der Radius des zu beschreibenden Kreises gegeben ist.

Auflösung. In dem Halbirungspunkte d der gegebenen Sehne ab errichte eine Normale de auf derselben, in irgend einem der Punkte x dieser Normale trage ∟dxg = ∟x an, und ziehe durch a die am parallel der gx: so schneidet am die de in dem Mittelpunkte c des zu beschreibenden Kreises, und es ist ca der Radius desselben.

Anmerkung. Obgleich die hier gegebene Auflösung sich nur auf einen spitzen Winkel bezieht, so läßt sich doch leicht abnehmen, „daß dieselbe auch in dem Falle anwendbar ist, wenn der gegebene Winkel = R oder > R ist".

Beschreibt man über ab als Grundlinie ein Dreieck, dessen Spitze innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt: so ist der der ab gegenüber liegende Winkel des Dreiecks in dem ersten Falle größer und in dem andern kleiner, als der zu ab gehörige Peripheriewinkel (I. 16.); und daher ist der Bogen aeb der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, in welchen der Grundlinie ab ein Winkel = x gegenüber liegt. Da nun, wenn der geometrische Ort eines Punktes gegeben ist, hierdurch die Aufgabe, die Lage dieses Punktes zu finden, bereits zur Hälfte gelös't ist (Seite 101. Nr. 16.): so läßt sich hieraus abnehmen, daß die Aufgabe Satz 33. in sehr vielen Fällen sich mit Vortheil muß anwenden lassen. Auch ist dieselbe bereits vielfach angewendet worden, und namentlich bei der Auflösung der Aufgaben 260., 261., 265., 271., 276., 277. und 298.

Diese Aufgabe hat auch für die praktische Geometrie einen sehr hohen Werth.



Sind a, c und b drei Punkte auf dem Felde, deren gegenseitige Lage man bereits kennt; und soll die Lage eines vierten Punktes d zu denselben bestimmt werden, von welchem aus man die Punkte a, c und b sehen kann: so braucht man, um diesen Zweck

zu erreichen, nur in d die Winkel adc $= \alpha$ und $\angle$ bdc $= \beta$ zu messen. Denn da ac der Größe und Lage nach und $\angle \alpha$ der Größe nach gegeben ist, so kann man den Kreis k′ beschreiben, in welchem ac die Sehne des Bogens ist, zu dem $\angle \alpha$ als Peripheriewinkel gehört; und eben so kann man, da auch bc der Größe und Lage nach gegeben ist, und $\angle \beta$ der Größe nach, den Kreis k″ beschreiben, so daß bc die Sehne des Bogens wird, auf welchem β als Peripheriewinkel steht. Beide Kreise schneiden sich einmal in dem Punkte c, und ihr zweiter Durchschnittspunkt d giebt die gesuchte Lage dieses Punktes gegen a, c und b.

Hierauf beruhet das in der praktischen Geometrie unter der Benennung „das Rückwärtseinschneiden″ bekannte Verfahren; welches den wesentlichen Vorzug hat, „daß man die Lage eines Punktes d finden kann, ohne dabei nöthig zu haben, den Standpunkt d zu verlassen″.

Zusatz. Wenn in einem besondern Falle die Winkel α und β eine solche Größe haben, daß $\angle \alpha + \angle \beta + \angle$ acb $= 2$ R: so läßt sich der Punkt d durch die Winkel α und β nicht bestimmen, weil alsdann acbd ein Viereck im Kreise ist (22.), und daher k′ mit k″ zusammen fällt.

Fortsetzung der Aufgaben.

§. 21.

Aufgaben, deren Auflösungen von dem 33sten Satze abhängen.

Aufgabe 301. Es ist von einem Dreieck die Grundlinie gegeben, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Höhe; man soll das Dreieck verzeichnen.

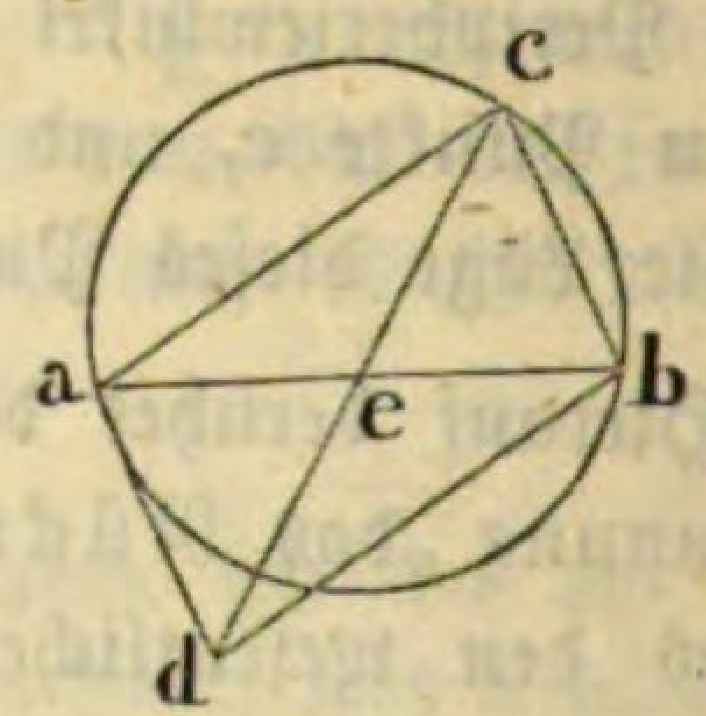
Gegeben C, $\angle$ c und γ nach der Bezeichnung §. 3. Seite 121.

Analysis. Beschreibt man den Kreis, in welchem dieses Dreieck liegen muß: so erhält man die Grundlinie ihrer Größe und Lage nach, und den geometrischen Ort für die Spitze des Dreiecks. Da nun diese Spitze in einem Abstande $= \gamma$ von der Grundlinie liegen muß: so ist auch die in diesem Abstande der C parallel

gezogene Linie ebenfalls der geometrische Ort für die Spitze, deren Lage hierdurch also vollkommen bestimmt ist.

Aufgabe 302. Von einem Parallelogramme sind die beiden Diagonalen gegeben, und der Winkel, welcher der einen Diagonale gegenüber liegt; man soll die Figur construiren.

Auflösung. Ueber der einen Diagonale ab beschreibe einen Kreis, so daß ∟ acb dem gegebenen der Diagonale ab gegenüber liegenden Winkel gleich wird. Halbire ab in e, und schlage aus e mit der Hälfte der zweiten Diagonale = ec einen Kreisbogen, welcher den Kreis in c schneidet, und ziehe ca, cb: so ist △ acb das halbe Parallelogramm, welches ergänzt wird, wenn man durch b die bd der ca, und durch a die ad der cb parallel zieht.



Aufgabe 303. Von einem Viereck im Kreise kennt man eine Diagonale, einen der Winkel des Vierecks, die dieser Diagonale gegenüber liegen, und zwei einander gegenüber liegende Seiten.

Aufgabe 304. Von einem Viereck ist eine Diagonale gegeben, die beiden derselben gegenüber liegenden Winkel des Vierecks, und zwei einander gegenüber liegende Seiten der Figur.

Aufgabe 305. Man kennt von einem Viereck die beiden Diagonalen, zwei neben einander liegende Seiten, und den Winkel, der von den beiden übrigen Seiten eingeschlossen wird.

Aufgabe 306. Von einem Viereck sind zwei neben einander liegende Seiten gegeben, zwei einander gegenüber liegende Winkel, von welchen keiner von den gegebenen Seiten eingeschlossen wird, und die Diagonale, welcher die gegebenen Winkel gegenüber liegen.

Aufgabe 307. Man soll in einem Dreieck einen Punkt angeben, der die Eigenschaft hat, „daß, wenn man von demselben gerade Linien an die drei Spitzen des Dreiecks zieht, die drei an diesem Punkte durch die gezogenen Linien gebildeten Winkel gleich groß sind".

Aufgabe 308. Ein gegebenes Dreieck soll in ein anderes verwandelt werden, von welchem die Grundlinie und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben sind.

Analysis. Wird das gegebene Dreieck in ein anderes mit der gegebenen Grundlinie verwandelt, so lernt man die Höhe des zu verzeichnenden Dreiecks kennen; da nun auch der Winkel gegeben ist, welcher der Grundlinie gegenüber liegt, so ist die Lage der Spitze des Dreiecks bestimmt, wie bei Aufg. 301.

Aufgabe 309. In einer geraden Linie sind drei Punkte gegeben; man soll Einen Punkt außerhalb dieser Linie so bestimmen, daß, wenn derselbe mit den drei gegebenen Punkten verbunden wird, durch dieselben an dem gefundenen Punkte zwei gegebene Winkel gebildet werden.

Aufgabe 310. Ueber einer der Größe und Lage nach gegebenen Grundlinie soll ein Dreieck beschrieben werden, von welchem der, der gegebenen Grundlinie gegenüber liegende Winkel gegeben ist, und dessen Spitze in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie liegen soll.

Aufgabe 311. Von einem Dreieck ist die Grundlinie gegeben, der ihr gegenüber liegende Winkel, und der Punkt der Grundlinie, in welchem dieselbe von der Normale aus der gegenüber liegenden Spitze getroffen wird.

Aufgabe 312 Es ist von einem Dreieck die Grundlinie und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben, und der Punkt der Grundlinie, in welchem sie von der Linie getroffen wird, die den gegenüber liegenden Winkel halbirt.

Aufgabe 313.. Von einem Dreieck kennt man zwei Seiten, und die Differenz der beiden Winkel, die diesen Seiten gegenüber liegen.

Gegeben A, B und $a - b$.

Analysis. Ist abc das verlangte Dreieck, $cb = A$ und $ca = B$, und man nimmt $cd = ca$ und zieht ad: so ist

$$\angle cad = \angle cda \quad (I. 5.)$$

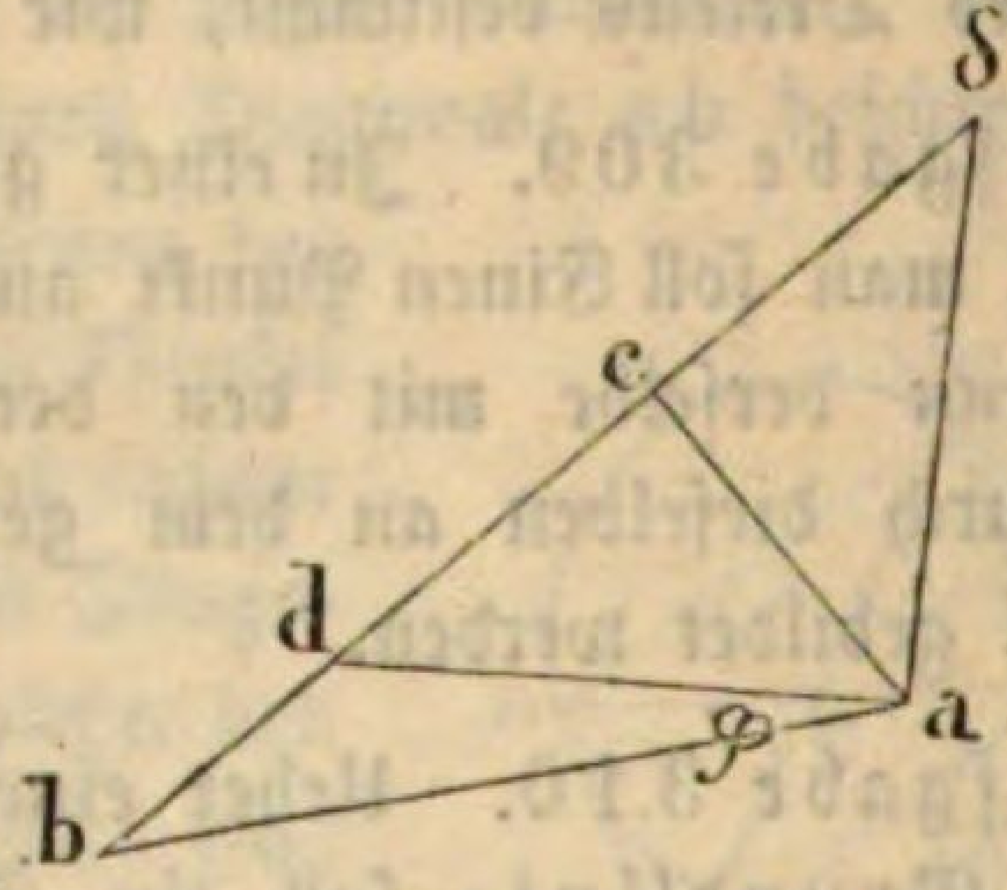
und $\angle cad + \angle cda + \angle acd = a + b + \angle acd = 2R$ (I. 32.)

$$\text{also } \angle cad + \angle cda = a + b$$
$$\text{und daher } 2 . \angle cad = a + b$$
$$\text{und da } \angle cad = a - \varphi$$
$$\text{so ist auch } 2a - 2\varphi = a + b$$

$$\text{also } a - b = 2\varphi \text{ und } \frac{a - b}{2} = \varphi$$

Es ist also φ gegeben, aber auch $bd = cb - ca = A - B$ ist gegeben; folglich der Kreis k', in welchem $\triangle bda$ liegt, und dabei zugleich bd der Lage nach.

Nimmt man $c\delta = ca$, so ist $b\delta = bc + ca = A + B$ ebenfalls gegeben, und daher δ der Lage nach.



Da $cd = c\delta = ca$, so ist $\angle da\delta = R$ (32.); und da $d\delta$ gegeben ist, so ist auch der Halbkreis k'' gegeben, von welchem $d\delta$ der Durchmesser ist, und dieser schneidet k' in dem Punkte a.

Auflösung. Ziehe $b\delta = A + B$, und nimm auf derselben $bd = A - B$. Beschreibe einen Kreis, in welchem bd die Sehne des Bogens ist, auf dem $\angle \varphi = \frac{a - b}{2}$ als Peripheriewinkel steht; und über $d\delta$ beschreibe einen Halbkreis. Schneiden beide Kreise sich in a, so ziehe ac und ab; es ist nun abc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 314. Von einem Dreieck ist die Grundlinie gegeben, die Differenz der beiden an derselben anliegenden Winkel, und die Differenz der beiden übrigen Seiten.

Gegeben C, $a - b$ und $A - B$.

Aufgabe 315. Man kennt von einem Dreieck die Grundlinie, die Differenz der beiden an derselben anliegenden Winkel, und die Summe der beiden übrigen Seiten des Dreiecks.

Gegeben C, $a - b$ und $A + B$.

Aufgabe 316. Von einem Dreieck ist die Grundlinie gegeben, die Höhe, und die Differenz der beiden an der Grundlinie anliegenden Winkel.

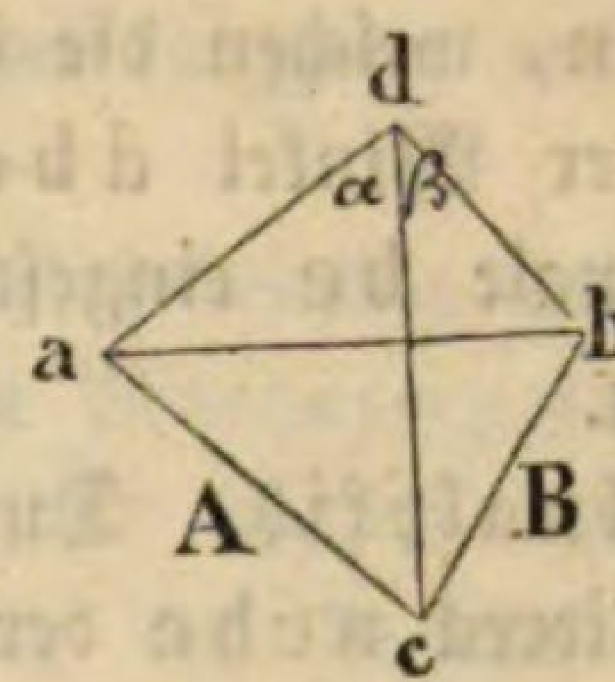
Gegeben C, γ und $a - b$.

Aufgabe 317. Es ist von einem Dreieck die Grundlinie gegeben, die Differenz der beiden an derselben anliegenden Winkel, und die Normale, welche zu der größern der beiden übrigen Seiten gehört.

Gegeben C, a — b und α.

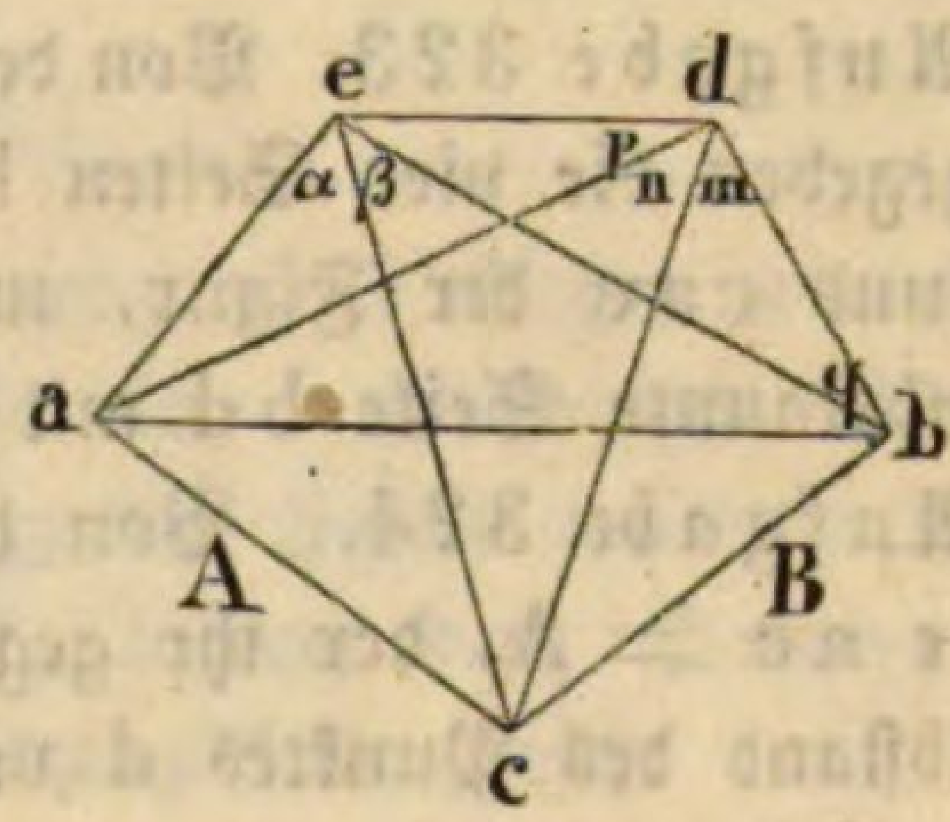
Aufgabe 318. Von einem Viereck acbd sind gegeben die beiden Seiten ac = A und bc = B, der von denselben eingeschlossene Winkel acb = c und die beiden Winkel α und β, welche die unbekannten Seiten mit der von c nach d gezogenen Diagonale einschließen; es soll das Viereck verzeichnet werden.

Analysis. Da A, B und ∟acb = c gegeben sind, so ist △acb der Größe und Lage nach gegeben. Durch A und ∟α aber ist der Kreis gegeben, in welchem △acd liegt; und durch B und ∟β der Kreis, in welchem △bcd liegen muß. Beschreibt man diese beiden Kreise, so schneiden sie sich in dem Punkte d, und es ist hierdurch das ganze Viereck gegeben.



Aufgabe 319. Von dem Fünfeck acbde sind gegeben die beiden nebeneinander liegenden Seiten ac = A, bc = B, der von denselben eingeschlossene Winkel acb = c, die Winkel α und β, welche die von c und b an e gezogenen Diagonalen, und die Seite ae der Figur einschließen; und die Winkel m und n, welche die aus a und c an d gezogenen Diagonalen und die Seite bd der Figur einschließen; es soll das Fünfeck beschrieben werden.

Auflösung. Aus A, B, ∟acb = c, ∟α und ∟β beschreibe das Viereck acbe (Aufgabe 318.), und aus A, B, ∟c, ∟m und ∟n das Viereck acbd, und ziehe endlich de.



Aufgabe 320. Man kennt von dem obigen Fünfeck acbde die beiden Seiten ac = A, bc = B; den von dieser Seite eingeschlossenen Winkel acb = ∟c; die Winkel α und β, welche von der Seite ae der Figur und den Diagonalen ec, eb eingeschlossen werden; und die Winkel p und n, welche die Seite de und die Diagonalen da und dc einschließen; man soll das Fünfeck verzeichnen.

Analysis. Durch A, B, ∟c, ∟α und ∟β ist das Viereck acbe der Größe und Lage nach gegeben (Aufg. 318.),

und daher auch $\angle$ cae = a und die Seite ae. Sonach sind gegeben von dem Viereck caed „die Seiten ca, ae, und die Winkel cae, p und n", und daher das Viereck caed, und dadurch auch das zu construirende Fünfeck acbde.

Aufgabe 321. Von dem Fünfeck (Fig. Aufg. 319.) sind gegeben die beiden Seiten A, B; der von denselben eingeschlossene Winkel c; die Winkel α und β, die von der Seite ae und den Diagonalen ec, eb, eingeschlossen werden; der Winkel edc = p + n, welchen die Seite ed mit der Diagonale dc einschließt; und der Winkel dbe = q, der von der Seite bd und der Diagonale be eingeschlossen wird. Es soll das Fünfeck construirt werden.

Analysis. Durch A, B, und die Winkel c, α und β, ist das Viereck acbe der Größe und Lage nach gegeben, und daher auch die Linien ce und eb. Durch ce und $\angle$ edc = p + n ist der Kreis k gegeben, in welchem $\triangle$ ced liegt. Nun ist aber auch $\angle$ q gegeben, und daher bd der Lage nach; folglich der Punkt d, in welchem der Kreis k von dieser Linie geschnitten wird, und hierdurch das gesuchte Fünfeck.

Aufgabe 322. Von dem Fünfeck acbde (Fig. Aufg. 319.) sind gegeben die Seiten ac = A, cb = B, die Diagonale cd, und die Winkel acb = c, α, β und q.

Aufgabe 323. Von dem Fünfeck acbde (Fig. Aufg. 319.) sind gegeben die vier Seiten bc, ca, ae, ed, die beiden Winkel bca und cae der Figur, und der Winkel bdc = m, welchen die unbekannte Seite bd mit der Diagonale dc einschließt.

Aufgabe 324. Von dem Fünfeck acbde ist gegeben die Seite ac = A, der ihr gegenüber liegende Winkel adc = n, der Abstand des Punktes d von der bekannten Seite A = h, die beiden Winkel aed und cbd der Figur, und die beiden Diagonalen ce und eb; man soll die Figur verzeichnen.

Aufgabe 325. Es sind von einem Fünfeck die fünf Diagonalen ab, ad, be, cd, ce gegeben, die Seite ac und der Winkel cbd der Figur; man soll hieraus das Fünfeck verzeichnen.

XVIII. Von den drei letzten Sätzen des dritten Buches.

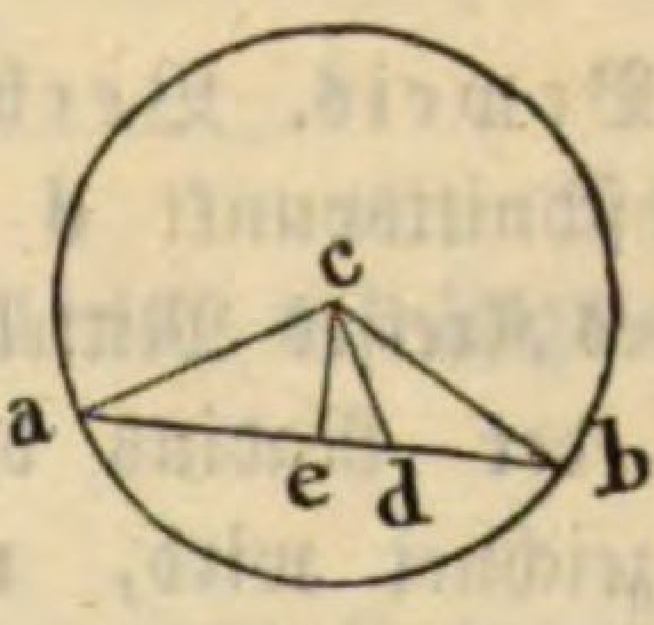
1) Die Sätze 35., 36. und 37. des dritten Buches werden vielfach in der Geometrie benutzt — sowohl als Hülfssätze, um dadurch andere Lehrsätze zu beweisen, als auch bei dem Auflösen der Aufgaben; und es ist daher zweckmäßig, diese Sätze hier näher zu erläutern.

2) Als Grundlage für diese Sätze können folgende Lehrsätze aufgestellt werden:

a) Wird eine Sehne ab eines Kreises in d beliebig getheilt, und verbindet man den Theilpunkt mit dem Mittelpunkte c des Kreises: so ist das unter den Abschnitten der Sehne ad und db enthaltene Rechteck sammt dem Quadrate der Verbindungslinie cd, dem Quadrate des Radius gleich. Es ist also

$$ad \times db + (cd)^2 = (cb)^2$$

Beweis. Fället man von c die Normale ce auf ab: so ist nun ab in e halbirt (3.), und es ist daher



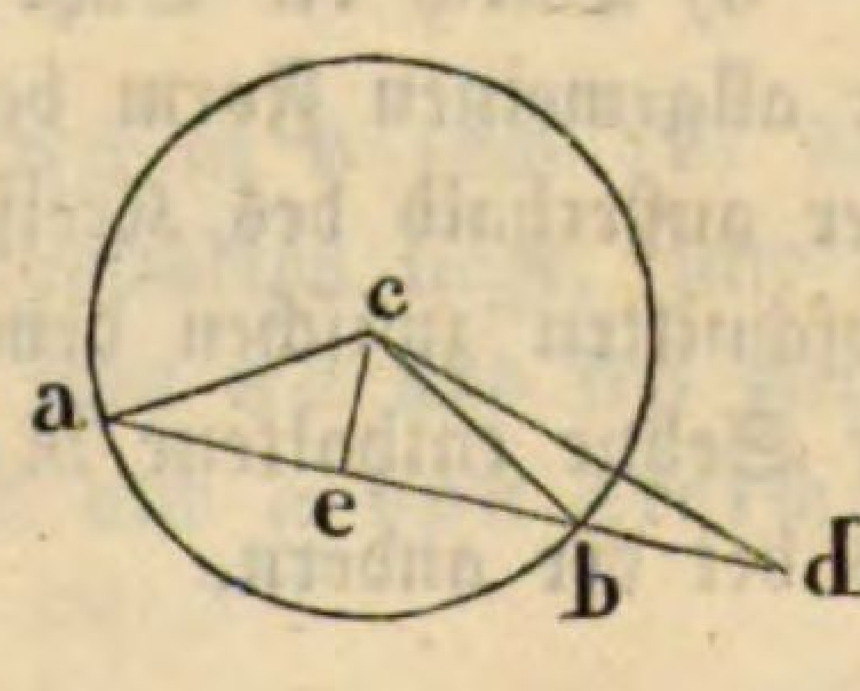
$ad \times db + (ed)^2 = (eb)^2$ (II.5.)

Da nun $(ce)^2 = (ce)^2$

so ist auch $ad \times db + (cd)^2 = (cb)^2$ (I. 47.)

b) Nimmt man in der Verlängerung einer Sehne ab einen Punkt d, und verbindet denselben mit des Kreises Mittelpunkt c: so ist das unter der verlängerten Sehne ad und deren Verlängerung bd enthaltene Rechteck, sammt dem Quadrate des Radius, dem Quadrate der Verbindungslinie gleich.

Beweis. Fället man von c die Normale ce auf ab, so ist ab in e halbirt; und ist demnach



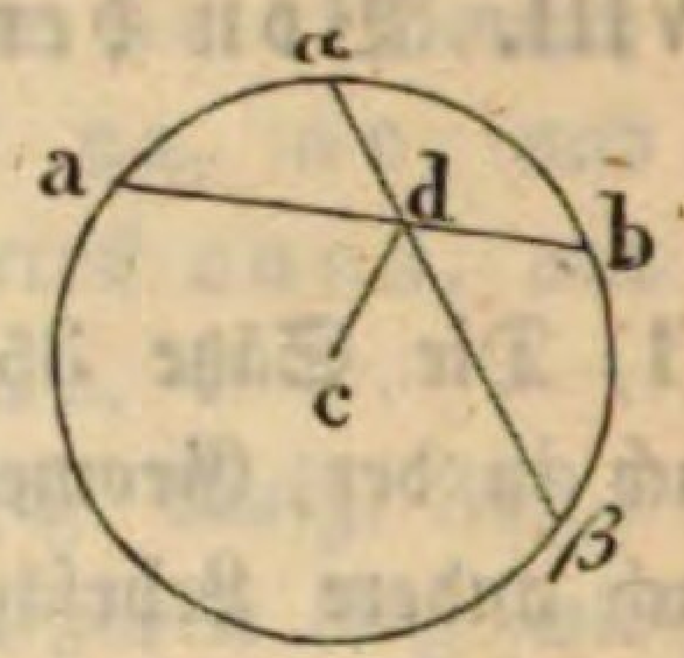
$ad \times db + (eb)^2 = (ed)^2$ (II. 6.)

Da nun $(ce)^2 = (ce)^2$

so ist $ad \times db + (cb)^2 = (cd)^2$ (I.47.)

3) Schneiden zwei Sehnen ab und $\alpha\beta$ sich in d: so ist das unter den Abschnitten ad und db der einen enthaltene Rechteck $ad \times db$, dem Rechteck $\alpha d \times d\beta$ gleich, welches unter den Abschnitten αd und $d\beta$ der andern enthalten ist.

Beweis. Verbindet man den Durchschnittspunkt d beider Sehnen mit des Kreises Mittelpunkt c: so ist, nach dem Lehrsatz 2a, wenn der Radius des Kreises mit R bezeichnet wird,



$$ad \times db + (cd)^2 = R^2$$
$$\alpha d \times d\beta + (cd)^2 = R^2$$

folglich $ad \times db + (cd)^2 = \alpha d \times d\beta + (cd)^2$

und daher $ad \times db = \alpha d \times d\beta$.

4) Auch in dem Falle, „wenn zwei Sehnen verlängert außerhalb des Kreises in d sich schneiden", sind die unter den verlängerten Sehnen und deren Verlängerungen enthaltenen Rechteck $ad \times db$ und $\alpha d \times d\beta$ gleich groß.



Beweis. Verbindet man den Durchschnittspunkt d beider Sehnen mit des Kreises Mittelpunkt c: so ist, wenn der Radius des Kreises mit R bezeichnet wird, nach dem Lehrsatz 2b,

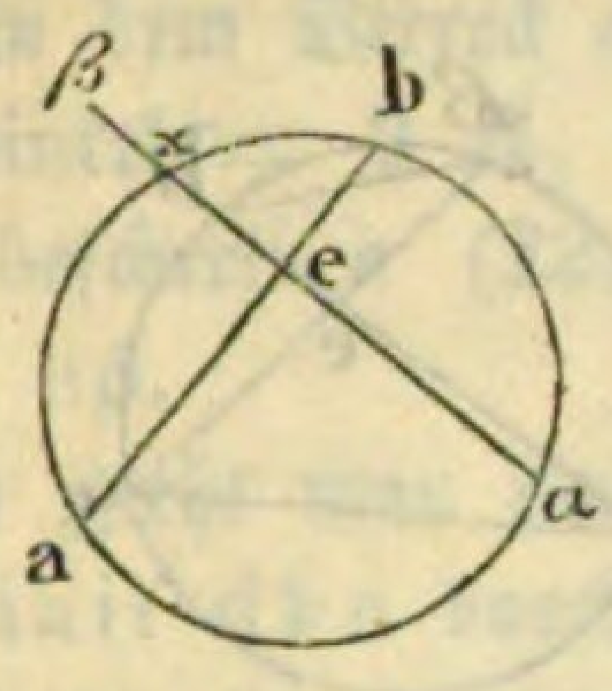
$$ad \times db + R^2 = (cd)^2$$
$$\alpha d \times d\beta + R^2 = (cd)^2$$

also $ad \times db + R^2 = \alpha d \times d\beta + R^2$

und daher $ad \times db = \alpha d \times d\beta$.

5) Durch die Sätze Nr. 3. und 4. ist nun der 35ste Satz in der allgemeinen Form bewiesen: Wenn zwei Sehnen innerhalb oder außerhalb des Kreises sich schneiden, so ist das unter den Abschnitten zwischen dem Durchschnittspunkte und den Endpunkten der Sehne enthaltene Rechteck bei der einen Sehne eben so groß, als bei der andern.

6) Diese Sätze gelten auch umgekehrt. Schneiden zwei Linien ab und $\alpha\beta$ in e sich so, daß das Rechteck $ae \times eb = \alpha e \times e\beta$ ist: so muß ein Kreis, der durch die drei Punkte a, b und α geht, auch durch den Punkt β gehen.





Beweis. Es schneide der Kreis, in dessen Umfang die Punkte a, b und α liegen, die $\alpha\beta$ in x: so ist, es mögen die Sehnen innerhalb oder außerhalb des Kreises sich schneiden,

$$ea \times eb = e\alpha \times ex.$$

Nach der Voraussetzung soll aber auch seyn

$$ea \times eb = e\alpha \times e\beta$$

folglich ist $e\alpha \times ex = e\alpha \times e\beta$

und daher $ex = e\beta$.

Der Punkt β muß also mit x zusammenfallen, und liegt daher in dem Umfange des Kreises.

Zusatz. Nach Aufgabe 230 ist es immer möglich, „einen Kreis zu beschreiben, der durch drei der Lage nach gegebene Punkte geht, die nicht in gerader Linie liegen"; man kann also auch einen Kreis beschreiben, der durch a, b und α geht, wenn die Linien ab und $\alpha\beta$ sich schneiden. Schneiden sich die Linien ab und $\alpha\beta$ daher so, daß $ae \times eb = \alpha e \times e\beta$: so läßt sich immer ein Kreis beschreiben, der durch die 4 Punkte a, b, α und β geht.

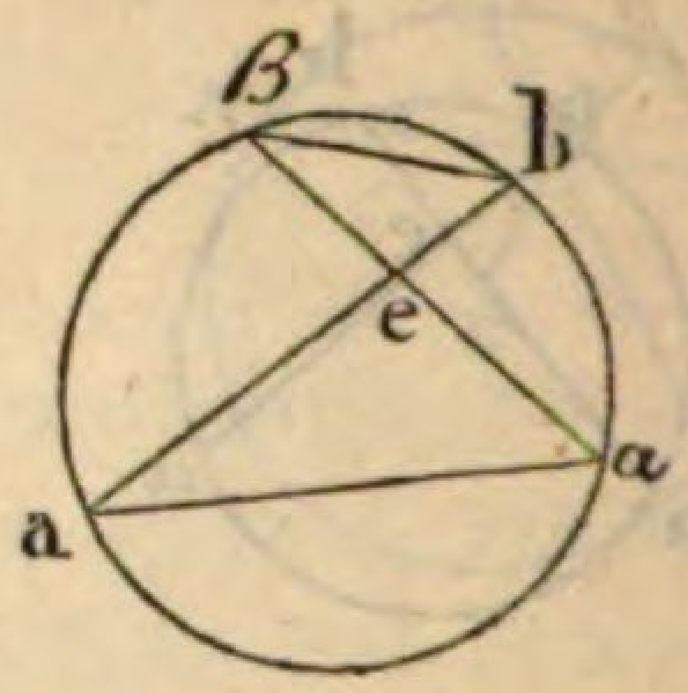
---

7) Schneiden die Linien ab und $\alpha\beta$ in e sich so, daß der Durchschnittspunkt e zwischen ihren Endpunkten liegt, und ist $ae \times eb = \alpha e \times e\beta$: so sind, wenn man $a\alpha$ und $b\beta$ zieht, die Winkel a und β, und auch die Winkel b und α von gleicher Größe.

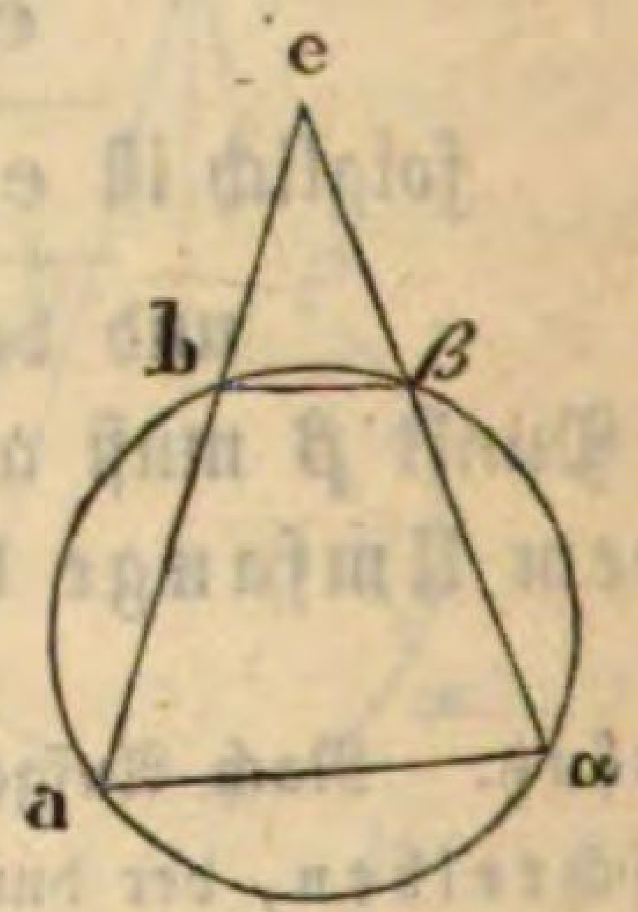
Beweis. Es kann ein Kreis beschrieben werden, der durch die Punkte a, α, b und β geht, nach Nr. 6.

und es ist daher $\llcorner a = \llcorner \beta$ (21.)

und auch $\llcorner b = \llcorner \alpha$.



Dieser Satz gilt auch umgekehrt; schneiden sich nämlich die a b und $\alpha\beta$ zwischen ihren Endpunkten in e, und ist, wenn man aα und bβ zieht, $\angle a = \angle \beta$: so muß auch seyn ae $\times$ eb $= \alpha e \times e\beta$. Denn beschreibt man einen Kreis, der durch a, b und α geht, so ist a ein Peripheriewinkel auf dem Bogen bα; und weil $\angle \beta = \angle a$, und $\angle \beta$ ebenfalls auf dem Bogen bα steht, so muß der Punkt β auch in der Peripherie des Kreises liegen. Die Punkte a, b, α, β liegen also **alle vier** in dem Umfange eines Kreises, und es ist daher ae $\times$ eb $= \alpha e \times e\beta$.



8) Schneiden die Linien a b und $\alpha\beta$ sich in ihren Verlängerungen in e, und es ist ea $\times$ eb $=$ eα $\times$ eβ: so muß, wenn man die Linien aα und bβ zieht, $\angle$ eaα $=$ $\angle$ eβb seyn, und eben so $\angle$ eαa $=$ $\angle$ ebβ.

Beweis. Da ea $\times$ eb $=$ eα $\times$ eβ, so läßt sich ein Kreis beschreiben, der durch die 4 Punkte a, b, α, β geht; und es ist daher ab$\beta\alpha$ ein Viereck im Kreise. Folglich ist

$$\angle ea\alpha + \angle b\beta\alpha = 2\,R\ (22.)$$
$$\text{aber auch}\ \angle e\beta b + \angle b\beta\alpha = 2\,R\ (I.\ 13.)$$
$$\text{folglich ist}\ \angle ea\alpha = \angle e\beta b$$
$$\text{und aus gleichen Gründen ist}\ \angle e\alpha a = \angle eb\beta.$$

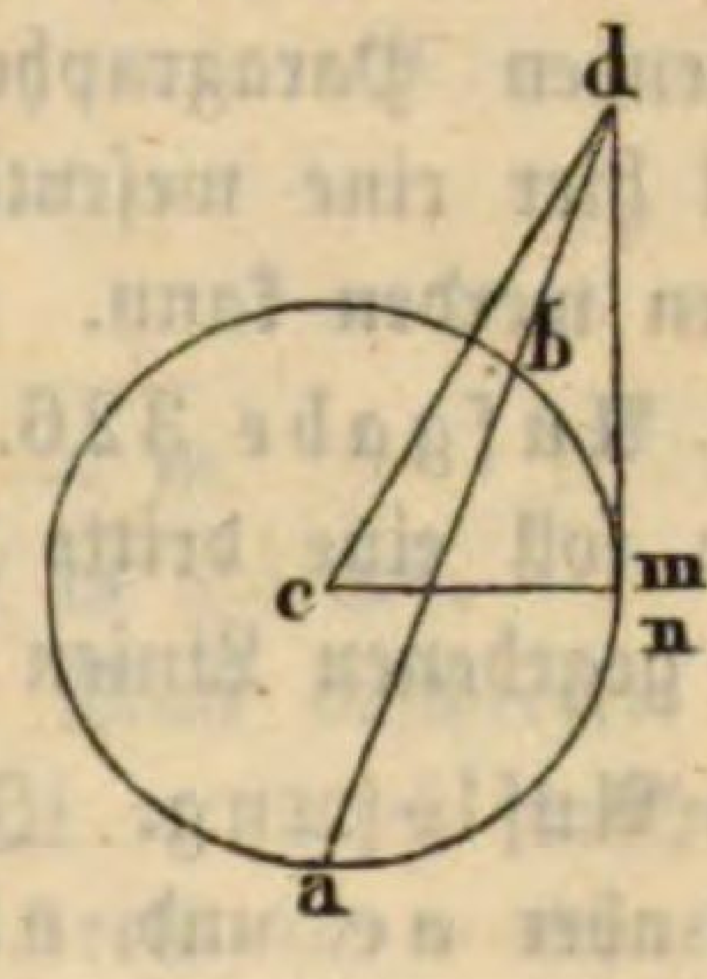
Auch dieser Satz gilt umgekehrt. **Schneiden** die Linien ab und $\alpha\beta$ in ihren Verlängerungen sich in e, und ist, wenn man aα und bβ zieht, $\angle$ eaα $=$ $\angle$ eβb: so muß auch seyn ea $\times$ eb $=$ eα $\times$ eβ.

$$\text{Denn da}\ \angle ea\alpha = \angle e\beta b$$
$$\text{und}\ \angle b\beta\alpha = \angle b\beta\alpha$$
$$\text{so ist auch}\ \angle ea\alpha + \angle b\beta\alpha = \angle e\beta b + \angle b\beta\alpha.$$

$$\text{Da nun}\ \angle e\beta b + \angle b\beta\alpha = 2\,R$$
$$\text{so ist auch}\ \angle ea\alpha + \angle b\beta\alpha = 2\,R.$$

In dem Viereck $ab\beta\alpha$ sind also die einander gegenüber liegenden Winkel = 2 R, und es läßt sich daher um dieses Viereck ein Kreis beschreiben (22. Zusatz). Folglich ist auch $ea \times eb = e\alpha \times e\beta$.

9) Zieht man von einem Punkte d außerhalb eines Kreises eine Linie dba durch den Kreis, und eine Tangente dm an den Kreis: so ist das unter der ganzen Linie da, und dem außerhalb des Kreises liegenden Abschnitte db derselben enthaltene Rechteck „dem Quadrate der Tangente" gleich.



Beweis. Verbindet man den Mittelpunkt c des Kreises mit d, so ist nach dem Lehrsatze 2 b

$$ad \times db + R^2 = (cd)^2$$

und weil dm eine Tangente ist, nach (16.) und (I. 47.)

$$(cd)^2 = (dm)^2 + R^2$$

folglich $ad \times db + R^2 = (dm)^2 + R^2$

also $ad \times db = (dm)^2$.

10. Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Ist, von einem Punkte d außerhalb des Kreises, die Linie dba durch den Kreis gezogen, und die Linie dm an den Kreis, und es ist $(dm)^2 = da \times db$: so muß dm eine Tangente des Kreises seyn.

Beweis. Wäre dm keine Tangente: so müßte sie, verlängert, den Kreis noch in einem zweiten Punkte n schneiden, und es würde alsdann seyn

$$da \times db = dm \times dn. \quad \text{(Nr. 4.)}$$

Da nun $da \times db = (dm)^2$

so folgt $dm \times dn = (dm)^2$

also $dn = dm$

was nicht möglich ist. Die Linie dm kann also den Kreis nicht in einem zweiten Punkte treffen, und sie ist daher eine Tangente desselben.

Fortsetzung der Aufgaben.

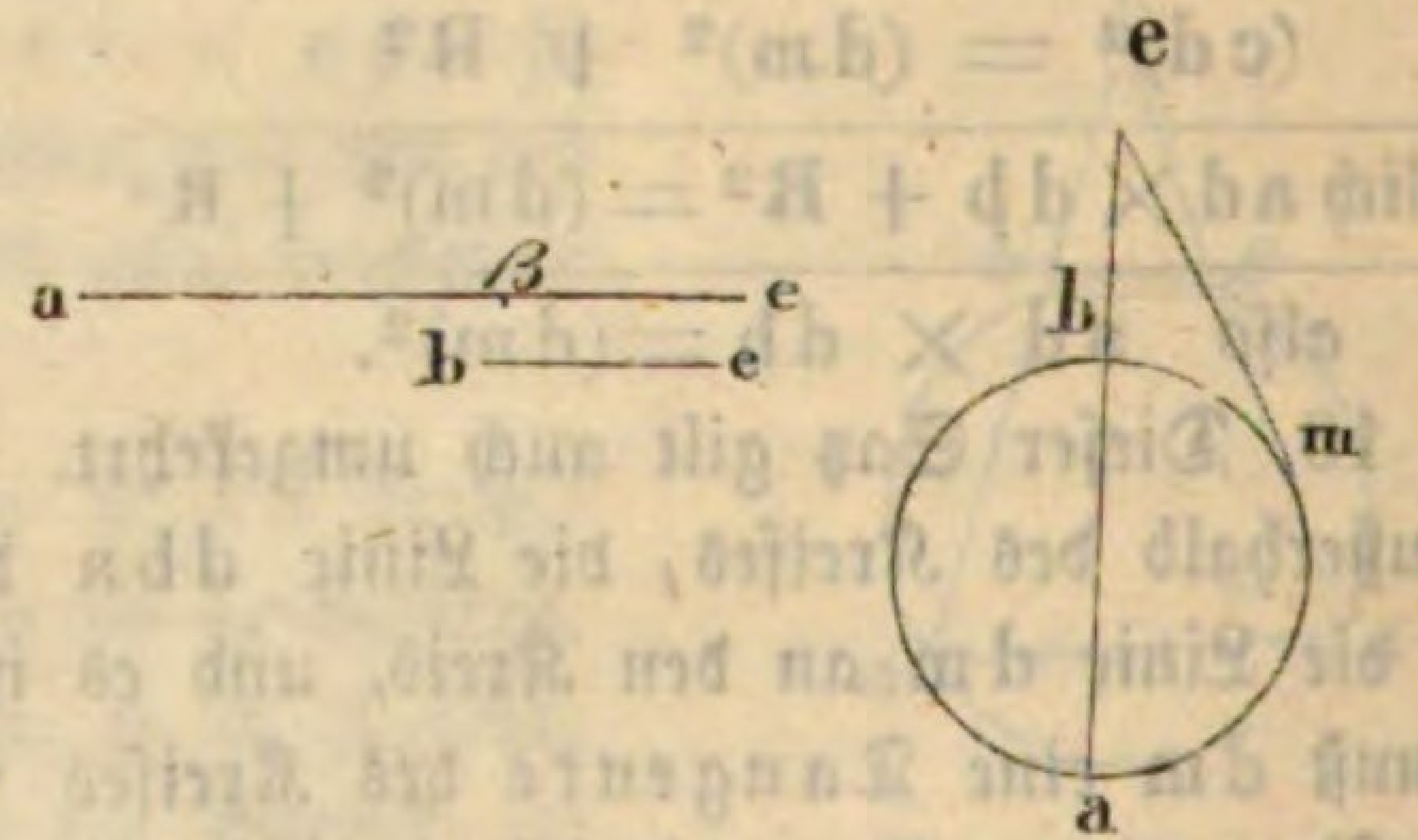
§. 22.

Hülfs-Aufgaben.

Die folgenden Aufgaben, welche zum Theil bereits in den Beilagen zu dem zweiten Buche vorkommen, werden hier theils deßhalb wiederholt, weil sie bei der Auflösung der Aufgaben des folgenden Paragraphen gebraucht werden; und theils deßwegen, weil hier eine wesentlich verschiedene Auflösung von denselben gegeben werden kann.

Aufgabe 326. Es sind zwei Linien ae und eb gegeben; man soll eine dritte Linie x finden, deren Quadrat dem unter den gegebenen Linien enthaltenen Rechteck gleich sey.

Auflösung. Ist ae = eb, so ist zugleich auch ae = x; sind aber ae und eb verschieden, so sey ae > eb. Man nehme auf ae ein Stück eβ = eb, beschreibe über ab = aβ als Durchmesser einen Kreis, und ziehe von e aus eine Tangente em an denselben (17.), so ist em = x.

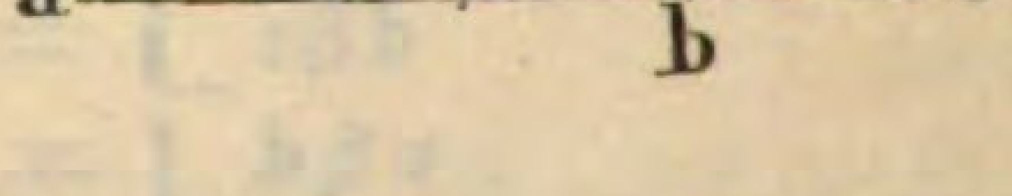


Beweis. Es ist $ea \times eb = (em)^2$ (36.)
da nun seyn soll $ea \times eb = x^2$

so ist auch $(em)^2 = x^2$
und daher $em = x$.

Zusatz 1. Diese Aufgabe ist nicht verschieden von der Aufgabe II. 14, und kann daher auch nach der dort gegebenen Anleitung gelös't werden.

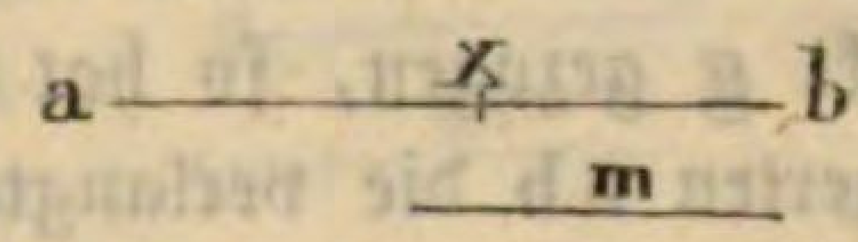
Zusatz 2. Ist eine Linie ab gegeben, und in derselben, oder in deren Verlängerung ein Punkt e; und man soll eine Linie x von der Länge angeben, daß $ae \times eb = x^2$: so läßt sich die Linie x immer nach der Anleitung in der obigen Aufgabe finden.



Aufgabe 327. Es ist eine Linie ab gegeben; man soll in dieser Linie einen Punkt x so bestimmen, daß das unter den Abschnitten ax und xb enthaltene Rechteck $ax \times xb$ dem Quadrate einer gegebenen Linie m gleich werde.

Auflösung. Es ist entweder $ab = 2m$, oder $ab > 2m$ oder $ab < 2m$.

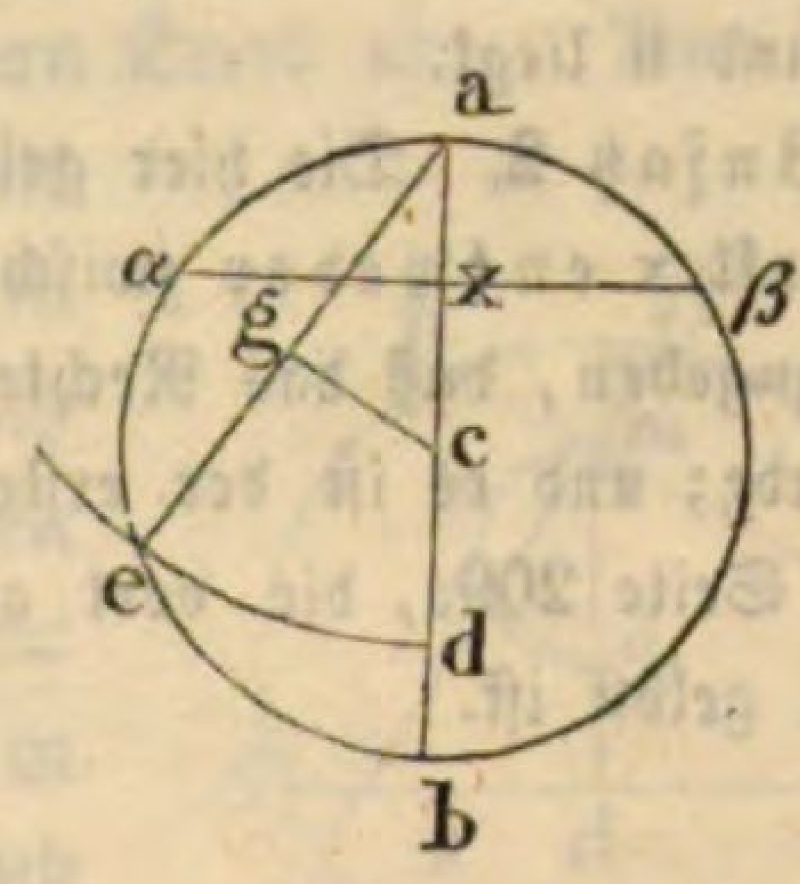
Erster Fall. Ist $ab = 2m$, so halbire ab in x, und es ist x der gesuchte Punkt;



$$\begin{aligned} &\text{denn da } ax = xb \\ &\text{so ist } ab = 2\,(ax) \\ &\text{aber auch } ab = 2\,m \\ \hline &\text{also } ax = xb = m \end{aligned}$$

$$\text{und daher } ax \times xb = m \times m = m^2.$$

Zweiter Fall. Es ist $ab > 2\,m$. Man beschreibe über ab als Durchmesser einen Kreis, nehme $ad = 2\,m$, beschreibe aus a mit ad einen Kreisbogen, der den Kreis in e schneidet; ziehe ae, und von dem Mittelpunkte c des Kreises die Normale cg auf ae. Wird nun $cx = cg$ genommen, so ist x der gesuchte Theilpunkt, welcher zwischen a und b liegen muß



Beweis. In x errichte auf ab die Normale $\alpha\beta$, und verlängere dieselbe, bis sie zu beiden Seiten den Kreis in α und β trifft.

$$\begin{aligned} &\text{Da nun } cx = cg, \text{ so ist } \alpha\beta = ae \quad (14.) \\ &\text{und da } ae = ad = 2\,m \quad (p.\ c.) \\ \hline &\text{so ist auch } \alpha\beta = 2\,m \end{aligned}$$

und da $\alpha\beta$ in x halbirt wird (3.), so ist

$$\alpha x = x\beta = m.$$

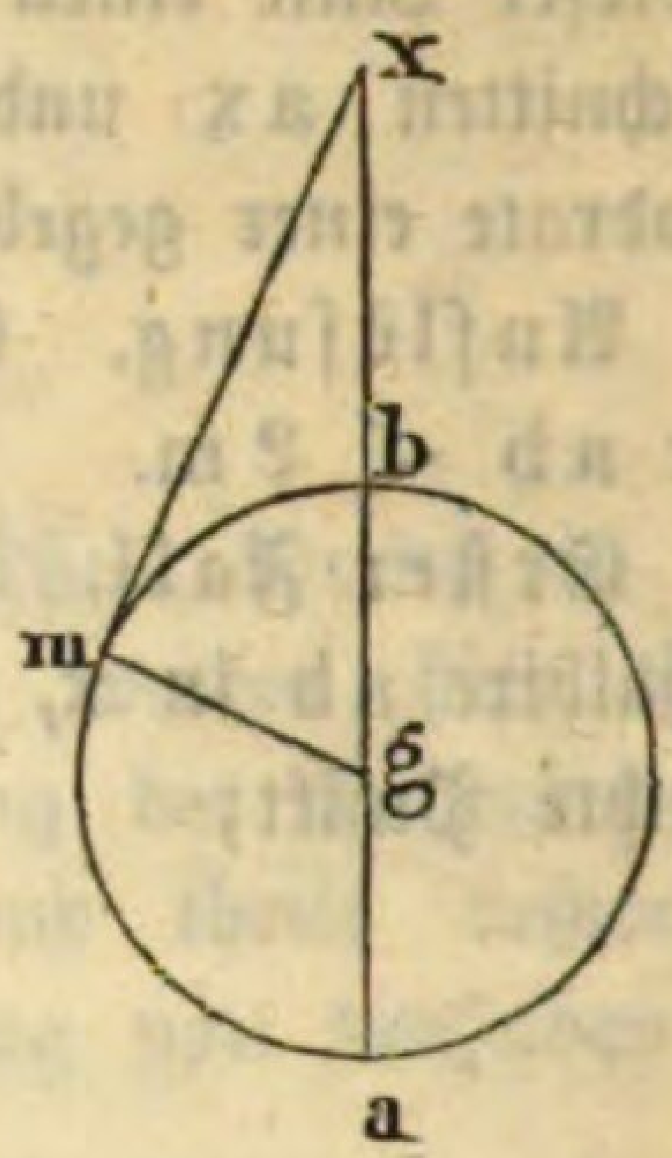
$$\text{Es ist aber } ax \times xb = \alpha x \times x\beta \quad (35.)$$

$$\text{folglich ist auch } ax \times xb = m \times m = m^2$$

und weil $cx = cg < ca$, so liegt x zwischen a und b.

Dritter Fall. Ist $ab < 2m$, so giebt es zwischen a und b keinen Punkt x, der eine solche Lage hätte, daß $ax \times xb = m^2$ werden könnte (II. 5. Zus.). Wohl aber läßt sich alsdann ein solcher Punkt in der Verlängerung von ab angeben, der auf folgende Art gefunden wird:

Man beschreibe über **ab** als Durchmesser einen **Kreis**, nehme den Mittelpunkt g, ziehe beliebig einen Radius gm, und an den Endpunkt desselben eine Tangente mx = m. Wird nun von dem Endpunkte x dieser Tangente die **Linie xba** durch den Mittelpunkt g gezogen, so hat x in der verlängerten **ab** die verlangte Lage.



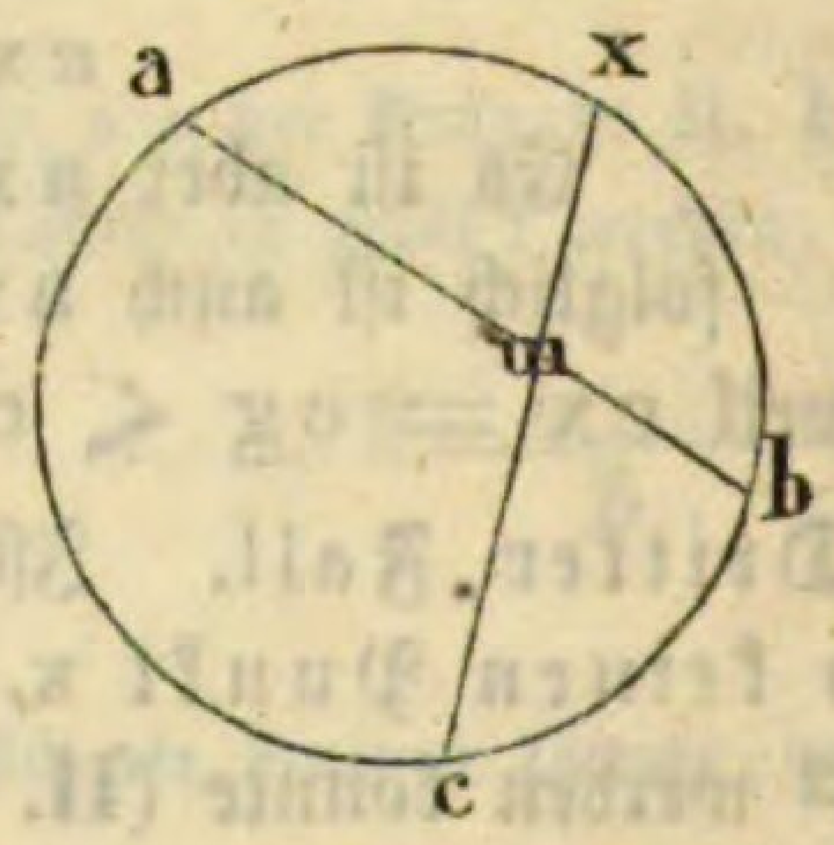
Beweis. Es ist xa × xb = $(xm)^2$ (36.) aber xm = m und **ab** die gegebene Linie. Folglich ist auch xa × xb = m^2.

Zusatz 1. Ist ab = 2m oder ab > 2m: so läßt sich nicht nur, wie in dem ersten und zweiten Falle angegeben ist, ein Punkt x zwischen a und b von der Lage bestimmen, daß ax × xb = m^2 wird; sondern man kann auch das bei dem dritten Falle angegebene Verfahren anwenden, und hierdurch einen Punkt in der Verlängerung der ab auffinden, daß ax × xb = m^2 wird. Wenn aber ab < 2m ist, so giebt es nur einen Punkt x in der Verlängerung von ab; nicht aber einen solchen, der zwischen a und b liegt.

Zusatz 2. Die hier gelöste Aufgabe enthält die besondern Fälle, einen Punkt x entweder zwischen a und b, oder in der Verlängerung der ab anzugeben, daß das Rechteck ax × xb einem gegebenen Quadrate gleich werde; und es ist der erste Fall hiervon die zweite Aufgabe der Beilage X. Seite 209., die dort auf eine andere Art mit Hülfe des Satzes II. 14. gelöst ist.

Aufgabe 328. Drei **Linien** a, b und c sind gegeben; man soll eine **vierte Linie** x von der Länge finden, daß das unter a und b enthaltene Rechteck dem Rechteck gleich werde, das unter c und x enthalten ist.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie, nehme auf derselben ma = a, mb = b; und unter einem beliebigen Winkel ziehe man, von m aus, die Linie mc = c, und beschreibe einen Kreis, der durch die Punkte a, b und c geht. Wird nun cm verlängert, bis sie den Kreis in x trifft: so ist mx = x die gesuchte Linie.



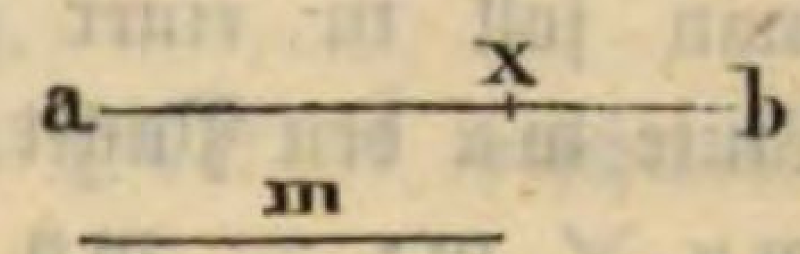
Beweis. Es ist $am \times mb = cm \times mx$ (35.)

Da nun $am = a$, $mb = b$ und $cm = c$

so ist auch $a \times b = c \times mx$.

Nun soll seyn $a \times b = c \times x$

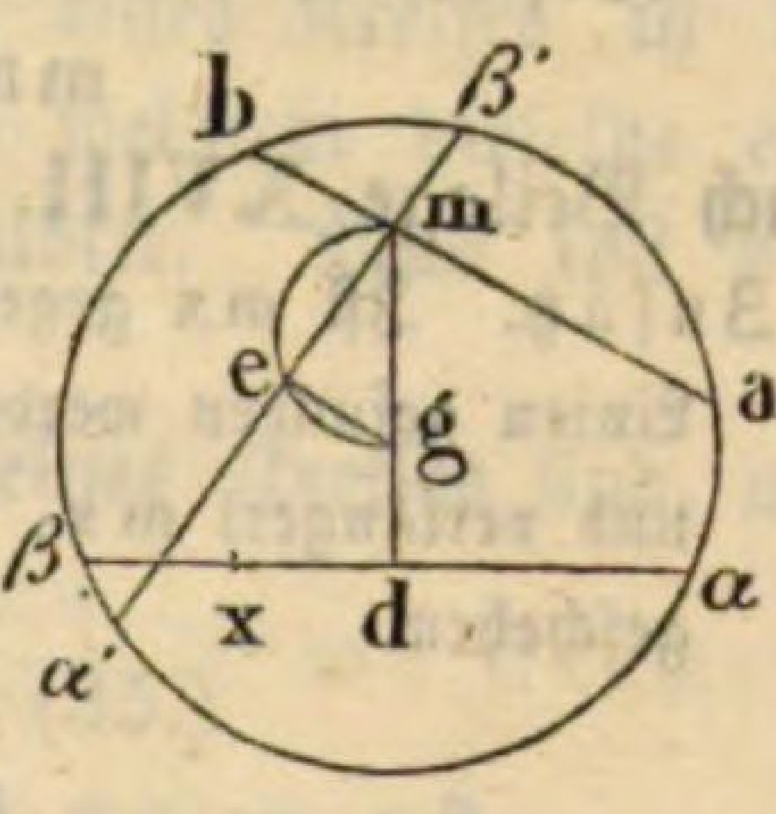
folglich ist $cm = x$.



Zusatz. Soll in der gegebenen Linie ab oder in der Verlängerung derselben der Punkt x von der Art angegeben werden, daß $ax \times ab = m^2$ werde: so kann das gesuchte Stück ebenfalls nach derselben Regel gefunden werden, wenn man $ab = a$, $m = b$ und auch $m = c$ annimmt.

Aufgabe 329. Eine gegebene Linie ab ist in m getheilt; man soll eine andere gegebene Linie $\alpha\beta$ in x so theilen, daß das Rechteck der Abschnitte der einen Linie eben so groß werde, als das Rechteck der Abschnitte der andern.

Auflösung. Beschreibe einen Kreis, dessen Durchmesser größer ist, als die größte der beiden gegebenen Linien ab und $\alpha\beta$, und trage diese Linien als Sehnen in den Kreis ein. Den Mittelpunkt g des Kreises verbinde man mit dem Theilpunkte m der ab durch gm, und mit dem Halbirungspunkte d der $\alpha\beta$ durch gd. Ueber gm beschreibe man einen Halbkreis, und trage in denselben $ge = gd$ ein. Wird hierauf durch e und m die $\alpha'\beta'$ gezogen, so ist diese $= \alpha\beta$, und wird in m den Forderungen der Aufgabe entsprechend getheilt.



Beweis. Da man über gm einen Halbkreis beschrieben hat, so ist $\llcorner gem = R$ (31.)

und da nun $ge = gd$ (p. c.), so ist $\alpha'\beta' = \alpha\beta$ (14.)

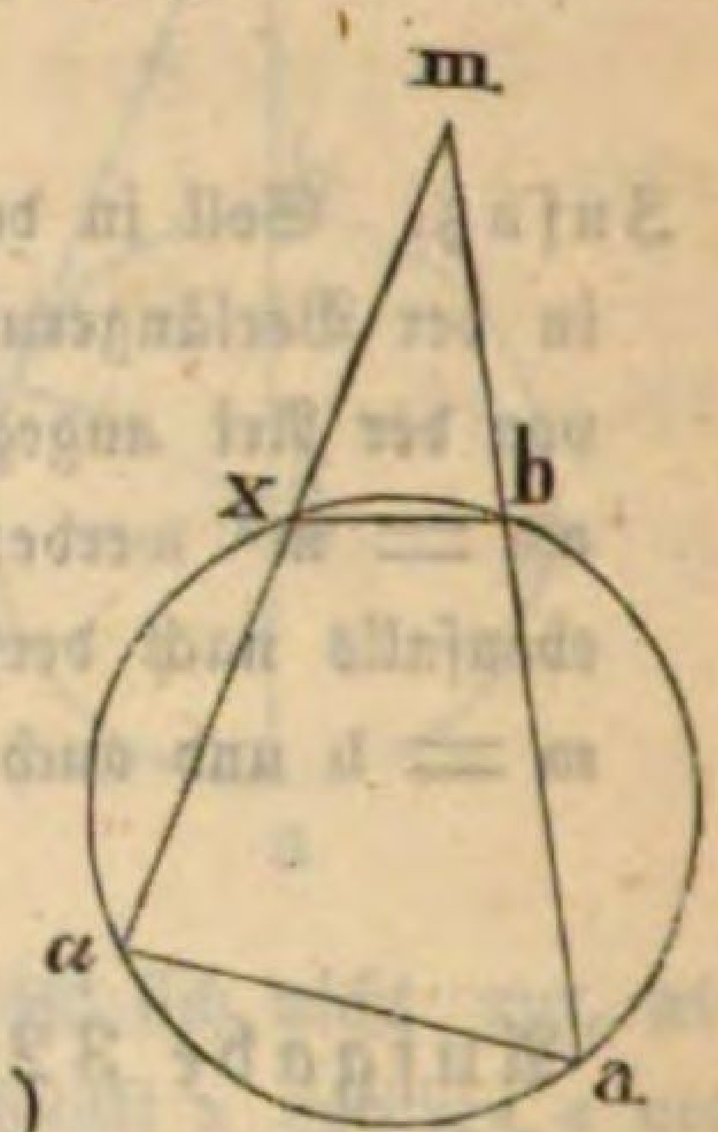
Nun ist aber $am \times mb = \alpha'm \times m\beta'$ (35.)

eine der $\alpha\beta$ gleiche Linie ist also in m so getheilt, wie in der Aufgabe gefordert wird. Nimmt man nun $\alpha x = \alpha' m$, so ist auch $\alpha\beta$ in x auf dieselbe Weise getheilt.

Zusatz. Da die Linie ab und auch der Theilpunkt m derselben gegeben ist, so kennt man das Rechteck $ma \times mb$; und es kann daher auch eine Linie x von der Art gefunden werden, daß $am \times mb = x^2$ werde (Aufgabe 326.). Wird nun $\alpha\beta$ in x so getheilt, daß $\alpha x \times x\beta = x^2$ (Aufgabe 327. 2ter Fall), so ist x der gesuchte Theilpunkt.

Determination. Ist gd > gm, so läßt sich in $\alpha\beta$ kein Punkt x, der zwischen α und β liegt, angeben, so daß $\alpha x \times x\beta = am \times mb$ werden könnte.

Aufgabe 330. Es ist eine **Linie ab** gegeben, und ein **Punkt m** in der Verlängerung derselben; man soll in einer **zweiten** gegebenen Linie mα den Punkt x so bestimmen, daß $m\alpha \times mx = ma \times mb$ werde.



Auflösung. Man setze ma und mα in m unter einem beliebigen Winkel an einander; ziehe aα, und setze an b den Winkel $mbx = \angle\alpha$, so wird hierdurch der gesuchte Punkt x erhalten.

Beweis. Da $\angle mbx = \angle\alpha$ (p. c.)
und $\angle abx = \angle abx$

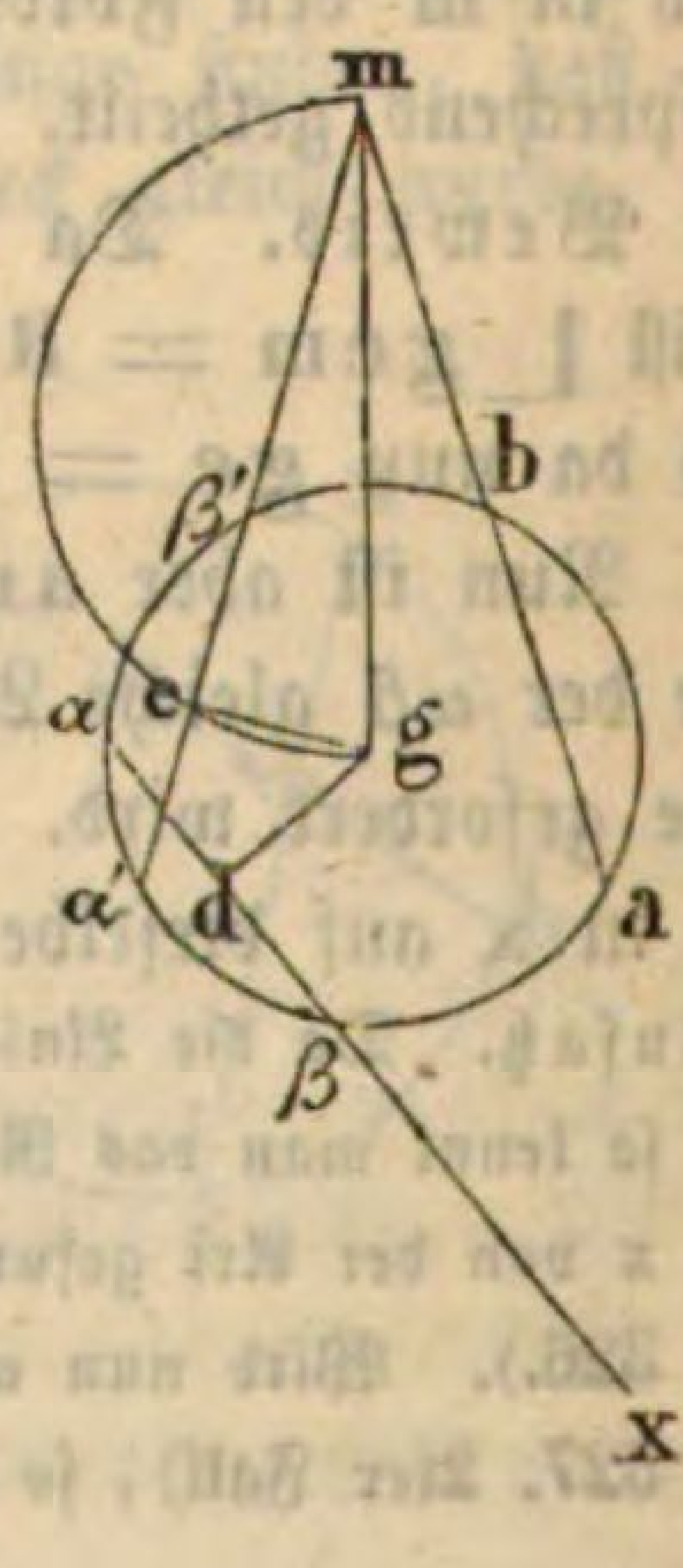
so ist $\angle mbx + \angle abx = \angle\alpha + \angle abx$
aber $\angle mbx + \angle abx = 2R$ (I. 13.)

Folglich ist auch $\angle\alpha + \angle abx = 2R$
und daher abxα ein Viereck im Kreise (22. Zus.)

Beschreibt man diesen Kreis, so ist nun
$$ma \times mb = m\alpha \times mx$$
nach Beilage XVIII. Nr. 4.

Zusatz. Ist mx gegeben, und soll der Punkt α in der Verlängerung dieser Linien gefunden werden: so zieht man xb, nimmt $\angle ba\alpha = \angle bxm$, und verlängert mx, bis sie die aα in α schneidet, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 331. Es ist eine **gerade Linie ab** gegeben, und in der Verlängerung derselben ein **Punkt m**; man soll in der Verlängerung einer **zweiten** gegebenen Linie $\alpha\beta$ einen Punkt x so bestimmen, daß das unter xα und xβ enthaltene Rechteck dem Rechteck $ma \times mb$ gleich werde.



Auflösung. Ueber einem Durchmesser, der größer als die größte der beiden Linien ab und $\alpha\beta$ ist, beschreibe man einen Kreis, und trage ab und $\alpha\beta$ als

Sehnen ein. Den in der Verlängerung von a b gegebenen Punkt m verbinde mit dem Mittelpunkte g des Kreises, und beschreibe über mg einen Halbkreis, verbinde auch g mit dem Halbirungspunkte d der $\alpha\beta$, und trage in den Halbkreis ge = gd ein. Wird nun von m durch e die Linie $m\beta'\alpha'$ gezogen, so ist $\alpha'\beta' = \alpha\beta$ und β'm die gesuchte Verlängerung derselben.

Beweis. Da man über gm einen Halbkreis beschrieben hat, so ist

$$\llcorner gem = R \quad (31.)$$

Da nun ge = gd (p c.), so ist $\alpha'\beta' = \alpha\beta$ (14.)

Wird also in der Verlängerung von $\alpha\beta$ die βx = β'm genommen, so ist $\alpha x = \alpha' m$.

Nun ist $ma \times mb = m\alpha' \times m\beta'$ (36.)
folglich ist auch $ma \times mb = x\alpha \times x\beta$.

---

§. 23.

Anwendungen der obigen Aufgaben.

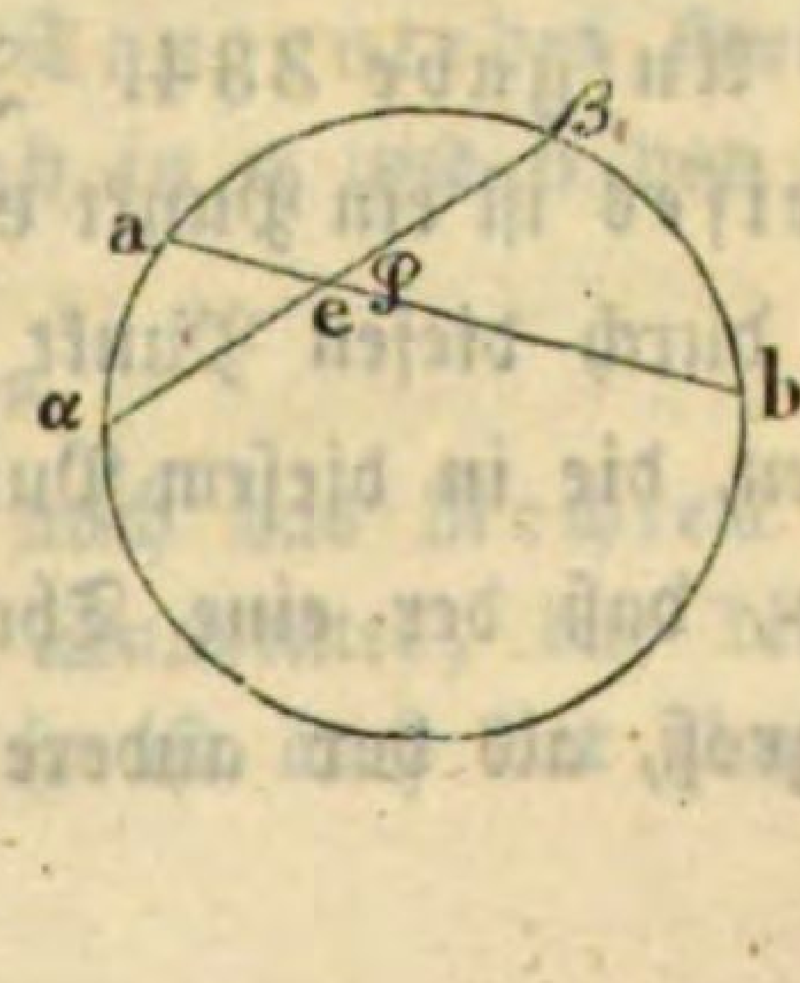
Aufgabe 332. Eine Sehne ab eines Kreises ist der Größe nach gegeben, und der Punkt e, in welchem dieselbe eine unbekannte Sehne unter dem Winkel φ halbirt. Man soll den Kreis beschreiben.

Analysis. Da ab und $\alpha\beta$ Sehnen eines Kreises sind, und sich in e schneiden: so ist

$$ae \times eb = \alpha e \times e\beta \quad (35.)$$

und weil $\alpha\beta$ in e halbirt werden soll, so ist $\alpha e = e\beta$
also auch $ae \times eb = (\alpha e)^2$.

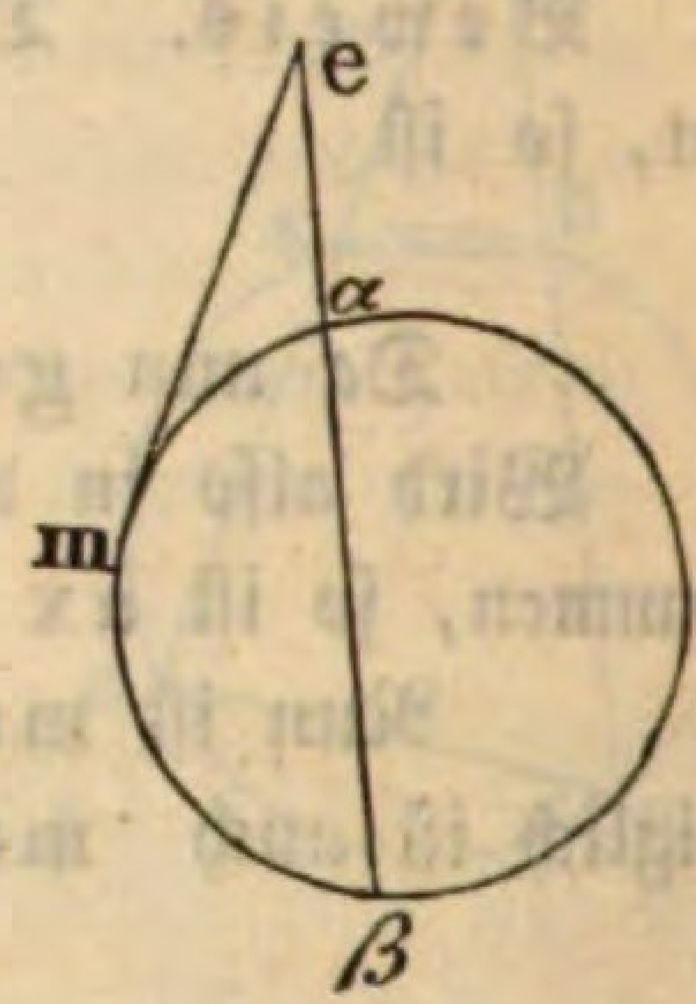
Nun ist ae und eb gegeben, folglich auch αe (II. 14.); und da $\llcorner ae\alpha = \varphi$ ebenfalls gegeben ist, so ist die Lage des Punktes α bestimmt. Nun sind aber auch die Punkte a und b gegeben, folglich der Kreis, in dessen Umfang die Punkte α, a und b liegen (Aufgabe 230.), und in welchem auch β liegen muß.



Auflösung. Suche die Seite eines Quadrates, das

dem Rechteck ae × eb gleich ist (II. 14.); mache $\llcorner ae\alpha = \varphi$, und $e\alpha$ der gefundenen Seite des Quadrats gleich, und beschreibe endlich einen Kreis, in dessen Umfang die Punkte a, α und β liegen: so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 333. Man soll, von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte, eine Secante durch denselben ziehen, so daß der außerhalb des Kreises liegende Theil derselben halb so groß werde, als der Theil, welcher Sehne des Kreises ist.



Gegeben der Kreis und der Punkt e.

Gesucht $e\beta$, und es soll seyn $e\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\beta)$.

Analysis. Von dem gegebenen Punkte e ziehe die Tangente em an den Kreis (17.): so ist

$$(em)^2 = e\alpha \times e\beta \quad (36.)$$

und weil $e\beta = e\alpha + \alpha\beta = e\alpha + 2(e\alpha) = 3(e\alpha)$

so ist auch $(em)^2 = (e\alpha) \times 3(e\alpha) = 3(e\alpha)^2$

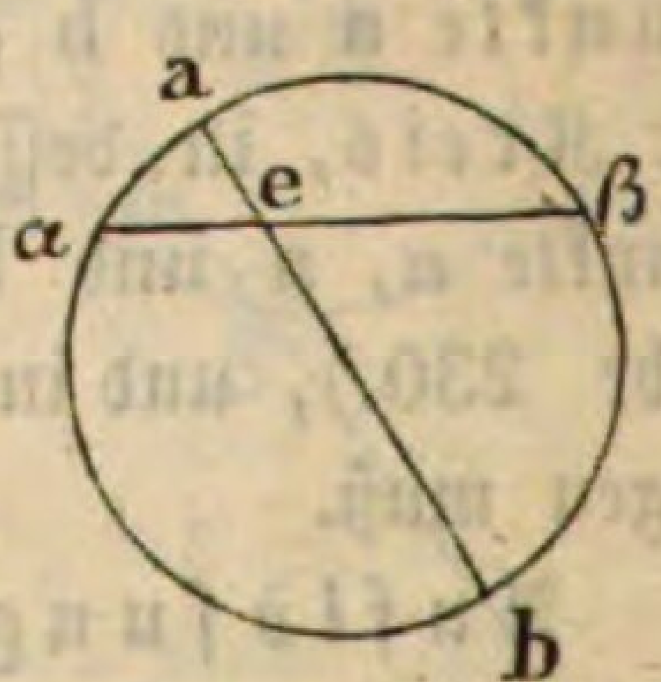
und daher $\frac{(em)^2}{3} = (e\alpha)^2$

also $em \times \frac{em}{3} = (e\alpha)^2$.

Nun ist em gegeben, und daher auch $\frac{em}{3}$, und folglich das Rechteck $em \times \frac{em}{3}$; also ist $e\alpha$ ebenfalls gegeben, und da e der Lage nach gegeben ist, so ist auch der Punkt α gegeben.

Auflösung. Man suche die Seite eines Quadrates, das dem Rechteck $em \times \frac{em}{3}$ gleich ist (II. 14.), und beschreibe mit der Seite dieses Quadrates aus e einen Bogen: so schneidet Dieser den gegebenen Kreis in dem Punkte α, daß $e\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\beta)$ wird.

Aufgabe 334. Innerhalb eines Kreises ist ein Punkt e gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Sehne ziehen, die in diesem Punkte so getheilt wird, daß der eine Theil zwei Mal so groß, als der andere ist.



Analysis. Zieht man durch den gegebenen Punkt e den Durchmesser ab, so ist ae und eb gegeben. Nun ist

$$ae \times eb = \alpha e \times e\beta$$

uud weil $e\beta = 2(\alpha e)$ seyn soll

$$ae \times eb = \alpha e \times 2(\alpha e) = 2(\alpha e)^2$$

folglich $$\frac{ae \times eb}{2} = (\alpha e)^2$$

und daher $$\frac{ae}{2} \times eb = (\alpha e)^2.$$

Da nun ae und eb gegeben sind: so ist auch das Rechteck $\frac{ae}{2} \times eb$ gegeben, und daher die Seite αe des Quadrates, das diesem Rechteck gleich ist. Aber auch der Punkt e ist gegeben, folglich auch der Punkt α, und daher $\alpha\beta$ der Größe und Lage nach.

Aufgabe 335. Es ist ein Winkel φ gegeben, und in dem einen Schenkel ein Punkt a, und eine gerade Linie der Lage nach, welche diesen Schenkel in dem ebenfalls gegebenen Punkte d normal schneidet. Man soll in dieser Linie den Punkt x so bestimmen, daß, wenn man von demselben die Normale xm auf den andern Schenkel des Winkels φ fället, diese dem Abstande des Punktes x von dem gegebenen Punkte a gleich werde.

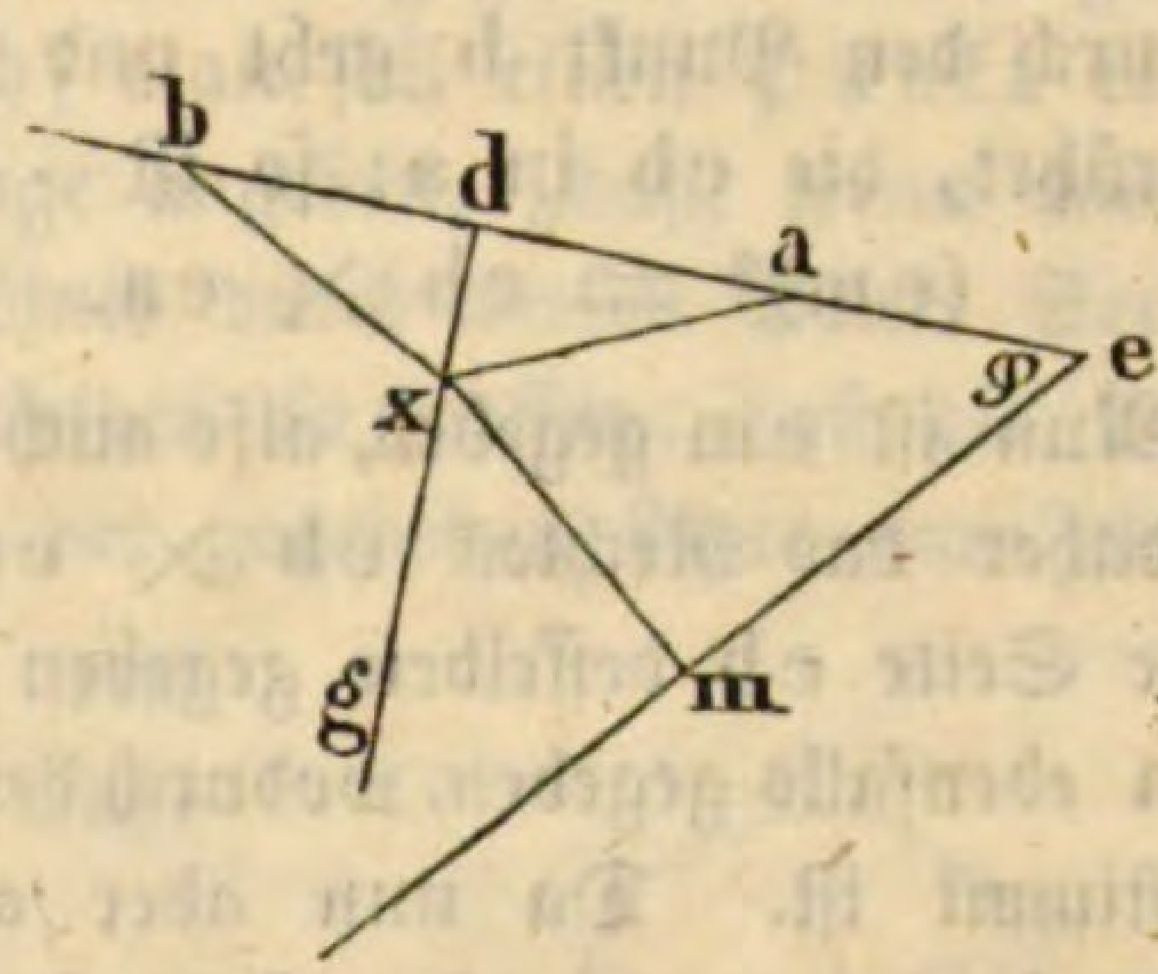
Analysis. Nimmt man db = da und zieht xb, so ist, weil dg normal auf ab seyn soll,

$$xb = xa.$$

Es soll aber auch seyn

$$mx = xa$$

folglich ist $xb = xm = xa$ und daher x der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte a, b und m geht; und da xm normal auf dem Schenkel em



des Winkels φ seyn soll, so ist em eine Tangente des Kreises, die denselben in m berührt, während die eb in a und b von dem Kreise geschnitten wird. Hiernach ist

$$ea \times eb = (em)^2.$$

Nun ist ea und eb gegeben, also auch das Rechteck ea $\times$ eb, und folglich die Seite em des Quadrates, das diesem Rechteck gleich ist; da nun e gegeben ist, so ist auch der Punkt

m gegeben, und folglich die Normale mx der Lage nach; und daher der Punkt x, in welchem sie die ebenfalls der Lage nach gegebene Normale dg schneidet.

Auflösung. Nimm db = da, und suche die Seite des Quadrates, welches dem Rechteck ea × eb gleich ist (II. 14.), oder (Aufg. 326.); nimm em gleich dieser Seite, und errichte in m eine Normale em, so schneidet Diese die dg in dem gesuchten Punkte x.

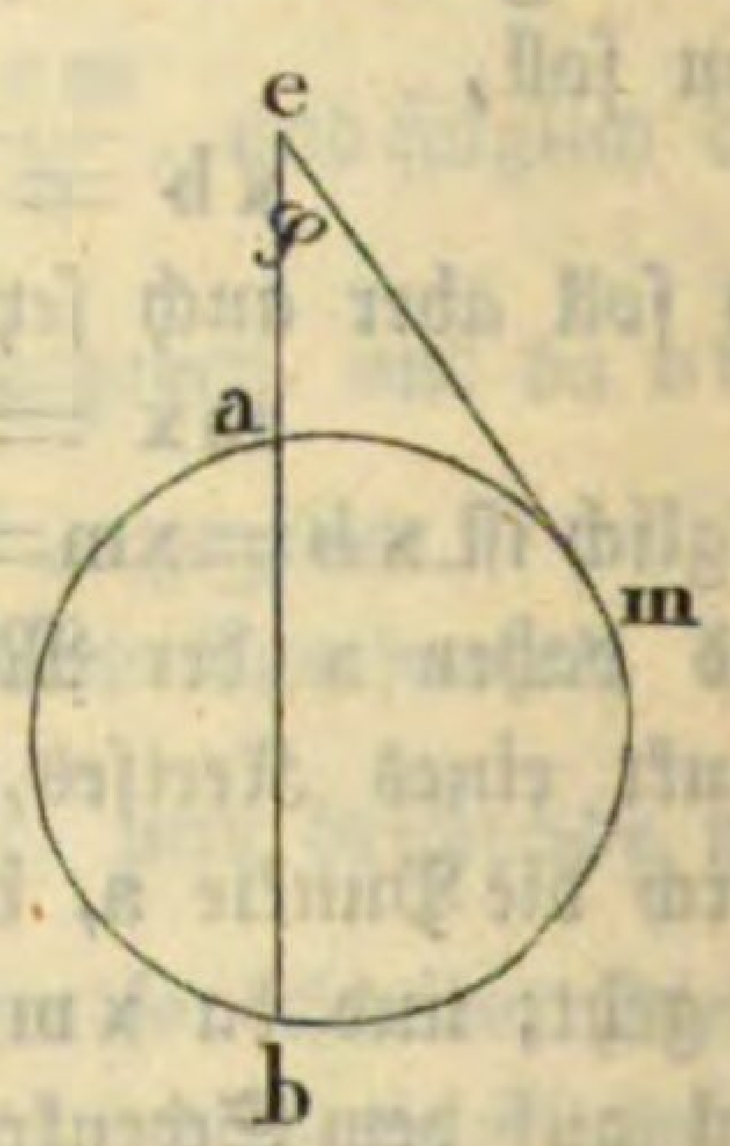
Aufgabe 336. Zwei Punkte und eine gerade Linie sind der Lage nach gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der durch diese Punkte geht, und die der Lage nach gegebene Linie berührt.

Analysis. Sind a und b in der obigen Figur die gegebenen Punkte und em die gegebene Linie: so muß, wenn man ab in d halbirt und die Normale dg auf ab errichtet, in dieser Normale der Mittelpunkt x liegen, und es muß seyn xm = xa = xb. Die Aufgabe ist daher der vorigen gleich.

Aufgabe 337. Der Winkel meb = φ ist gegeben, und die Schenkel desselben sind in m und b begrenzt; man soll einen Kreis beschreiben, von welchem em eine Tangente ist, die den Kreis in m berührt, und es soll dieser Kreis durch den Punkt b gehen.

Analysis. Schneidet der Kreis, der durch den Punkt b geht und em in m berührt, die eb in a: so ist

$$(em)^2 = eb \times ea.$$

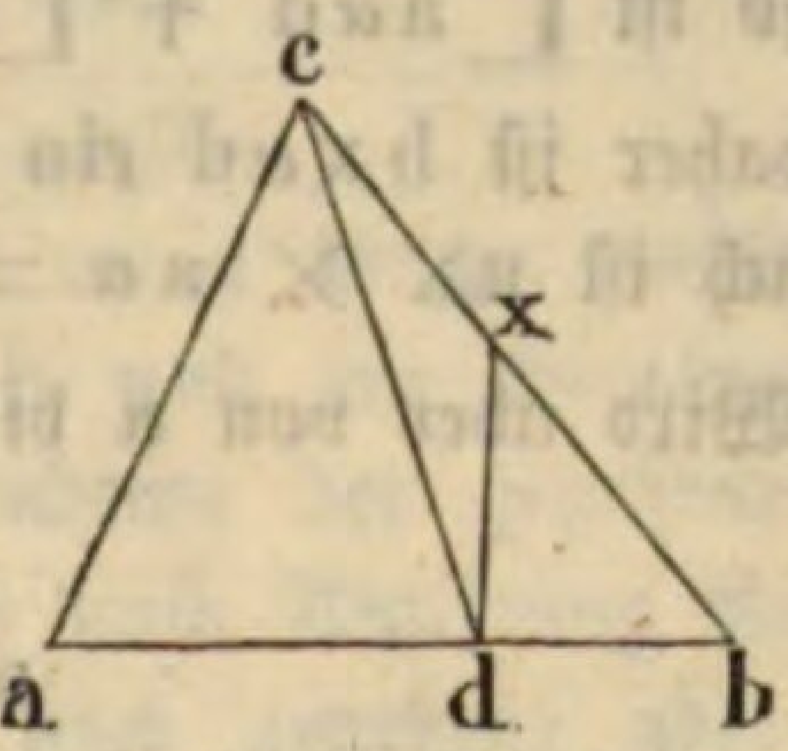


Nun ist em gegeben, also auch $(em)^2$, und daher das Rechteck eb × ea; und da die Seite eb desselben gegeben ist, so ist ea ebenfalls gegeben, wodurch der Punkt a bestimmt ist. Da nun aber auch die Punkte b und m gegeben sind, so läßt sich der Kreis beschreiben (Aufg. 230)

Anmerkung. Die Aufgabe läßt sich einfacher auf folgende Art lösen: Man verbinde m mit b, errichte in dem Halbirungspunkte dieser Linie eine Normale, und auch in m eine Normale auf me: so schneiden sich die beiden Normalen in dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises.

Aufgabe 338. Es ist ein Dreieck gegeben; man soll in der einen Seite desselben einen Punkt bestimmen, der von dieser Seite ein Stück abschneidet, das dem Abstande dieses Punktes von der andern Seite gleich ist.

Gegeben Δabc.



Gesucht der Punkt x, so daß, wenn xd normal auf ab gezogen wird, xd = xc ist.

Analysis. Man ziehe cd, so ist Δcxd gleichschenklig. Da nun ∟b gegeben ist, so ist auch gegeben ∟dxc = R + b (I. 32.)

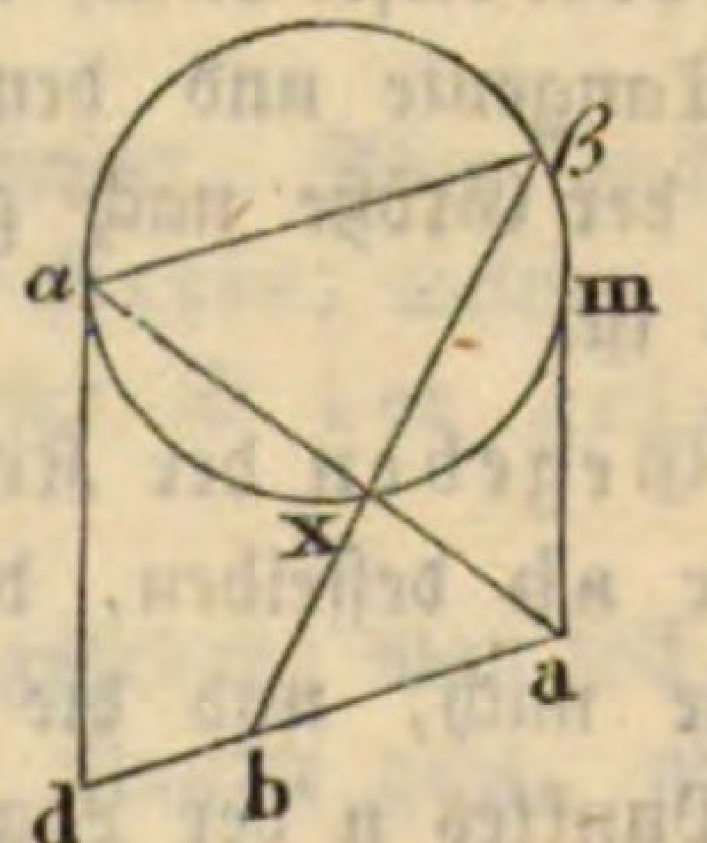
folglich ist ∟xcd + ∟xdc = R — b

und weil xc = xd, so ist ∟xdc = ∟xcd. Diese Winkel sind also gegeben, und daher die Linie cd der Lage nach; und folglich auch der Punkt d, und durch diesen der gesuchte Punkt x.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist ohne Beihülfe der 3 letzten Sätze des 3ten Buches gelöst, und nur deßwegen hier aufgenommen worden, weil sie der vorhergehenden Aufgabe verwandt ist.

Aufgabe 339. Es ist ein Kreis gegeben, und eine gerade Linie der Größe und Lage nach; man soll einen Punkt in dem Umfange des Kreises von der Lage angeben, „daß, wenn man von den Endpunkten der gegebenen Linie durch diesen Punkt Secanten durch den Kreis zieht, diese denselben so treffen, daß die Linie, welche ihre Endpunkte verbindet, der gegebenen Linie parallel ist.

Gegeben der Kreis $\alpha\beta$x, und die Linie ab der Größe und Lage nach.



Gesucht der Punkt x, daß, wenn durch x die aα und bβ gezogen werden, und man α mit β verbindet, $\alpha\beta$ parallel ab ist.

Analysis. An α ziehe die Tangente αd, welche die ab in d scheidet: so ist

$$∟ a\alpha d = ∟ b\beta\alpha \quad (32.)$$

Weil aber $\alpha\beta$ der ab parallel seyn soll, so ist

$$\llcorner b\beta\alpha = \llcorner xba$$

$$\text{folglich ist auch } \llcorner a\alpha d = \llcorner xba$$

$$\text{Da nun } \llcorner dbx = \llcorner dbx$$

$$\text{so ist } \llcorner a\alpha d + \llcorner dbx = \llcorner xba + \llcorner dbx = 2R$$

und daher ist $bx\alpha d$ ein Viereck im Kreise (22. Zus.) hiernach ist $ax \times a\alpha = ab \times ad$ (36.)

Wird aber von a die Tangente am an den Kreis gezogen, so ist

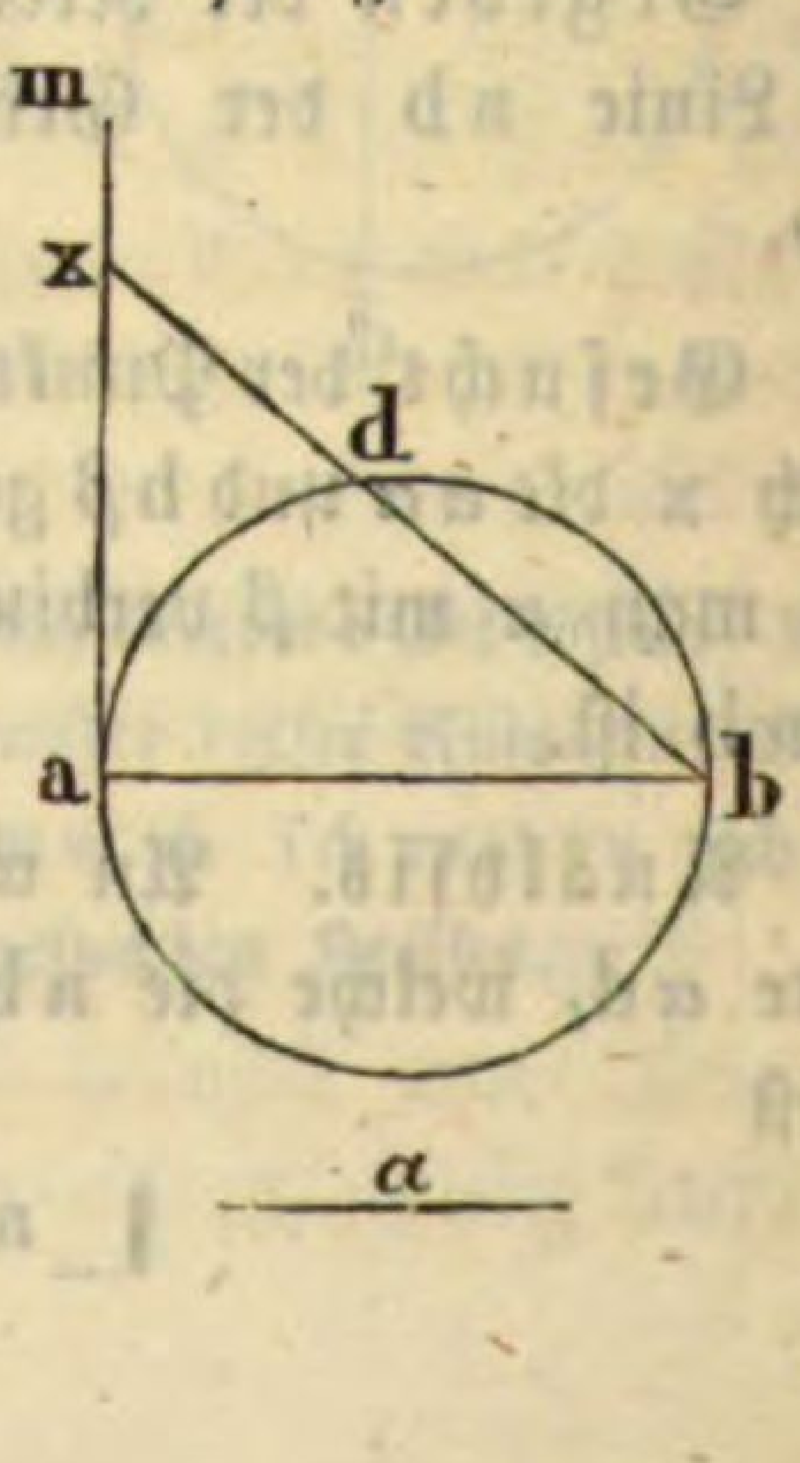
$$ax \times a\alpha = (am)^2$$

$$\text{folglich ist auch } ab \times ad = (am)^2$$

Nun ist aber am gegeben und auch ab, folglich kann ad gefunden werden; und es ist daher auch d gegeben, und somit die Tangente $d\alpha$, welche von d an den Kreis sich ziehen läßt. Da nun hierdurch α gegeben ist, so kennt man $a\alpha$, und daher den Punkt x.

Auflösung. Man ziehe von a die Tangente am an den Kreis (17.), suche eine Linie z von der Länge, daß $ab \times z = (am)^2$ (Aufg. 326.) und nehme $ad = z$; von d ziehe man die Tangente $d\alpha$ an den Kreis, und verbinde α mit a; so schneidet diese den Kreis in x so, daß wenn man $bx\beta$ und hierauf $\alpha\beta$ zieht, die $\alpha\beta$ der ab parallel ist.

Aufgabe 340. Ein Kreis und ein Durchmesser desselben sind der Größe und Lage nach gegeben, und an dem einen Endpunkte des Durchmessers ist eine Tangente gezogen; es soll in dieser Tangente ein Punkt so bestimmt werden, daß, wenn man denselben mit dem andern Endpunkte des Durchmessers verbindet, der Theil dieser Linie, welcher zwischen der Tangente und dem Kreise liegt, einer der Größe nach gegebenen Linie gleich ist.



Gegeben der Kreis, der Durchmesser ab desselben, die Linie α der Größe nach, und die Tangente am des Punktes a der Lage nach.

Gesucht der Punkt x, daß, wenn xb gezogen wird, $xd = \alpha$ ist.

Analysis. Es ist

$$(xb)^2 = (ax)^2 + (ab)^2 \quad (I.\ 47.)$$

$$\text{aber } (xb)^2 = xd \times xb + db \times xb \quad (II.\ 2.)$$

$$\text{also } xd \times xb + db \times xb = (ax)^2 + (ab)^2.$$

$$\text{Nun ist } xd \times xb = (ax)^2 \quad (36.)$$

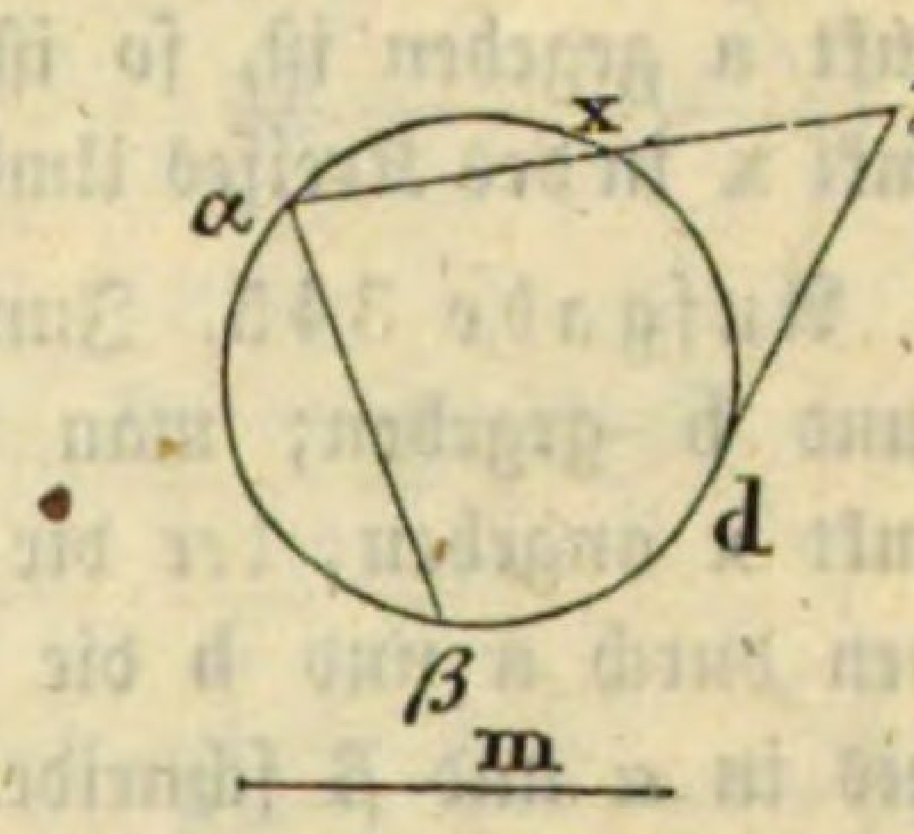
$$\text{folglich ist } db \times xb = (ab)^2.$$

Es kömmt also darauf an, „die xd = α so zu verlängern, daß das unter der verlängerten Linie xb und der Verlängerung derselben db enthaltene Rechteck dem Quadrate der gegebenen ab gleich werde"; und diese Aufgabe läßt sich nach Anleitung Aufgabe 327. lösen. Folglich ist bx der Größe nach gegeben; aber auch der Punkt b ist gegeben und am der Lage nach; also auch der gesuchte Punkt x, in welchem am von bx geschnitten wird.

Aufgabe 341. Es sind drei Punkte gegeben; man soll durch zwei dieser Punkte einen Kreis beschreiben, so daß, wenn man von dem dritten Punkte eine Tangente an diesen Kreis zieht, diese einer gegebenen Linie gleich sey.

Gegeben die Punkte α, β, γ, und die Linie m der Größe nach.

Gesucht ein Kreis, der durch α und β gehe; und es soll die von γ an diesen Kreis gezogene Tangente γd der gegebenen m gleich seyn.



Analysis. Ziehe $\gamma\alpha$, und es schneide diese den Kreis in x: so ist

$$\gamma x \times \gamma\alpha = (\gamma d)^2.$$

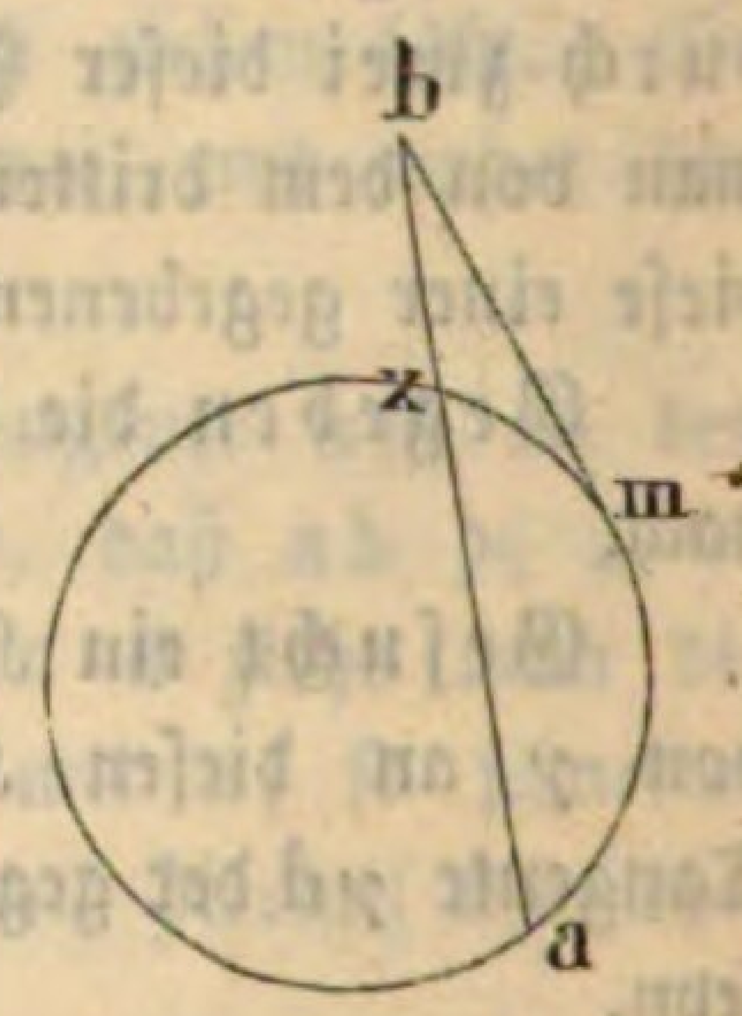
Nun ist γd = m gegeben und auch $\gamma\alpha$ gegeben, folglich kann γx gefunden werden; und es ist hierdurch der Punkt x der Lage nach bestimmt. Aber auch die Punkte α und β sind gegeben, folglich der Kreis, welcher durch α, β und x geht (Aufg. 230.); und dieser ist der gesuchte Kreis.

Aufgabe 342. Drei Punkte sind gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, der durch Einen dieser Punkte geht, und es sollen die Tangenten, welche von den beiden andern Punkten an den Kreis gezogen werden können, zwei der Größe nach gegebenen Linien gleich seyn.

Aufgabe 343. Es ist eine begrenzte gerade Linie der Größe und Lage nach gegeben, und eine andere der Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, der durch den einen Endpunkt der begrenzten Linie geht, und dessen Mittelpunkt in der der Lage nach Gegebenen liegt; und es soll die von dem andern Endpunkte an diesen Kreis gezogene Tangente einer ebenfalls gegebenen Linie gleich seyn, die jedoch kleiner ist als die Erstere.

Aufgabe 344. Ein Kreis ist gegeben, und in dem Umfange desselben ein Punkt; man soll durch diesen Punkt eine Secante von gegebener Länge ziehen, so daß, wenn man von dem Endpunkte dieser Secante eine Tangente an den Kreis zieht, diese einer gegebenen Linie gleich sey.

Gegeben der Kreis, und der Punkt a in dem Umfange desselben, die Secante ab, und die Tangente bm der Größe nach.



Gesucht der Punkt x, in welchem die ab den Kreis schneide.

Analysis. Es ist $(bm)^2 = ba \times bx$.

Da nun bm und ba gegeben sind, so kann bx gefunden werden, und es ist daher auch ax gegeben; und da der Punkt a gegeben ist, so ist hierdurch der Punkt x in des Kreises Umfang bestimmt.

Aufgabe 345. Innerhalb eines Kreises sind zwei Punkte a und b gegeben; man soll in dem Umfange des Kreises einen Punkt x angeben, der die Lage habe, daß, wenn man von demselben durch a und b die Linien $x\alpha$ und $x\beta$ zieht, welche den Kreis in α und β schneiden, und man hierauf α mit β verbindet, die $\alpha\beta$ der ab parallel sey.

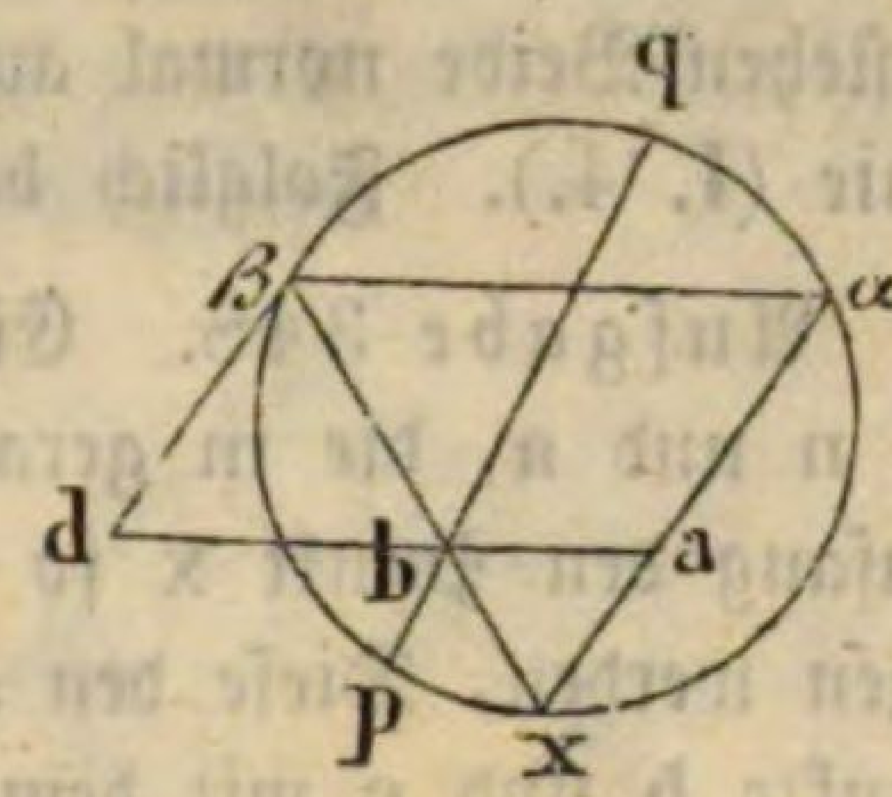
Auflösung. Durch b ziehe eine Linie, welche den Kreis in p und q schneidet, und verlängere ab bis d so, daß $ab \times bd = pb \times bq$ werde. Von d ziehe eine Tangente $d\beta$ an den Kreis; wird nun von β durch b eine Linie gezogen, so schneidet diese den Kreis in dem gesuchten Punkte x.

Beweis. Es ist

$$pb \times bq = ab \times bd \quad \text{(p. c.)}$$
$$\text{und } pb \times bq = xb \times b\beta \quad (35.)$$

$$\text{daher } ab \times bd = xb \times b\beta.$$

folglich liegen die Punkte a, β, d und x in dem Umfange eines Kreises (Beilage XVIII. Nr. 6.) und es ist daher $\llcorner$ xad = $\llcorner$ xβd (21.)



Nun ist aber auch, wenn man xa bis an den Kreis verlängert, und den Durchschnittspunkt α mit β verbindet

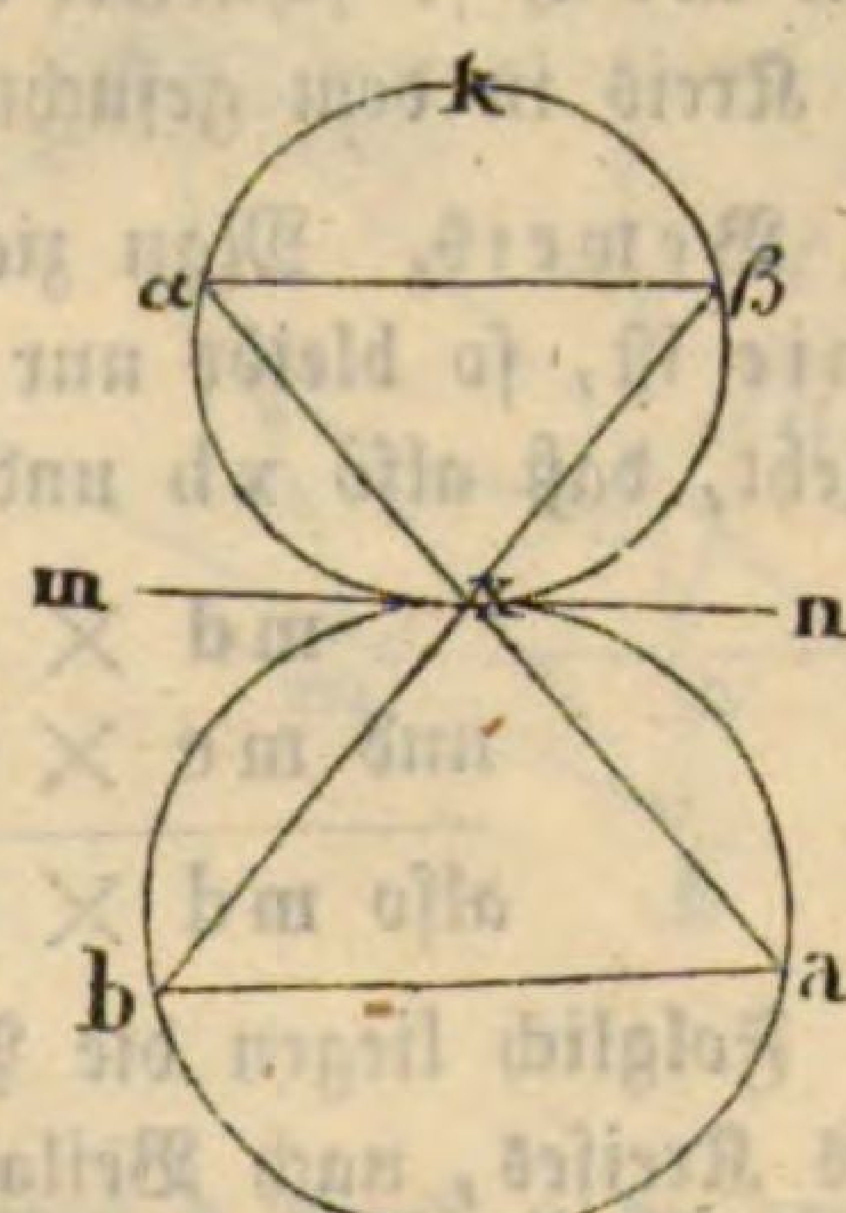
$\llcorner$ xβd = $\llcorner$ x$\alpha\beta$ (32.)

also ist auch $\llcorner$ xad = $\llcorner$ x$\alpha\beta$ und daher $\alpha\beta$ parallel ab.

Aufgabe 346. Es sind zwei concentrische Kreise gegeben, und in dem Umfange des größern ein Punkt; man soll von diesem Punkte aus eine Linie durch die Kreise ziehen, welche den innern Kreis so schneidet, daß dadurch die Linie, insofern sie Sehne des größern Kreises ist, in drei gleiche Theile getheilt werde.

Aufgabe 347. Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, und die beiden Punkte a und b der Lage nach. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch die Punkte a und b gehe, und den gegebenen Kreis berühre.

Auflösung. Suche in dem Umfange des gegebenen Kreises k den Punkt x, der die Eigenschaft hat, „daß, wenn man von a und b durch x die geraden Linien axα, bxβ zieht und α mit β verbindet, $\alpha\beta$ parallel ab ist" (Aufgabe 339.) Hierauf beschreibe einen Kreis, der durch a, b und x geht (Aufg. 230.): so ist dieser der gesuchte Kreis.



Beweis. Man ziehe durch x an den Kreis k die Tangente mn, so ist

$\llcorner$ αxm = $\llcorner$ β (32.)

und weil $\alpha\beta$ parallel ab $\llcorner$ β = $\llcorner$ b

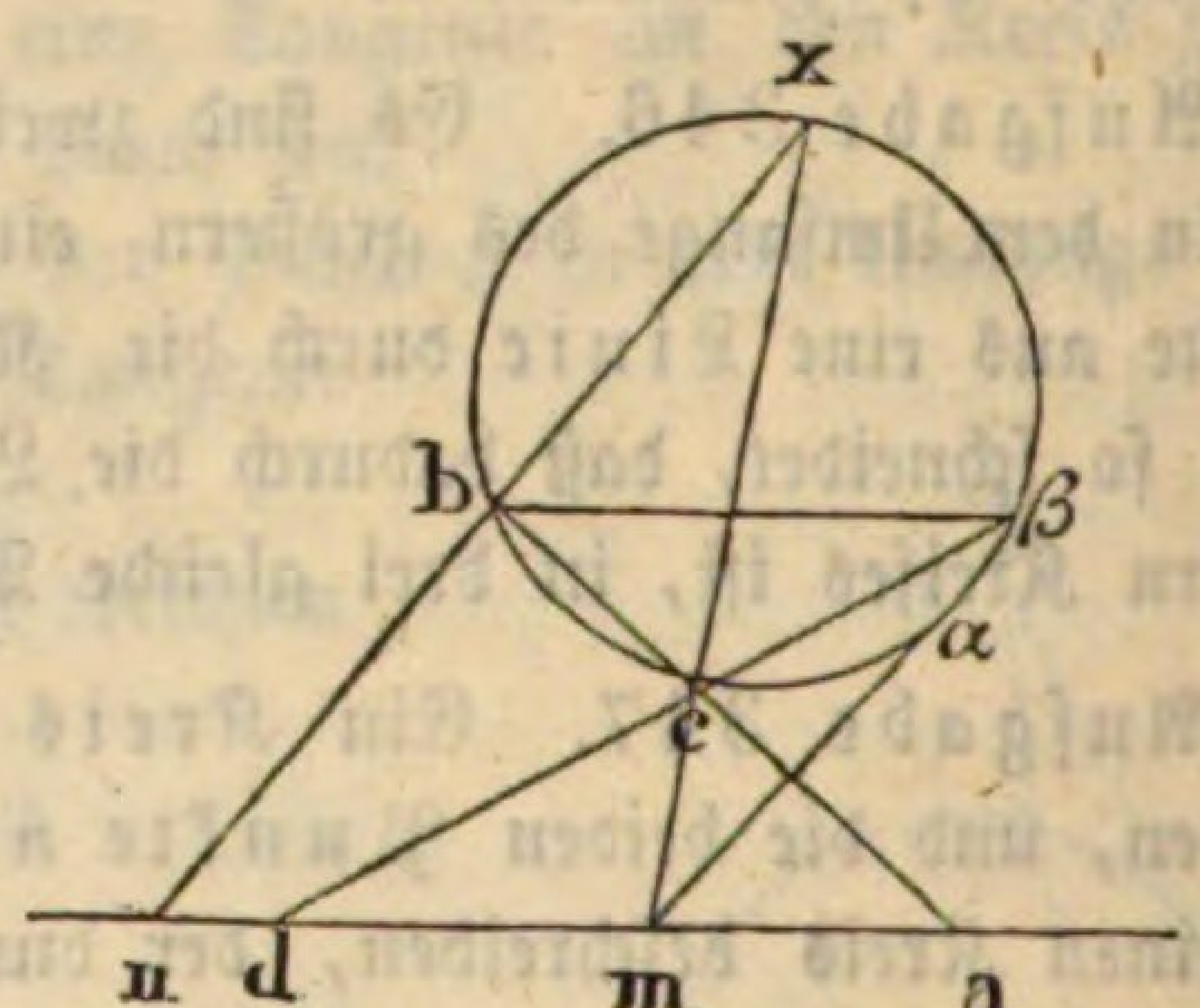
folglich auch $\llcorner$ αxm = $\llcorner$ b

Da nun $\llcorner$ αxm = $\llcorner$ axn (I. 15.)

so ist $\llcorner$ b = $\llcorner$ axn

und daher mn auch Tangente des beschriebenen Kreises abx. Werden nun die Mittelpunkte beider Kreise mit x verbunden, so stehen Beide normal auf mn (18.), und liegen daher in gerader Linie (I. 4.). Folglich berühren die Kreise sich in x (12.)

Aufgabe 348. Ein Kreis ist gegeben und drei Punkte m, n und a, die in gerader Linie liegen; man soll in des Kreises Umfang den Punkt x so bestimmen, daß, wenn nx und mx gezogen werden, Diese den Kreis in b und c so schneiden, daß die Punkte b und c mit dem dritten Punkte a in gerader Linie liegen.



Auflösung. Von m ziehe die Tangente mα an den Kreis, und schneide mn in d so, daß md $\times$ mn $=$ $(m\alpha)^2$ (Aufg. 327.) werde. Hierauf suche den Punkt c, daß, wenn von a und d durch c die Linien ab und dβ gezogen werden, bβ parallel ab sey (Aufg. 339.). Zieht man nun von m durch c die gerade Linie mcx, so schneidet diese den Kreis in dem gesuchten Punkte x.

Beweis. Man ziehe xb und xn. Da acb eine gerade Linie ist, so bleibt nur zu beweisen, „daß xn durch den Punkt b geht, daß also xb und xn zusammen fallen". Es ist

$$md \times mn = (m\alpha)^2 \quad \text{(p. c.)}$$
$$\text{und } mc \times mx = (m\alpha)^2 \quad (36.)$$
$$\text{also } md \times mn = mc \times mx.$$

Folglich liegen die Punkte d, n, x und c, in dem Umfange eines Kreises, nach Beilage XVIII. Nr. 6.

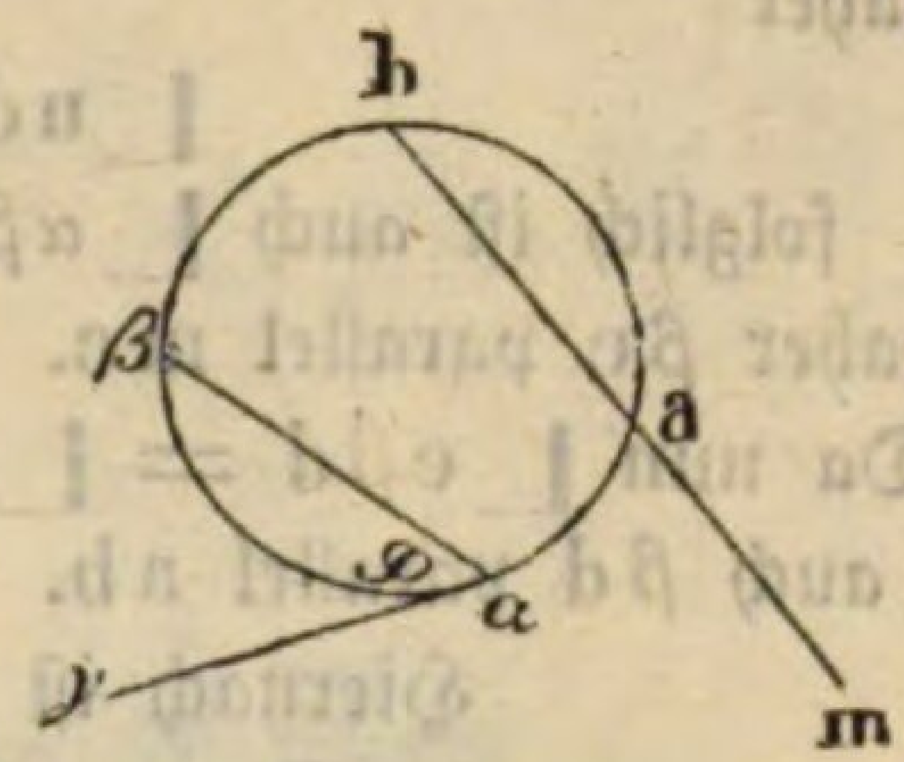
Folglich ist $\llcorner md\beta = \llcorner mxn$ (22.)

Weil aber bβ parallel ad, so ist auch

$$\llcorner md\beta = \llcorner d\beta b$$
$$\text{also ist } \llcorner mxn = \llcorner d\beta b$$
$$\text{Da nun } \llcorner d\beta b = \llcorner mxb \quad (21.)$$
$$\text{so folgt } \llcorner mxn = \llcorner mxb$$

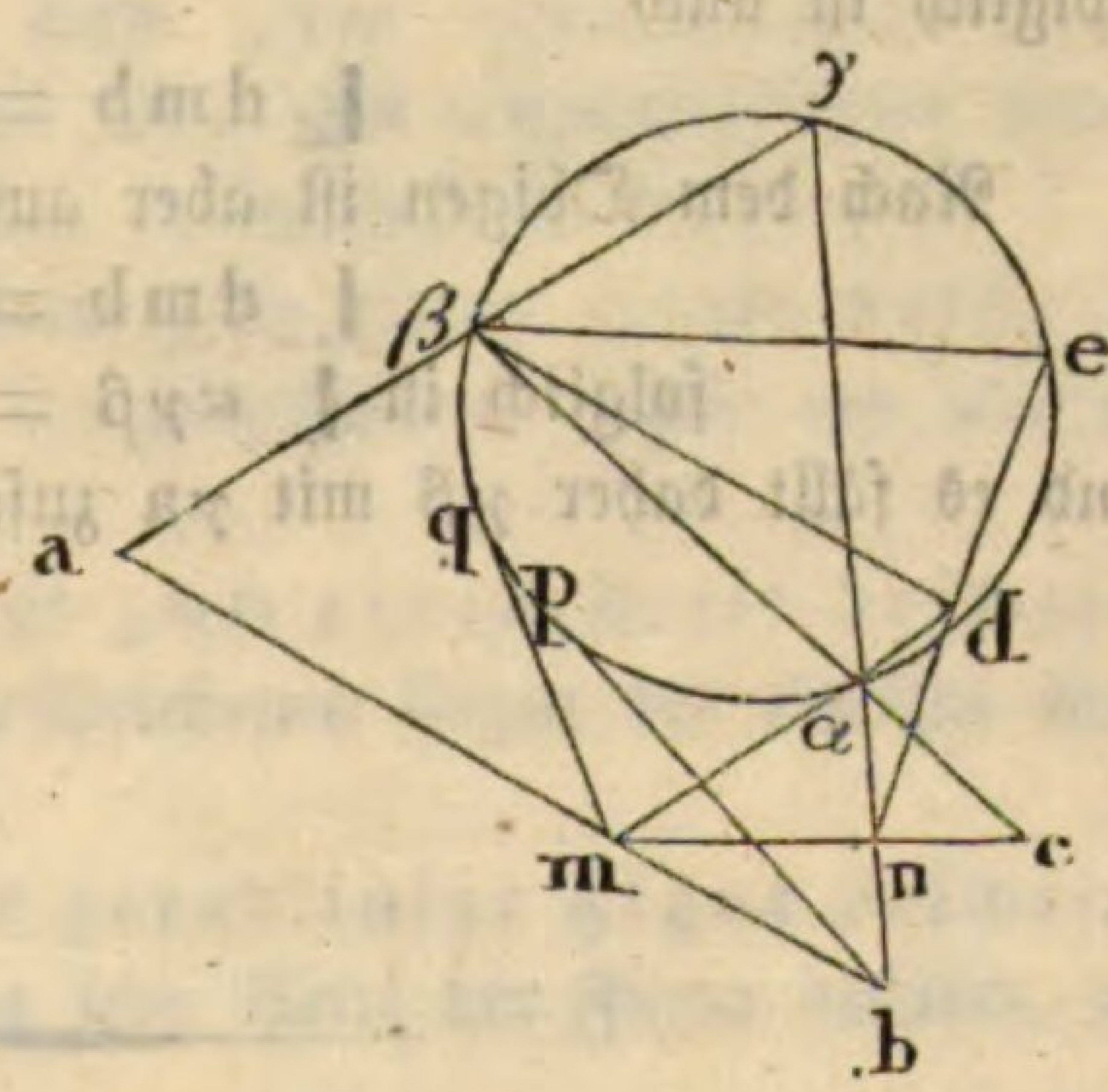
und es liegt also xn mit xb in gerader Linie.

Aufgabe 349. Man soll, von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte m, die Linie mab so durch den Kreis ziehen, daß ab die Sehne eines Bogens werde, zu welchem der gegebene Winkel φ als Peripheriewinkel gehört.



Auflösung. An irgend einen Punkt α des Kreisumfanges ziehe die Tangente $\alpha\gamma$, und trage an diese den Winkel $\gamma\alpha\beta = \varphi$ an. Wird nun von m aus die mab so gezogen, daß $ab = \alpha\beta$ (Aufg. 281.): so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 350. Es ist ein Kreis gegeben, und drei Punkte a, b und c; man soll ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in den Kreis beschreiben, dessen Seiten oder deren Verlängerungen durch die Punkte a, b und c, gehen.



Auflösung. Ziehe von b eine Tangente bp an den Kreis, und schneide ba in m, so daß

$$bm \times ba = (bp)^2$$

Von m ziehe die Tangente mq an den Kreis, und ziehe mc, und schneide diese Linie in n, daß

$$mn \times mc = (mq)^2.$$

Aus n ziehe die gerade Linie nde durch den Kreis, daß der zu dem Bogen de gehörige Peripheriewinkel $d\beta e = \angle bmc$ wird. Verbinde m mit d, welche Linie den Kreis in α schneidet; wird nun von b durch α die gerade Linie $b\alpha\gamma$ gezogen, und von c die $c\alpha\beta$: so ist, wenn man endlich $\gamma\beta$ zieht, $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Es kömmt bloß darauf an, zu beweisen, „daß $\gamma\beta$ mit γa in gerader Linie liege".

$$\text{Da } (mq)^2 = mn \times mc \quad (\text{p. c.})$$
$$\text{und auch } (mq)^2 = m\alpha \times md \quad (36.)$$
$$\text{so ist } mn \times mc = m\alpha \times md.$$

Folglich liegen die vier Punkte α, n, c, d in dem Umfange eines Kreises; und es ist daher

$$\angle nc\alpha = \angle nd\alpha.$$

Wird aber βe gezogen, so ist $\alpha de\beta$ ein Viereck im Kreise, und daher

$$\angle nd\alpha = \angle \alpha\beta e$$

folglich ist auch $\angle \alpha\beta e = \angle nc\alpha$

und daher βe parallel mc.

Da nun $\angle e\beta d = \angle cmb$ (p. c.)

so ist auch βd parallel ab.

Hiernach ist $\angle md\beta = \angle dmb$.

Da nun $\angle md\beta = \angle \alpha\gamma\beta$ (21.)

so ist $\angle dmb = \angle \alpha\gamma\beta$

Weil aber $(bp)^2 = bm \times ba$ (p. c.)

und $(bp)^2 = b\alpha \times b\gamma$ (36.)

so ist $bm \times ba = b\alpha \times b\gamma$

und daher $\alpha m a \gamma$ ein Viereck im Kreise (Beilage **XVIII.** Nr. 6.) Folglich ist auch

$$\angle dmb = \angle \alpha\gamma a.$$

Nach dem Obigen ist aber auch

$$\angle dmb = \angle \alpha\gamma\beta$$

folglich ist $\angle \alpha\gamma\beta = \angle \alpha\gamma a$

und es fällt daher $\gamma\beta$ mit γa zusammen.

Das vierte Buch der Elemente.

Erklärungen.

1) Eine geradlinige Figur heißt „in eine geradlinige Figur beschrieben": wenn jeder Winkel der eingeschriebenen eine Seite derjenigen trifft, in welche sie beschrieben ist.

2) Eine geradlinige Figur heißt „um eine geradlinige Figur beschrieben": wenn jede Seite der umgeschriebenen einen Winkel derjenigen trifft, um welche sie beschrieben ist.

3) Eine geradlinige Figur heißt „in einen Kreis beschrieben": wenn jeder Winkel der eingeschriebenen Figur des Kreises Umfang trifft.

4) Eine geradlinige Figur heißt „um einen Kreis beschrieben": wenn jede Seite der umgeschriebenen Figur des Kreises Umfang berührt.

5) Ein Kreis heißt „in eine geradlinige Figur beschrieben": wenn des Kreises Umfang jede Seite der Figur berührt, in welche er beschrieben ist.

6) Ein Kreis heißt „um eine geradlinige Figur beschrieben": wenn der Umfang des Kreises jeden Winkel der Figur trifft, um welche er beschrieben ist.

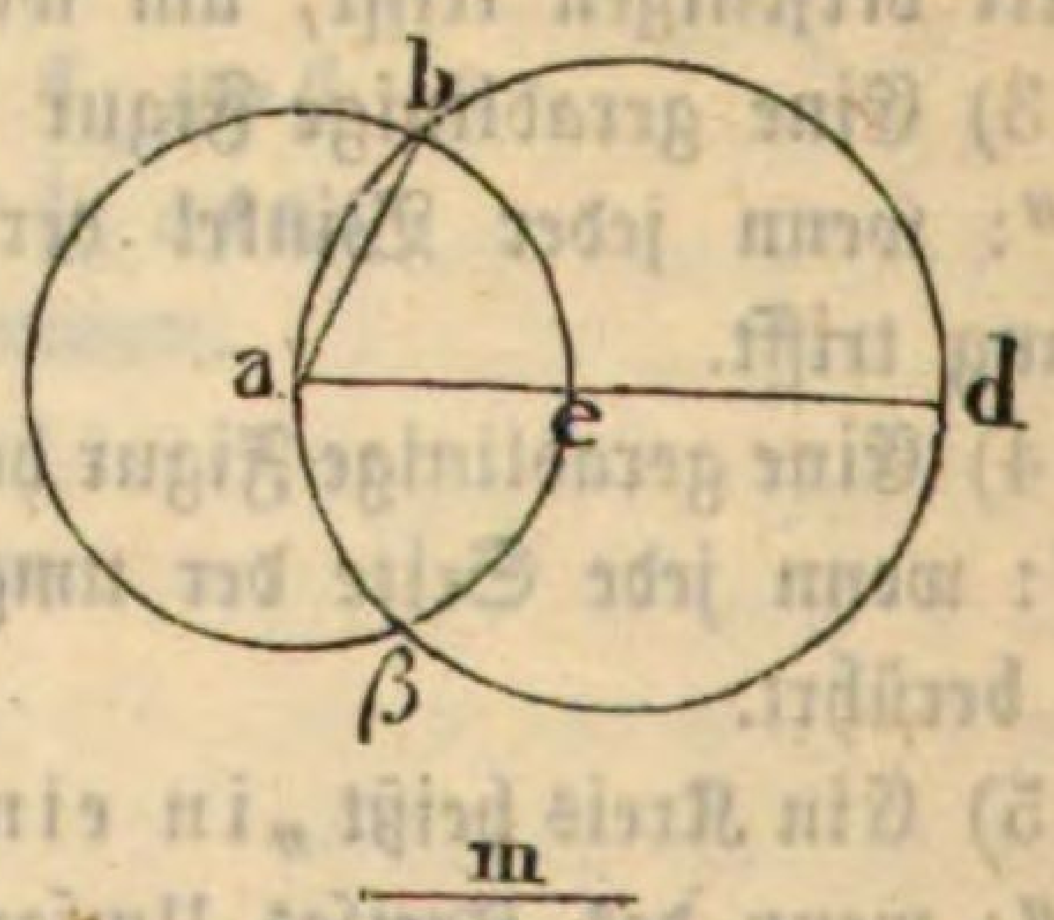
7) Eine gerade Linie heißt „in einen Kreis eingetragen": wenn ihre Endpunkte in des Kreises Umfang liegen (sie also Sehne des Kreises ist).

Anmerkung. Bei dem „Beschreiben einer geradlinigen Figur A in eine andere B" wird zwar gewöhnlich vorausgesetzt, „daß in jeder Seite der B der Scheitel eines Winkels von A liege", und es werden daher hierbei die beiden Figuren „als von gleich vielen geraden Linien eingeschlossen" ange-

nommen; doch läßt sich der Begriff auch auf solche Figuren ausdehnen, die nicht gleich viele Seiten haben; und man kann hiernach immer sagen, „es ist A in B beschrieben“, wenn jede Ecke von A mit einer Seite von B zusammentrifft; wobei weder in allen Seiten der B eine Ecke der A liegen müssen, noch ist es nothwendig, daß nur eine einzige Ecke der B in einer Seite der A liege. Hat A weniger Seiten als B, so bleiben Seiten der B übrig, in welchen keine Ecken der A liegen. Dieses ist z. B. der Fall, wenn man ein Dreieck in ein Viereck hineinzeichnen will. Hat A aber mehr Ecken als B, so müssen in einzelnen Seiten der B zwei Ecken der A liegen; wie Dieses z. B. der Fall ist, wenn ein Viereck in ein Dreieck hineingezeichnet werden soll. So oft indessen zwei Ecken der A in derselben Seite der B liegen, fällt eine Seite der A mit einer Seite der B zusammen, so daß Beide dieselbe Lage haben. Auf diese Weise kann selbst ein Sechseck in ein Dreieck hineingezeichnet werden.

IV. Satz 1. Aufgabe.

Man soll in einen gegebenen Kreis abd „eine der gegebenen geraden Linie m, die jedoch nicht größer als des Kreises Durchmesser seyn darf, gleiche gerade Linie“ eintragen.



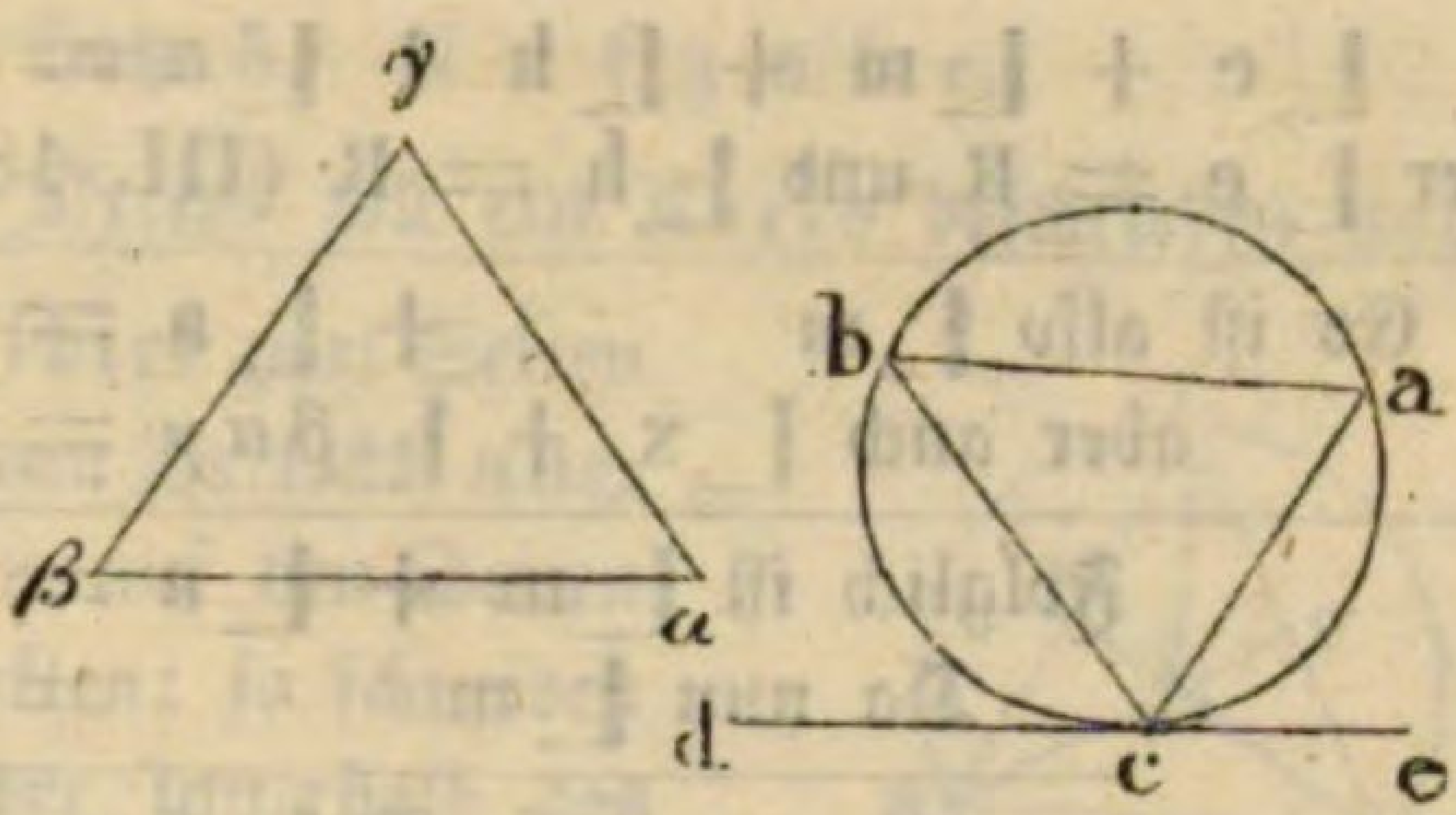
Auflösung. Ziehe des Kreises Durchmesser ad. Ist nun ad = m, so ist das Verlangte geschehen; ist aber ad > m, so nehme man ae = m (I. 3.), beschreibe aus a mit ae einen Kreis, der den gegebenen in b schneidet. Wird nun ab gezogen, so ist Diese die verlangte Linie.

Beweis. Es ist ae = m (p. c.)
und ab = ae (I. 15. E.)

folglich ab = m.

IV. Satz 2. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis soll man ein Dreieck einzeichnen, das mit einem gegebenen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Winkel gleich hat.



Auflösung. An irgend einen Punkt c des Kreisumfanges ziehe die Tangente dce (III. 16.); lege an c den Winkel dcb = $\angle \alpha$ und $\angle$ eca = $\angle \beta$, und ziehe ab: so ist $\triangle$abc das verlangte Dreieck.

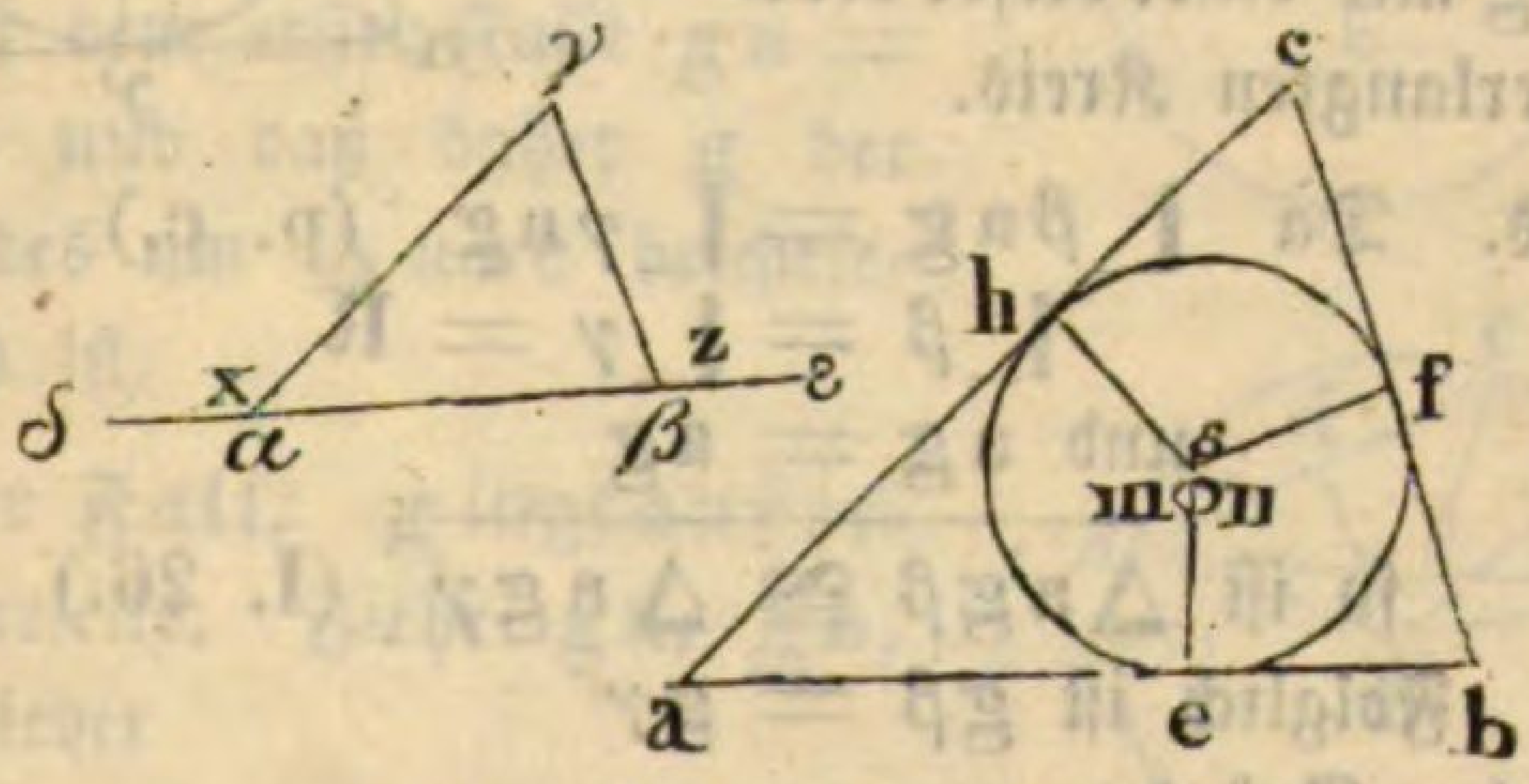
Beweis. Da $\angle$ dcb = $\angle \alpha$ (p. c.)
und $\angle$ dcb = $\angle$ a (III. 32.)

so ist $\angle$ a = $\angle \alpha$
und aus gleichen Gründen $\angle$ b = $\angle \beta$
Folglich ist auch $\angle$ acb = $\angle \gamma$ (I. 32.)

Das in den Kreis beschriebene Dreieck abc hat also mit dem gegebenen $\triangle \alpha\beta\gamma$ die Winkel gleich.

IV. Satz 3. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis soll man ein Dreieck beschreiben, das mit einem gegebenen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Winkel gleich hat.



Auflösung. Verlängere $\alpha\beta$ zu beiden Seiten nach δ und ε; von des Kreises Mittelpunkt g ziehe beliebig einen Radius ge, und lege in g an denselben $\angle$ egh = $\angle$ m = $\angle$ x, und $\angle$ egf = $\angle$ n = $\angle$ z. Durch die Punkte e, h und f ziehe Tangenten an den Kreis: so schneiden diese sich in a, b und c, und es ist $\triangle$abc das verlangte Dreieck.

Beweis. In dem Viereck egha ist, da jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegt werden kann,

$\angle e + \angle m + \angle h + \angle a = 4R$
aber $\angle e = R$ und $\angle h = R$ (III. 18.)

Es ist also $\angle m + \angle a = 2R$
aber auch $\angle x + \angle \beta\alpha\gamma = 2R$ (I. 13.)

Folglich ist $\angle m + \angle a = \angle x + \angle \beta\alpha\gamma$
Da nun $\angle m = \angle x$ (p. c.)

---

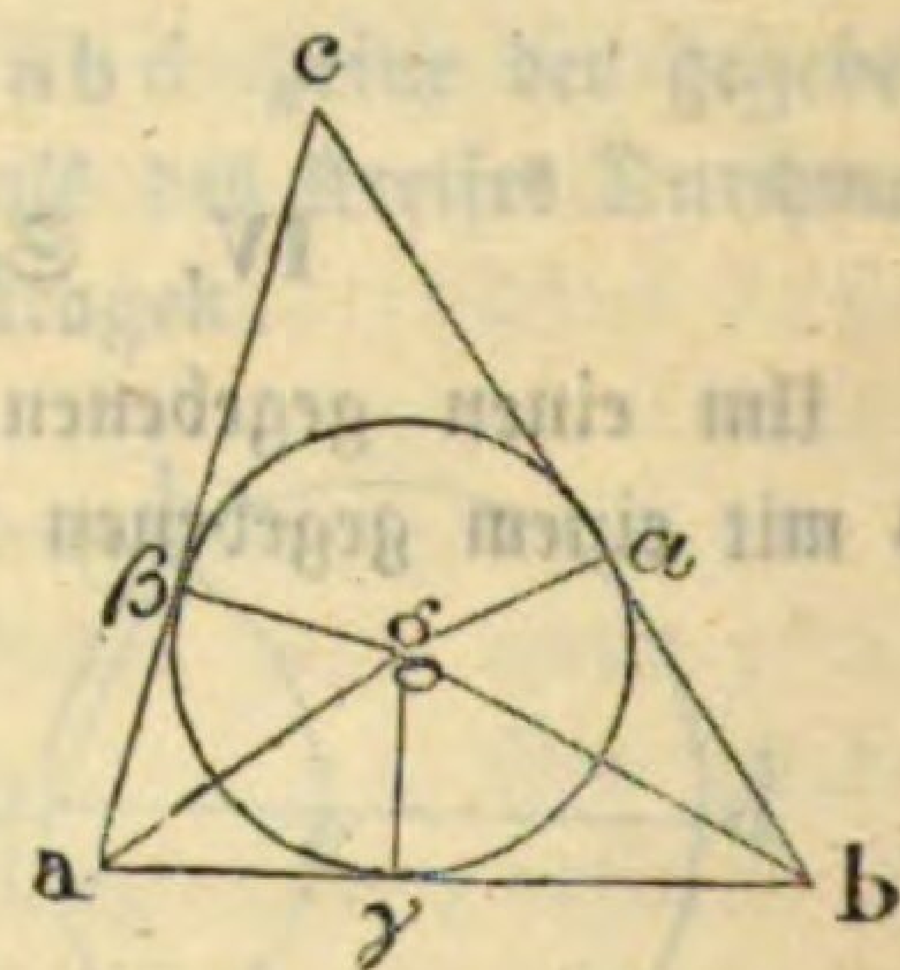
so ist $\angle a = \angle \beta\alpha\gamma$
Aus gleichen Gründen ist auch $\angle b = \angle \alpha\beta\gamma$
und daher nun $\angle c = \angle \alpha\gamma\beta$.

Das um den Kreis beschriebene Drieck **abc** hat also mit dem gegebenen $\Delta\alpha\beta\gamma$ die Winkel gleich.

IV. Satz 4. Aufgabe.

Man soll in ein gegebenes Dreieck einen Kreis beschreiben.

Auflösung. Halbire zwei Winkel **a** und **b** des Dreiecks, so schneiden sich die Halbirungslinien **ag** und **bg** in **g** (G. 11.) Von dem Durchschnittspunkte **g** fälle die Normalen $g\alpha$, $g\beta$, $g\gamma$ auf die drei Seiten des Dreiecks, und beschreibe aus **g** mit einer dieser Normalen den verlangten Kreis.



Beweis. Da $\angle \beta ag = \angle \gamma ag$ (p. c.)
$\angle \beta = \angle \gamma = R$
und $ag = ag$

---

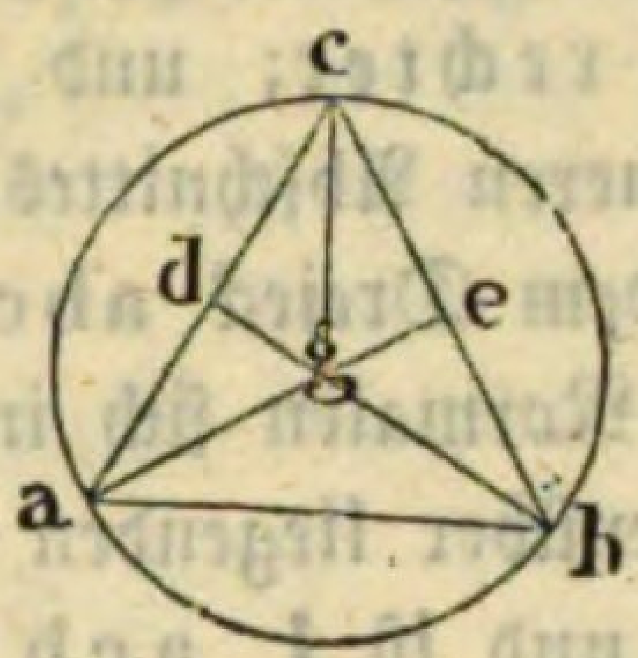
so ist $\Delta ag\beta \cong \Delta ag\gamma$ (I. 26.)
Folglich ist $g\beta = g\gamma$
und aus gleichen Gründen $g\alpha = g\gamma$

Es ist also $g\alpha = g\beta = g\gamma$
und daher geht der aus **g** mit $g\alpha$ beschriebene Kreis auch durch β und γ; und da diese Linien normal auf den Seiten des Dreiecks sind, so sind die Seiten Tangenten des beschriebenen Kreises.

Zusatz. Wird ein Winkel halbirt, so ist der normale Abstand eines jeden Punktes der Halbirungslinie von beiden Schenkeln des Winkels gleich groß.

IV. Satz 5. Aufgabe.

Um ein gegebenes Dreieck soll ein Kreis beschrieben werden.



Auflösung. Halbire zwei Seiten ab und ac des gegebenen Dreiecks abc, und errichte Normalen auf den Seiten in diesen Halbirungspunkten: so schneiden sich Diese in g entweder innerhalb des Dreiecks, oder in der dritten Seite desselben, oder außerhalb des Dreiecks. Aus g beschreibe mit ga den verlangten Kreis.

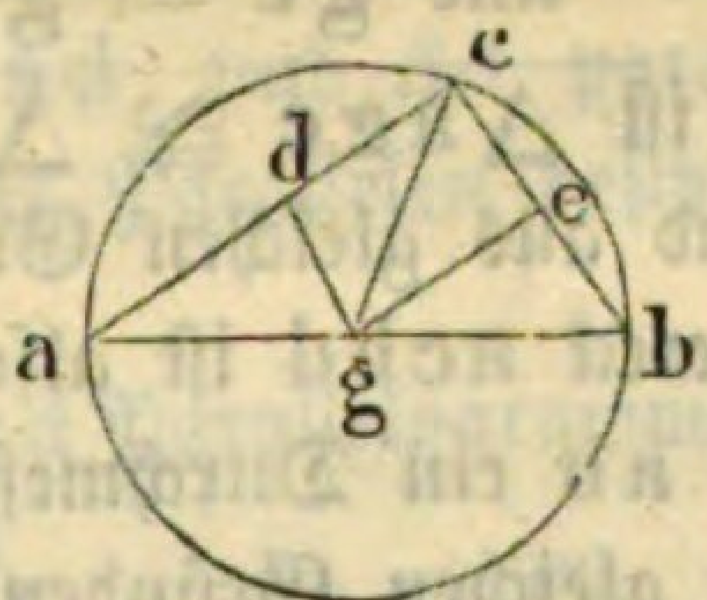
Beweis. Erster Fall. g liegt innerhalb des Dreiecks. Ziehe ga, gb, gc, so ist

$$ad = cd \quad (p.\ c.)$$
$$\llcorner adg = \llcorner cdg = R$$
$$dg = dg$$

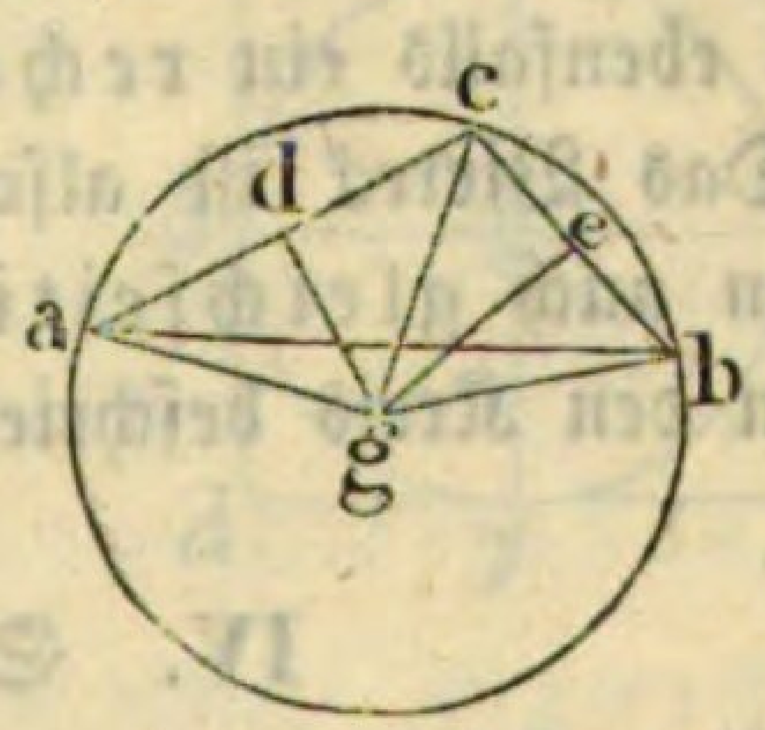
daher $\Delta adg \cong \Delta cdg$, also $ga = gc$

Da nun aus gleichen Gründen $gb = gc$

so ist $ga = gb = gc$; und der aus g mit ga beschriebene Kreis geht auch durch die Punkte b und c, und ist also um das Dreieck beschrieben.



Zweiter Fall. g liegt in der dritten Seite ab; ziehe gc; so folgt, wie bei dem ersten Falle $ga = gb = gc$, und daß daher g der Mittelpunkt des um Δabc beschriebenen Kreises ist.



Dritter Fall. g liegt außerhalb des Dreiecks. Ziehe ga, gb, gc, so ist wieder

$$da = dc \quad (p.\ c.)$$
$$\llcorner adg = \llcorner cdg = R$$
$$dg = dg$$

Also $\Delta adg \cong \Delta cdg$, und daher $ga = gc$

und aus gleichen Gründen $gb = gc$

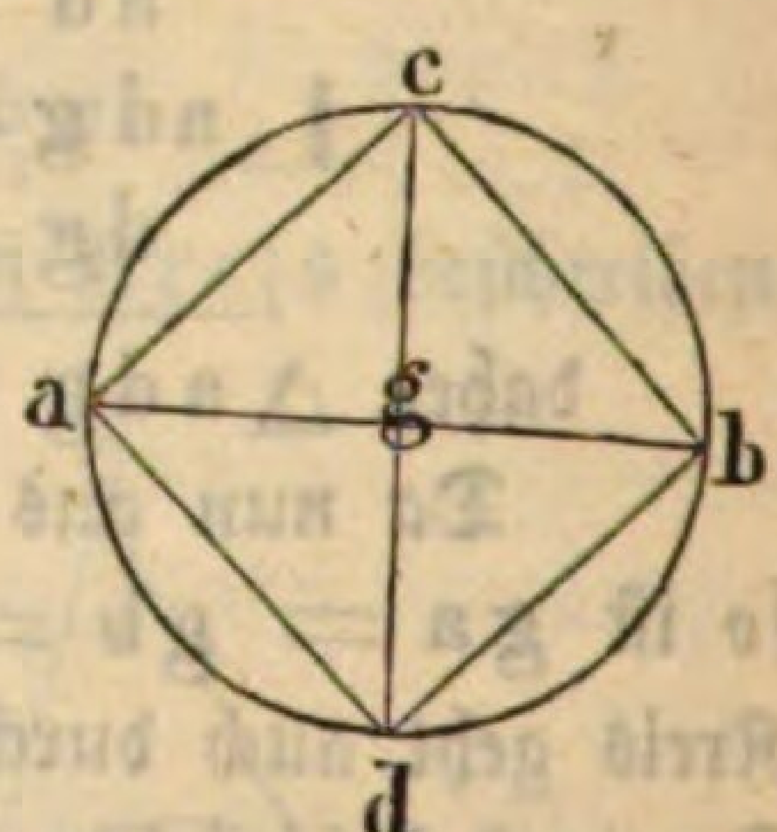
also $ga = gb = gc$

und es ist daher in diesem Falle wieder g der Mittelpunkt des um Δabc beschriebenen Kreises.

Zusatz. Es geht hieraus hervor, „daß in dem ersten Falle ∟ acb ein Winkel des größern Abschnittes, und daher spitz ist“; in dem zweiten Falle ist derselbe ein Winkel des Halbkreises, also ein rechter; und in dem dritten Falle ist er ein Winkel des kleineren Abschnittes, und daher stumpf (III. 31.). Ist demnach in dem Dreieck abc der größte Winkel acb spitz, so schneiden die Normalen sich innerhalb des Triangels; sie schneiden sich in der gegenüber liegenden Seite ab, wenn der Winkel acb ein rechter ist; und ist ∟ acb stumpf, so schneiden die Normalen sich außerhalb des Dreiecks.

IV. Satz 6. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis soll man ein Quadrat beschreiben.



Auflösung. Man ziehe die beiden Durchmesser ab und cd normal zu einander, und ziehe die Linien ac, cb, bd, da: so ist die vierseitige Figur acbd das verlangte Quadrat.

Beweis. Da ag = gb (I. 15. C.)
∟ agc = ∟ bgc (p. c.)
und gc = gc

so ist Δ agc ≌ Δ bgc, und daher ac = cb
und aus gleichen Gründen ist ac = ad = db.

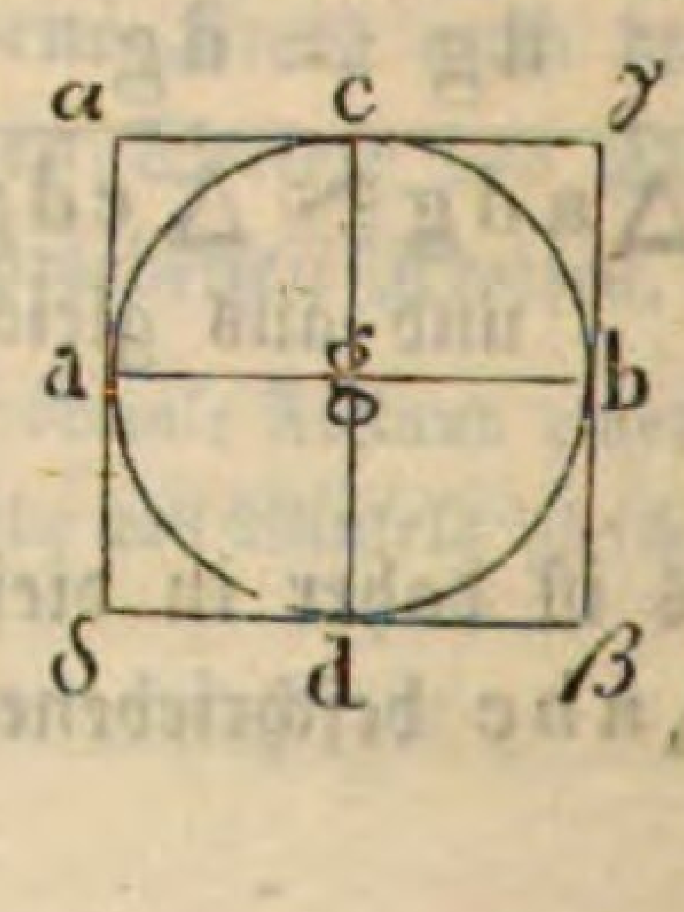
Das Viereck acbd ist also gleichseitig.

Da ab ein Durchmesser ist, so ist ∟ acb = R (III. 31.), und aus gleichen Gründen ist auch jeder der Winkel cbd, bda, dac, ebenfalls ein rechter.

Das Viereck ist also rechtwinklig; und weil es nach dem Obigen auch gleichseitig ist, so ist es ein Quadrat (I. 30. C.) und in den Kreis beschrieben (3. C.).

IV. Satz 7. Aufgabe.

Man soll um einen gegebenen Kreis ein Quadrat beschreiben.



Auflösung. Ziehe die beiden Durchmesser ab und cd normal auf einander; und durch die Endpunkte a, c, b und d derselben die Tangenten $\delta\alpha$, $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\beta\delta$: so ist $\alpha\gamma\beta\delta$ das verlangte Quadrat.

Beweis. Da bei c und d rechte

Winkel sind (III. 18.), und auch bei g (p. c.): so ist $\alpha\gamma$ und auch $\delta\beta$ parallel ab, und aus gleichen Gründen ist $\alpha\delta$ und auch $\gamma\beta$ parallel cd; daher sind αb, bδ und auch $\alpha\beta$ Parallelogramme, und ebenso αd, dγ ebenfalls Parallelogramme.

Folglich ist $\alpha\gamma = \delta\beta =$ ab (I. 34.)
und $\alpha\delta = \gamma\beta =$ cd „
Da nun ab $=$ cd
so ist $\alpha\gamma = \delta\beta = \alpha\delta = \gamma\beta$

Das Viereck $\alpha\gamma\beta\delta$ ist also gleichseitig.

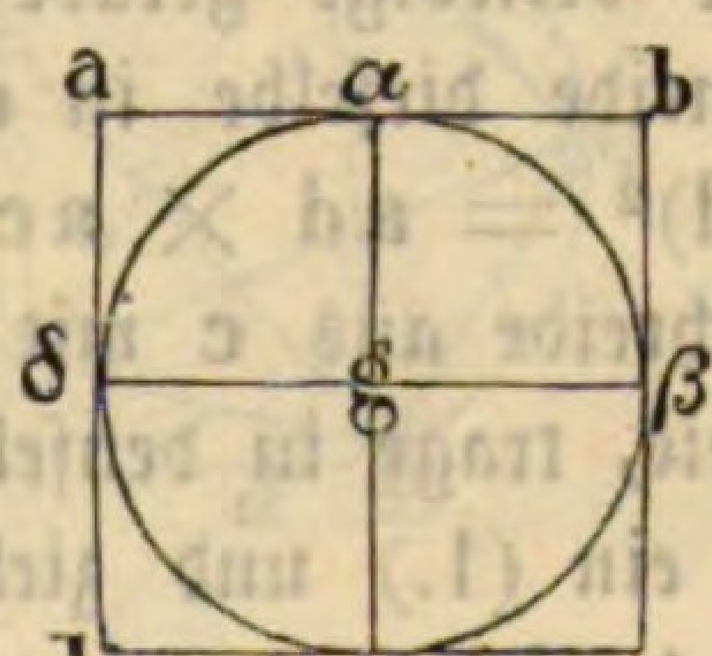
Nun ist $\angle\, \alpha = \angle$ b (I. 34.) und $\angle$ b $=$ R (III 18.); es ist also auch $\angle\, \alpha =$ R
und aus gleichen Gründen sind $\angle\, \gamma$, $\angle\, \beta$ und $\angle\, \delta$ ebenfalls rechte Winkel; folglich ist $\alpha\gamma\beta\delta$ rechtwinklig. Da es nun auch gleichseitig ist, so ist dieses Viereck ein Quadrat, und um den Kreis beschrieben (4. E.).

IV. Satz 8. Aufgabe.

In ein gegebenes Quadrat abcd einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Halbire die beiden Seiten ab, bc in α und β; ziehe durch diese Punkte $\alpha\gamma$ parallel ad, und $\beta\delta$ parallel cd; und aus dem Durchschnittspunkte g dieser Parallelen beschreibe mit gα den verlangten Kreis.

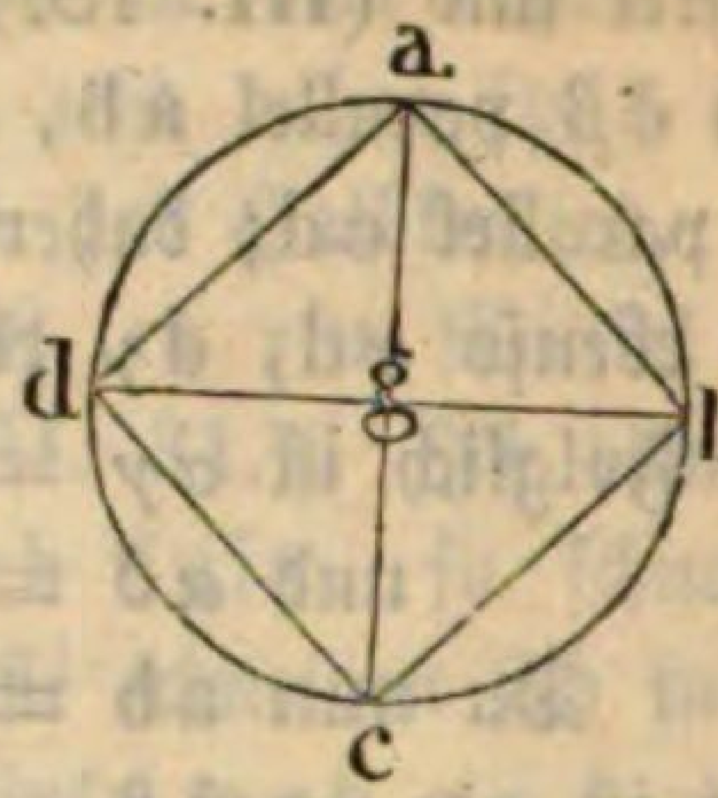
Beweis. Es sind ag, gb, cg, gd Parallelogramme (p. c.), daher die gegenüber liegenden Seiten gleich groß. Da aber ab $=$ bc (p. h.)



αb $= \frac{1}{2}$ab und b$\beta = \frac{1}{2}$bc
so ist αb $=$ bβ, und daher auch gβ $=$ gα; und aus gleichen Gründen ist gγ $=$ gβ und gδ $=$ gγ, also gα $=$ gβ $=$ gγ $=$ gδ. Der aus g mit gα beschriebene Kreis geht also durch die Punkte α, β, γ und δ, bei welchen rechte Winkel sind; folglich berührt der Kreis die Seiten ab, bc, cd, da in diesen Punkten, und ist daher in abcd beschrieben (5. E.)

IV. Satz 9. Aufgabe.

Um ein gegebenes Quadrat abcd einen Kreis zu beschreiben.



Auflösung. Ziehe die beiden Diagonalen ac, bd, und beschreibe aus dem Durchschnittspunkte g derselben mit ga den verlangten Kreis.

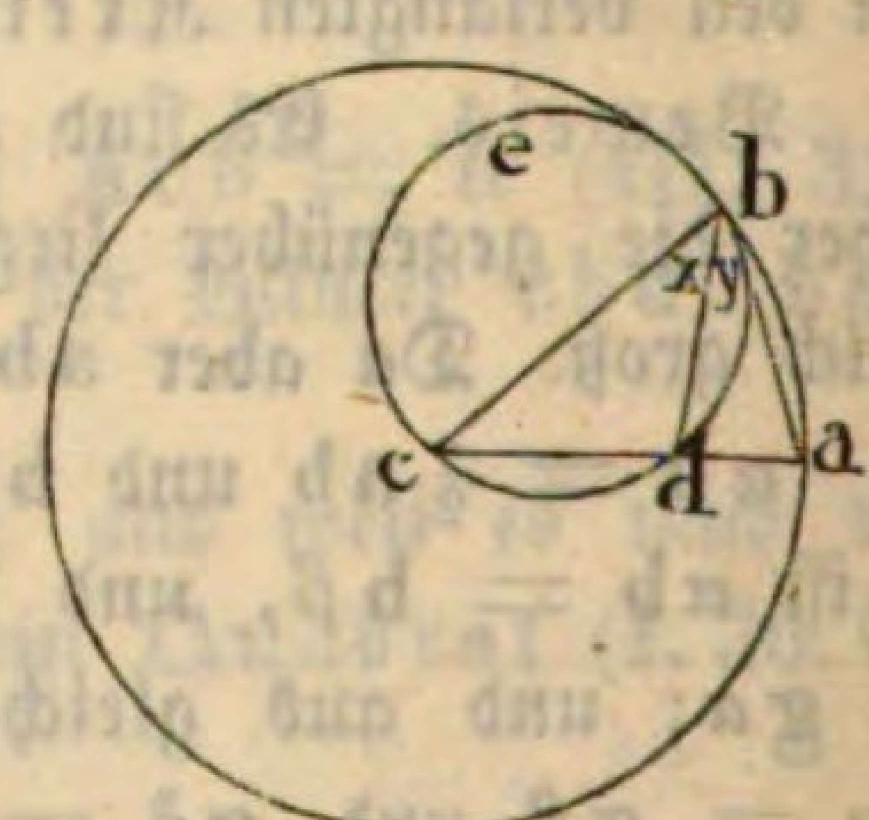
Beweis. Da da = ba
dc = bc
und ac = ac

so ist Δ adc $\cong$ Δ abc
also $\llcorner$ cad = $\llcorner$ cab = $\frac{1}{2}$R
Und aus gleichen Gründen ist auch $\llcorner$ bda = $\llcorner$ bdc = $\frac{1}{2}$R
und daher $\llcorner$ cad = $\llcorner$ bda
Folglich ist gd = ga. (I. 6.)

Ebenso wird auch bewiesen, daß gd = gc und gc = gb, folglich ist ga = gd = gc = gb.
Der aus g mit ga beschriebene Kreis geht also durch die Punkte a, d, c, b, und ist daher um abcd beschrieben (4. E.).

IV. Satz. 10. Aufgabe.

Man soll ein gleichschenkliges Dreieck beschreiben, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie zwei Mal so groß, als der der Grundlinie gegenüber liegende Winkel ist.



Auflösung. Man nehme eine beliebige gerade Linie ca; schneide dieselbe in d so, daß $(cd)^2 = ad \times ac$ (II. 11.); beschreibe aus c mit ca einen Kreis, trage in denselben ab = cd ein (1.) und ziehe cb: so ist Δ abc das verlangte Dreieck.

Beweis. Ziehe bd, und beschreibe um Δ cbd den Kreis bdce (5.)

Da $(cd)^2 = ad \times ac$ (p. c.)
und ab = cb

so ist auch $(ab)^2 = ad \times ac$
und folglich ist ab eine Tangente des Kreises bdce (III. 37.)
Und hiernach ist

$\angle y = \angle c$ (III. 32.)
hierzu $\angle x = \angle x$

giebt $\angle (y + x) = \angle c + \angle x$
Da aber $\angle c + \angle x = \angle bda$ (I. 32.)

so ist auch $\angle (y + x) = \angle bda$
Aber $\angle (y + x) = \angle cba = \angle a$ (I. 5.)

daher auch $\angle bda = \angle a$
und folglich ist $ba = bd$ (I. 6.)
Da nun $ba = cd$ (p. c.)

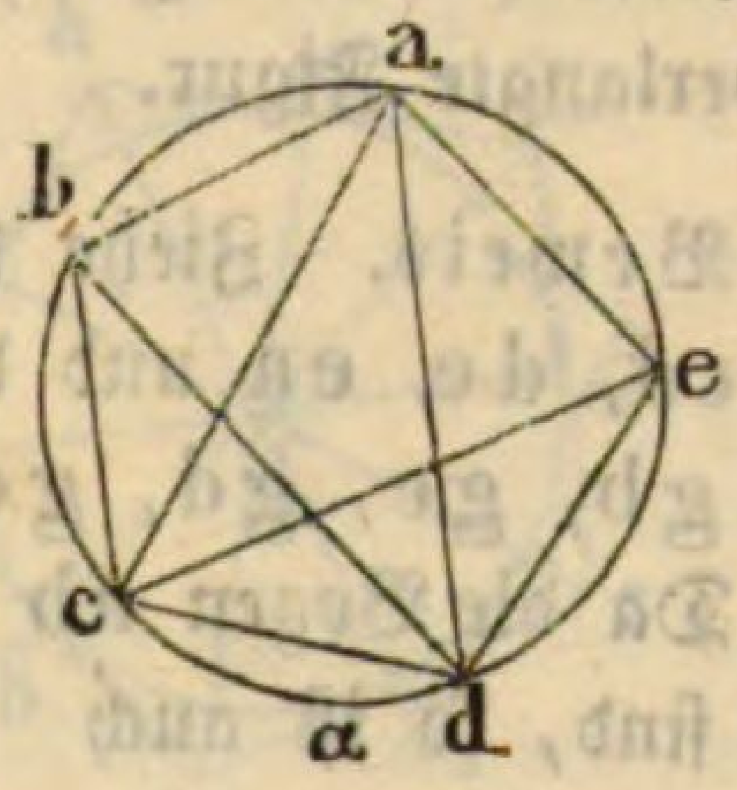
so ist $bd = cd$ (I. 6.)
folglich $\angle c = \angle x$ (I. 5.)
Es war aber auch $\angle c = \angle y$

also $2 . \angle c = \angle (x + y)$
nämlich es ist $2 . \angle c = \angle abc = \angle bac$.

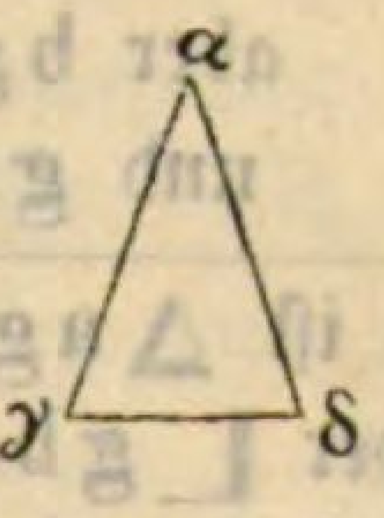
IV. Satz 11. Aufgabe.

In einen gegebenen **Kreis** soll man eine gleichseitige und gleichwinklige **fünfseitige Figur** beschreiben.

Auflösung. Beschreibe ein gleichschenkliges Dreieck $\alpha\gamma\delta$, in welchem jeder der beiden Winkel γ und δ an der Grundlinie zweimal so groß, als der derselben gegenüber liegende Winkel α ist (10.). In den gegebenen Kreis beschreibe ein Dreieck acd, welches mit dem $\Delta\alpha\gamma\delta$ gleiche Winkel hat (2.); so daß



$\angle acd = \angle \gamma$ und $\angle adc = \angle \delta$; halbire die Winkel acd und adc durch ce und db; und ziehe die Linien ab, bc, de, ea: so ist abcde die verlangte fünfseitige Figur.



Beweis. Vermöge der Construction ist

$$\angle cad = \angle ecd = \angle ace = \angle bda = \angle cdb.$$

Daher sind auch die Kreisbogen, auf welchen diese Winkel stehen, einander gleich (III. 26.), und es ist also

Bogen $cd = de = ea = ab = bc$;

und es sind also auch die zu diesen Bogen gehörigen Sehnen gleich groß (III. 29.).

Folglich ist **abcde** gleichseitig.

Da nach dem obigen Bogen **ab** = Bogen **de**
und „ **bcd** = „ **bcd**

so ist auch Bogen **abcd** = Bogen **bcde**
und daher ist $\angle$ **aed** = $\angle$ **bae**. (III. 27.)

Da nun aus gleichen Gründen auch seyn muß

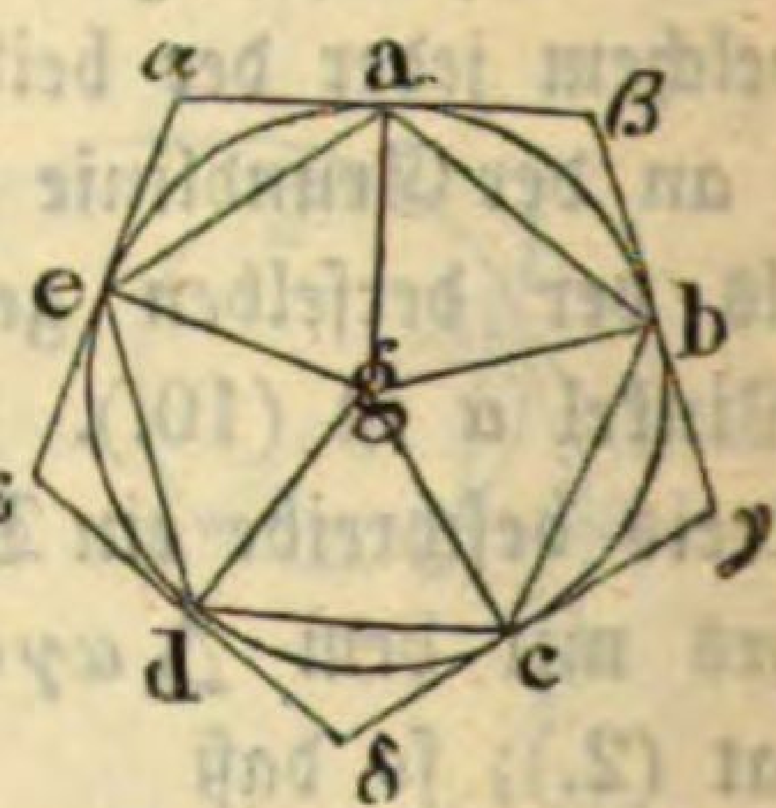
$\angle$ **cba** = $\angle$ **dcb** = $\angle$ **edc** = $\angle$ **aed**

so ist **abcde** auch gleichwinklig, und sie ist in den Kreis beschrieben. (3. E.)

IV. Satz 12. Aufgabe.

Man soll um einen Kreis eine gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur beschreiben.

Auflösung. Sind **a**, **b**, **c**, **d**, **e** die Winkelspitzen einer gleichseitigen und gleichwinkligen fünfseitigen Figur, die in den Kreis beschrieben ist (11.), so daß hiernach die Bogen **ab**, **bc**, **cd**, **de**, **ea** gleich groß sind: so ziehe man durch diese Punkte die Tangenten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\alpha$ an den Kreis (III. 16. Zus.), so ist $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ die verlangte Figur.



Beweis. Ziehe die Linien **ab**, **bc**, **cd**, **de**, **ea** und die Halbmesser **ga**, **gb**, **gc**, **gd**, **ge**.

Da die Bogen **ab** und **bc** gleich groß sind, so ist auch

ab = **bc** (III. 29.)
aber **bg** = **bg**
und **ga** = **gc**

Folglich ist Δ **agb** $\cong$ Δ **cgb** (I. 8.)
und daher $\angle$ **gba** = $\angle$ **gbc** und $\angle$ **gab** = $\angle$ **gcb**

Nun ist $\angle$ **gb**β = $\angle$ **gb**γ = R $\angle$ **ga**β = $\angle$ **gc**γ = R (p. c.)

also ist $\angle$ **ab**β = $\angle$ **cb**γ und $\angle$ **ba**β = $\angle$ **bc**γ (G. 3.)

Und da auch **ab** = **bc**

so folgt Δ **a**β**b** $\cong$ Δ **c**γ**b**, und es ist daher

$\angle\beta$ = $\angle\gamma$ und **b**β = **b**γ.

Und aus gleichen Gründen ist

$\angle\gamma = \angle\delta$ und $c\gamma = c\delta$

$\angle\delta = \angle\varepsilon$ $d\delta = d\varepsilon$

$\angle\varepsilon = \angle\alpha$ $e\varepsilon = e\alpha$

$\angle\alpha = \angle\beta$ $a\alpha = a\beta$.

Die fünfseitige Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist also gleichwinklig, und jede Seite derselben wird in dem Punkte, in welchem sie den Kreis berührt, halbirt.

Wegen $ga = gb$ ist $\angle gba = \angle gab$ (I. 5.)

aber $\angle gb\beta = \angle ga\beta = R$

Folglich ist auch $\angle ab\beta = \angle ba\beta$ (G. 3.)

und es ist daher $a\beta = b\beta$ (I. 6.)

also ist auch $2(a\beta) = 2(b\beta)$.

Nach dem Obigen aber ist $2(a\beta) = \alpha\beta$ und $2(b\beta) = b\gamma$

folglich ist auch $\alpha\beta = \beta\gamma$

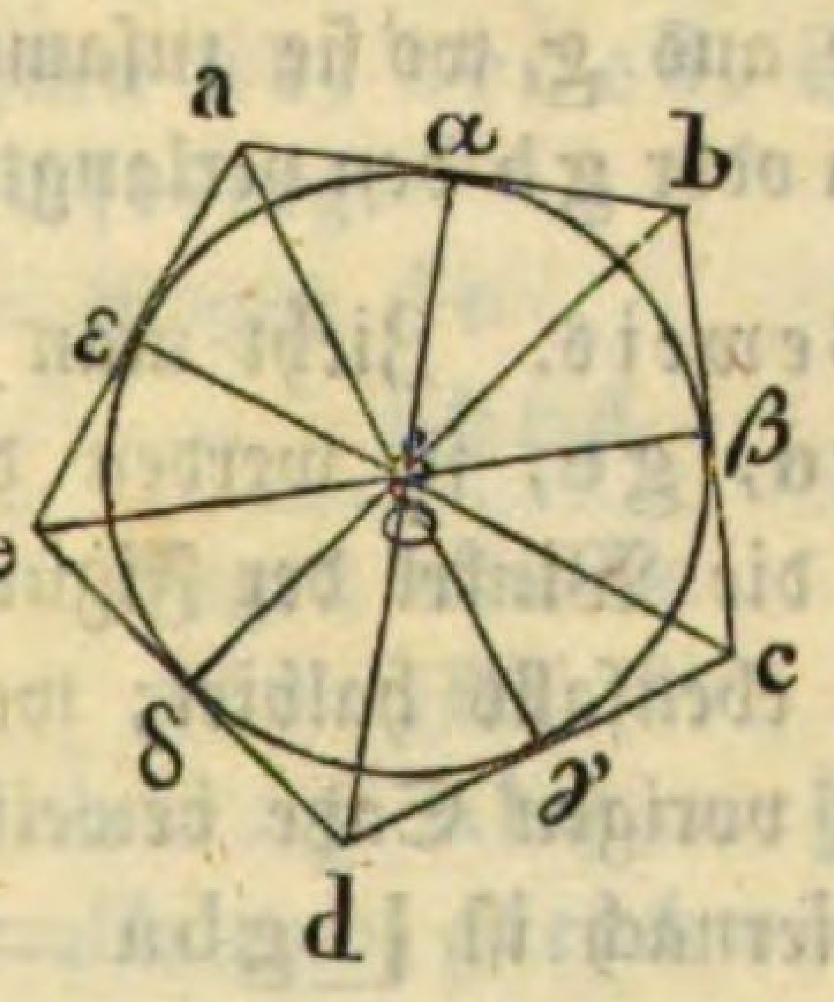
und aus gleichen Gründen $\beta\gamma = \gamma\delta = \delta\varepsilon = \varepsilon\alpha$.

Die um den Kreis beschriebene Figur $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist also gleichseitig, und also gleichseitig und gleichwinklig, wie verlangt wird.

IV. Satz 13. Aufgabe.

In eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur abcde soll ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung. Halbire zwei beliebige Winkel a und b der Figur mittelst der Linien ag und bg. Aus dem Punkte g, in welchem sie zusammentreffen, fälle die Normalen $g\alpha$, $g\beta$, $g\gamma$, $g\delta$, $g\varepsilon$ auf die Seiten der Figur, und beschreibe aus g mit einer dieser Normalen den verlangten Kreis.



Beweis. Man ziehe gc, gd und ge.

Da $\angle gab = \angle gae$ (p. c.)

$ab = ae$ (p. h.)

und $ag = ag$

so ist $\triangle gab \cong \triangle gae$: also $\angle gba = \angle gea$.

Nun ist $\angle abc = 2 . \angle gba$ (p. c.)

also ist auch $\angle abc = 2 . \angle gea$

aber $\angle abc = \angle aed$ (p. h.)

folglich $\angle aed = 2 . \angle gea$.

Der Winkel der Figur bei e ist also durch eg halbirt; und aus gleichen Gründen werden die Winkel bei d und bei c durch dg und cg ebenfalls halbirt.

Da $\angle ga\varepsilon = \angle ga\alpha$

$\angle a\varepsilon g = \angle a\alpha g = R$ (p. c.)

und $ag = ag$

so ist $\Delta ga\varepsilon \cong \Delta ga\alpha$, also $g\varepsilon = g\alpha$.

Und auf gleiche Weise folgt: daß auch $g\alpha = g\beta = g\gamma = g\delta$.

Die aus g auf die Seiten der Figur gefällten Normalen sind also gleich groß; und es geht daher der aus g mit einer dieser Normalen beschriebene Kreis durch die Punkte α, β, γ, δ, ε; und da bei diesen Punkten rechte Winkel sind, so wird der Kreis von den Seiten der Figur in diesen Punkten berührt, und derselbe ist daher in die Figur beschrieben (5. E.).

IV. Satz 14. Aufgabe.

Um eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur abcde soll ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung. Halbire zwei Winkel a und b der Figur mittelst der Linien ag, bg; und beschreibe aus g, wo sie zusammentreffen, mit ga oder gb den verlangten Kreis.



Beweis. Zieht man die Linien gc, gd, ge, so werden durch diese Linien die Winkel der Figur bei c, d und e, ebenfalls halbirt; was sich wie in dem vorigen Satze beweisen läßt.

Hiernach ist $\angle gba = \angle gab$

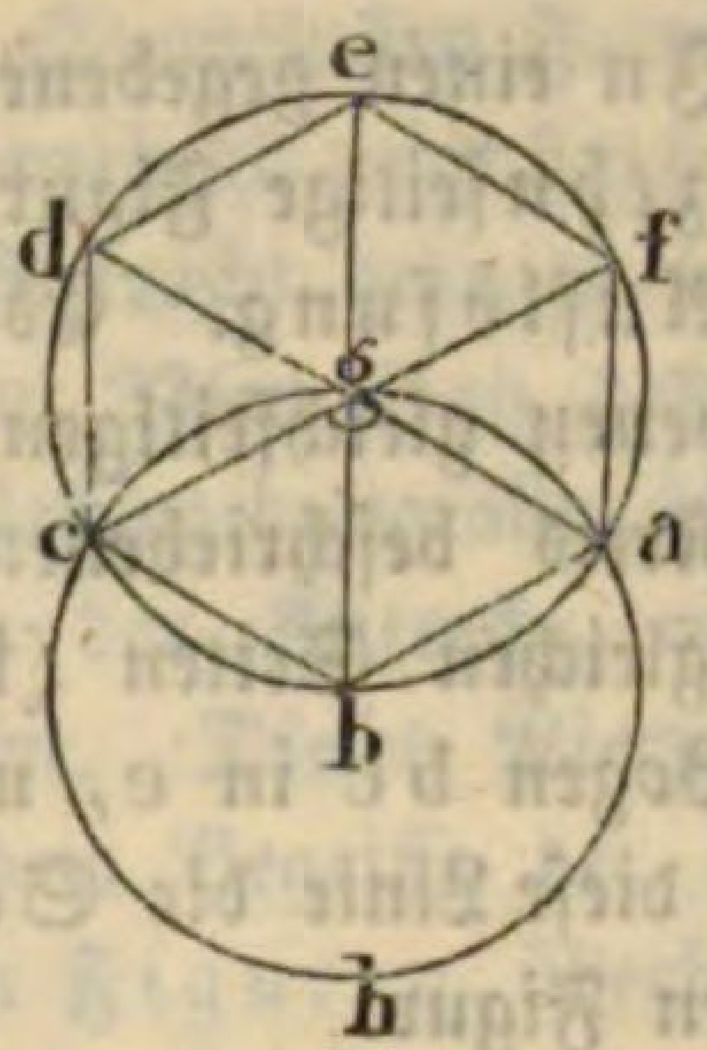
und folglich $ga = gb$

und aus gleichen Gründen ist $gb = gc = gd = ge$.

Der aus g mit ga beschriebene Kreis geht also durch die Punkte a, b, c, d, e; und ist daher um die Figur beschrieben.

IV. Satz 15. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis soll man eine gleichseitige und gleichwinklige sechsseitige Figur beschreiben.



Auflösung. Ziehe durch den Mittelpunkt g den Durchmesser eb; aus b beschreibe mit bg den Kreis agch; aus a und c ziehe durch den Mittelpunkt g die Durchmesser ad, cf; und ziehe ab, bc, cd, de, ef, fa: so ist abcdef die verlangte Figur.

Beweis. Da in dem Kreise bfd
$$ga = gb$$
und in dem Kreise agch, $bg = ba$

so ist Δabg gleichseitig

und daher auch gleichwinklig; und es ist daher

$$\angle agb = \tfrac{1}{3} \cdot 2R = \tfrac{2}{3}R.$$ Und eben so ist
$$\angle bgc = \tfrac{1}{3} \cdot 2R = \tfrac{2}{3}R$$

daher $\angle agb + \angle bgc = \tfrac{4}{3}R$

aber $\angle agb + \angle bgc + \angle cgd = 2R$ (I. 13.)

Folglich ist auch $cgd = \tfrac{2}{3}R$.

Da sonach die drei Winkel agb, bgc, cgd gleich groß sind: so sind auch ihre Scheitelwinkel dge, egf, fga ebenfalls gleich groß. Folglich sind die sechs um g herumliegenden Winkel gleich groß, und daher auch die Bogen, auf welchen sie stehen (III. 26.), und die zu diesen Bogen gehörigen Sehnen ab, bc, cd, de, ef, fa. Die Figur abcdef ist also gleichseitig.

Da, nach dem Obigen, Bogen fa = Bogen de
und „ abcd = „ abcd

so ist auch Bogen fabcd = Bogen abcde
und daher $\angle fed = \angle afe$ (III. 27.)

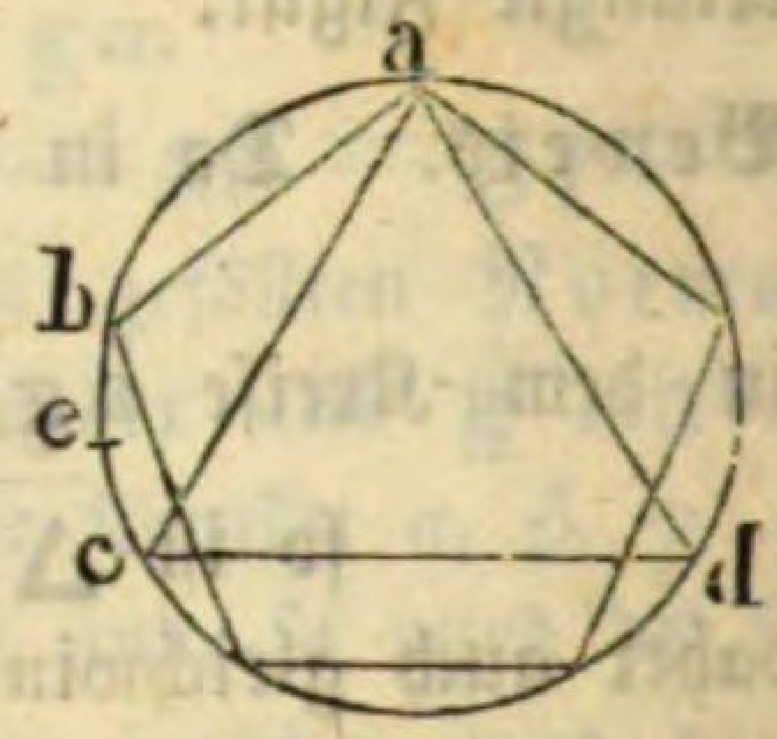
Und aus gleichen Gründen ist auch $\angle fab = \angle abc = \angle bcd = \angle cde = \angle def$. Die Figur ist also auch gleichwinklig, und sie ist in den Kreis beschrieben.

Zusatz. Hieraus folgt, „daß die Seite einer in den Kreis zu beschreibenden Figur mit sechs gleichen Seiten dem Halbmesser des Kreises gleich ist". Auch folgt aus Dem, was von der Figur mit fünf gleichen Seiten gelehrt worden: daß, wenn man durch die Punkte a, b, c, d, e, f, Tangenten an den Kreis zieht, hierdurch eine sechsseitige Figur mit gleichen Seiten um den Kreis beschrieben wird. Ferner folgt auch: wie in und um eine Figur mit sechs gleichen Seiten und gleichen Winkeln ein Kreis beschrieben werden kann.

IV. Satz 16. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis eine gleichseitige und gleichwinklige fünfzehnseitige Figur zu beschreiben.

Auflösung. Es sey ac die Seite eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks (2.), und ab die Seite einer in den Kreis beschriebenen Figur von fünf gleichen Seiten (11.) Halbire den Bogen bc in e, und ziehe be: so ist diese Linie die Seite der verlangten Figur.



Beweis. Wird des Kreises Umfang in 15 gleiche Theile getheilt, so hält der Bogen abc, welcher der dritte Theil des Umfangs ist, fünf, und der Bogen ab, als der fünfte Theil des Umfanges, drei von den 15 gleichen Theilen des ganzen Umfanges, und der Bogen bc hält daher zwei solche Theile. Da bc in e halbirt ist, ist be ein Funfzehntel; und es läßt sich daher die Seite be funfzehn Mal an einander in den Kreis eintragen, wodurch eine gleichseitige und gleichwinklige Figur von 15 Seiten in den Kreis beschrieben wird.

Zusatz. Aus Dem, was von der „Figur mit fünf gleichen Seiten" gelehrt worden, ergiebt sich: daß mittelst der Tangenten durch die 15 Theilpunkte des Umkreises eine Figur mit 15 gleichen Seiten und Winkeln um den Kreis beschrieben werden kann; und daß auch in und um eine gegebene Figur mit funfzehn gleichen Seiten und Winkeln ein Kreis sich beschreiben läßt.

Beilagen zu dem vierten Buche.

XIX. Das Wesen des vierten Buches der Elemente.

Nachdem in dem dritten Buche „das Verhalten der Punkte, Linien und Winkel zu dem Kreise" angegeben ist, bleibt jetzt noch übrig, zu untersuchen, „wie geschlossene geradlinige Figuren überhaupt zu dem Kreise sich verhalten"; und diese Untersuchung bildet den Gegenstand des 4ten Buches. Es ist einleuchtend: daß diese

Untersuchung mit dem Dreieck, als der einfachsten Figur, beginnen muß, für welches die Sätze zugleich in der allgemeinsten Form aufgestellt werden können. Zu dem Viereck übergehend zeigt sich sogleich „daß nur besondere Gattungen desselben in Betracht gezogen werden können", wie Dieses auch bereits durch den 22ten Satz des 3ten Buches bekannt ist; und es wird daher mit Uebergehung aller übrigen Formen, nur das Verhalten des einfachsten der Vierecke, nämlich des Quadrates zu dem Kreise, näher bestimmt. Dieses Viereck, als eines gleichseitig rechtwinkligen, führt zu dem Begriffe der gleichseitig gleichwinkligen, also der regulären Figuren überhaupt; und es wird hierdurch die Untersuchung auf die allgemeine Frage zurückgeführt: welches ist das Verhalten regulärer Figuren zu dem Kreise? Obgleich nun hierbei zunächst nur das reguläre Fünfeck in Betracht gezogen wird: so erhält die Erörterung desselben doch eine so allgemeine Form, daß die Zahl der Seiten, von welchen die Figur eingeschlossen wird, nur als untergeordnet erscheint, und das Resultat, so weit eine geometrische Ausführung überhaupt möglich ist, auf alle regulairen Figuren ohne Ausnahme sich anwenden läßt. Nachdem hierauf noch zwei einzelne Aufgaben von dem regulairen Sechseck und Funfzehneck gelöſ't sind, ist hierdurch die Untersuchung „über die Abhängigkeit der regulairen Figuren von dem Kreise, und über die Construction derselben" vollständig erledigt.

Das vierte Buch überhaupt besteht nur aus 16 Sätzen, die sämmtlich Aufgaben sind; und es lehrt

die erste, als Einleitung, das Eintragen einer gegebenen geraden Linie als Sehne in den Kreis.

Die vier folgenden Aufgaben 2. bis 5. betreffen die Construction des Dreiecks in dem Kreise, und umgekehrt.

Die hierauf folgenden vier Aufgaben 6. bis 9. beziehen sich bloß auf das Verhalten des Quadrates zu dem Kreise.

Nachdem nun in den fünf Aufgaben 10. bis 14. „die Eigenthümlichkeit des regulairen Fünfecks, und die Abhängigkeit aller regulairen Figuren überhaupt von dem Kreise" erörtert sind, wird noch

in der 15ten Aufgabe die Construction des regulairen Sechsecks, und in der 16ten die des regulairen Fünfzehnecks gelehrt.

„Daß aber hierdurch nun wirklich die Lehre von den Grundeigenschaften der regulairen Figuren überhaupt vollständig erschöpft ist", ergiebt sich aus der folgenden Untersuchung über den Charakter der einzelnen Aufgaben des 4ten Buches.

1. Von dem Dreieck und dem Kreise.

Ist ein Kreis gegeben, so läßt sich sowohl in als um denselben immer ein Dreieck von einer bestimmten Form beschreiben. Der Größe nach kann das Dreieck natürlich nicht gegeben seyn, das in den gegebenen Kreis eingetragen, oder um denselben beschrieben werden soll. Die Aufgaben erhalten die allgemeinste Form bereits dadurch, daß es heißt, „man soll in oder um einen Kreis ein Dreieck beschreiben, das mit einem gegebenen Dreieck die Winkel gleich hat"; und unter dieser Form werden diese beiden Aufgaben in den Sätzen 2. und 3. gelös't.

Ist umgekehrt das Dreieck gegeben, so kann man sowohl in als um dasselbe immmer einen Kreis ziehen, von welchem in dem ersten Falle die Seiten des Dreiecks Tangenten und in dem zweiten Sehnen sind; und diese Aufgaben werden in den Sätzen 4. und 5. gelös't.

Soll der Kreis in das Dreieck hineingezeichnet werden, so muß, da der ganze Kreis in dem Dreieck liegt, auch der Mittelpunkt desselben innerhalb des Dreiecks liegen; und es läßt sich daher in diesem Falle über die Lage des Mittelpunktes Nichts weiter angeben. Wenn aber ein Kreis um ein Dreieck beschrieben wird, so hängt die Lage des Mittelpunktes von der besonderen Form des Dreiecks ab; und es ergiebt sich bei der näheren Betrachtung, „daß der Mittelpunkt des um ein Dreieck beschriebenen Kreises innerhalb dieses Dreiecks liegen muß, wenn das Dreieck ein spitzwinkliges ist; der Mittelpunkt liegt in der einen Seite des Dreiecks, wenn dasselbe einen rechten Winkel hat; und er liegt außerhalb des Dreiecks, wenn es stumpfwinklig ist. Um zugleich bei der Auflösung der Aufgabe „um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben" auf die verschiedene Lage, die der Mittelpunkt haben kann, aufmerksam zu machen, werden bei dieser Auflösung in Satz 5. drei verschiedene Fälle unterschieden, die, wenn die Lage des Mittelpunktes unbeachtet bleibt, keinen Einfluß auf die Auflösung selbst haben; und es läßt sich dieselbe daher einfacher in der Art geben, wie bei Aufgabe 230. geschehen ist.

Von dem Quadrate und dem Kreise.

Die vier Aufgaben von dem Quadrate und dem Kreise lehren: wenn ein Kreis gegeben ist, „sowohl in als um diesen Kreis ein Quadrat zu beschreiben", Satz 6. und 7.: und wenn umgekehrt ein

Quadrat gegeben ist, „wie sich in und um dasselbe ein Kreis beschreiben läßt", Satz 8. und 9. Indem nun hierdurch vorläufig darauf aufmerksam gemacht wird, „daß die gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren überhaupt wohl in einer nähern Beziehung zu dem Kreise stehen mögen", ersieht man zugleich, daß es bei der näherern Erörterung dieser Frage darauf ankömmt, die vier Aufgaben zu lösen:

1) in einen Kreis und 2) um denselben eine gleichseitige und gleichwinklige Figur zu beschreiben;

3) in eine gleichseitige und gleichwinklige Figur, und 4) um Dieselbe einen Kreis zu verzeichnen.

Die Auflösungen dieser Aufgaben enthalten die noch übrigen Sätze des 4ten Buches.

Jede Figur, die gleichseitig und gleichwinklig ist, wird regulair genannt; die noch übrigen Sätze des 4ten Buches beschäftigen sich also „mit dem Verhalten der regulairen Figuren überhaupt zu dem Kreise".

Das regulaire Vieleck und der Kreis.

In dem 10ten Satze wird die Aufgabe gelös't, „ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, in welchem der Winkel an der Grundlinie zweimal so groß ist, als der dritte Winkel". Ist nun ein Kreis gegeben, und man beschreibt in denselben ein Dreieck, das mit einem nach Satz 10. construirten Dreiecke die Winkel gleich hat (2.), und werden die Winkel an der Grundlinie dieses Dreiecks halbirt: so schneiden die Halbirungslinien des Kreises Umfang so, daß durch diese Durchschnittspunkte und die drei Spitzen des Dreiecks, die ebenfalls in des Kreises Umfang liegen, fünf Punkte von der Lage erhalten werden, „daß, wenn man je zwei neben einander liegende durch eine gerade Linie verbindet, hierdurch ein regulaires Fünfeck in dem Kreise erhalten wird". Auf diese Weise wird in Satz 11. die Aufgabe gelös't: „in einen Kreis ein regulaires Fünfeck zu beschreiben".

Die bei der Auflösung dieser Aufgabe angegebene Construction führt zunächst bloß zu dem Resultate, „daß, durch die in des Kreises Umfang gefundenen fünf Punkte, der ganze Umfang in fünf gleiche Theile getheilt wird"; und bei dem Beweise wird nun gezeigt, „daß in Folge dessen die hierdurch bestimmte Figur regulair ist, ohne daß hierbei die Zahl der gleichen Theile, in welche der Umfang

getheilt ist, irgend einen Einfluß hat". Die Auflösung der besonderen Aufgabe von dem Fünfeck führt daher zugleich zu dem ganz allgemeinen Resultate:

Wird des Kreises Umfang in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt, und man verbindet je zwei neben einander liegende Punkte durch eine gerade Linie: so erhält man hierdurch eine regulaire Figur von eben so viel Seiten, in so viel Theile des Kreises Umfang getheilt ist.



Der Beweis dieses allgemeinen Lehrsatzes ist durchaus nicht verschieden von dem Beweise des 11ten Satzes, durch welchen die Construction des regulairen Fünfecks gelehrt wird. Denn ist des Kreises Umfang **abcdn** in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt, und sind **ab**, **bc**, **cd** einige dieser Theile so, daß also diese Bogen gleich groß sind: so müssen, weil zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören (**III.** 29.), auch die geraden Linien **ab**, **bc**, **cd**, welche die Endpunkte dieser Bogen verbinden, gleich groß seyn. Daher ist die Figur, welche durch die Verbindung aller Theilpunkte, eines jeden mit dem nächstfolgenden, erhalten wird, gleichseitig.

Da ferner der Bogen **cd** = Bogen **ab** (p. h.)
„ **and** = „ **and**

so folgt: daß auch Bogen **andc** = Bogen **dnab**
und da auf gleichen Bogen gleiche Peripheriewinkel stehen, so ist hiernach $\angle$ **b** = $\angle$ **c**.

Und hieraus folgt: daß auch je zwei nebeneinander liegende Winkel der erhaltenen Figur gleich groß sind. Die Figur ist also auch gleichwinklig. Sie ist daher gleichseitig und gleichwinklig, und folglich regulair.

Soll man also in einen gegebenen Kreis ein regulaires Vieleck beschreiben: so kömmt es bloß darauf an, „des Kreises Umfang in eben so viel gleiche Theile zu theilen, so viel Seiten das Vieleck haben soll".

Die folgende Aufgabe Satz 12., lehrt „ein regulaires Fünfeck um einen gegebenen Kreis zu beschreiben". Die Construction besteht darin: daß des Kreises Umfang in fünf gleiche Theile getheilt

wird, und daß man hierauf Tangenten durch die Theilpunkte an den Kreis zieht. Auch hier wird bei dem Beweise durchaus nicht darauf Rücksicht genommen, „daß der Umfang gerade in fünf gleiche Theile getheilt sey“; sondern es ist hier bloß Voraussetzung, „daß man den Umfang überhaupt in gleiche Theile getheilt habe“. Diese Aufgabe führt daher zu dem allgemeinen Resultate:

Wird eines Kreises Umfang in gleiche Theile getheit, und man zieht durch die Theilpunkte Tangenten an den Kreis, so erhält man hierdurch ein regulaires Vieleck um den Kreis.

Ist des Kreises Umfang abcdn in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt, und sind ab, bc, cd einige dieser Theile: so folgt, „daß auch die zu gleichen Bogen gehörigen geraden Linien ab, bc, cd gleich groß sind (III. 29.)“;
und zugleich folgt

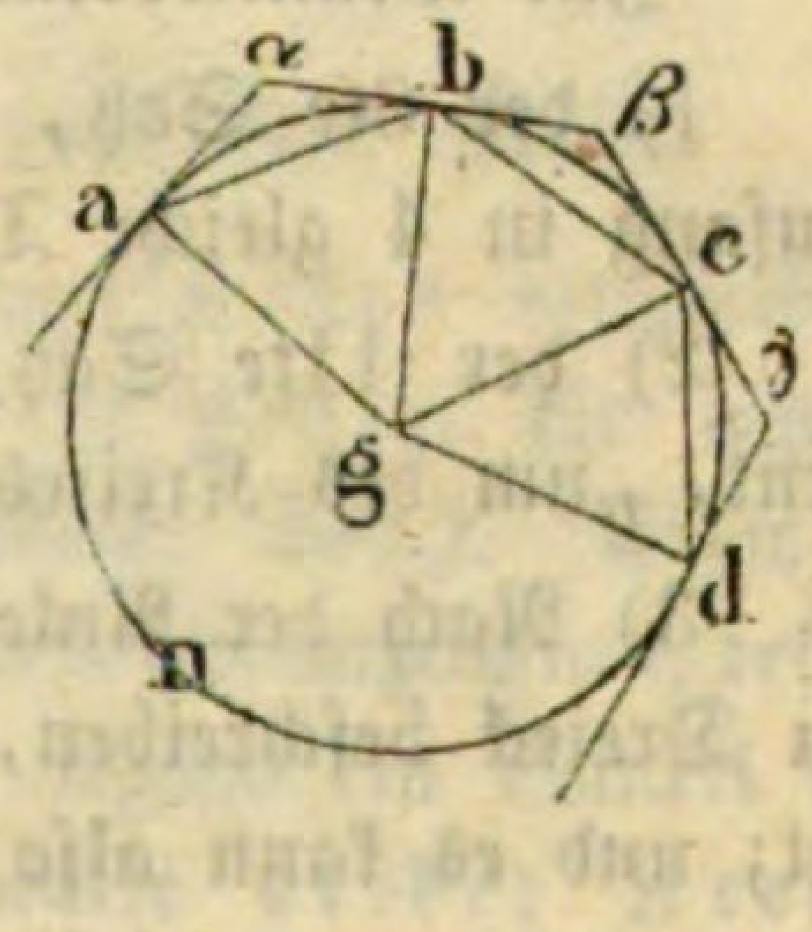
$$\angle agb = \angle bgc = \angle cgd \quad \text{(III. 26.)}$$

Da nun $\angle \alpha ab = \angle \alpha ba = \frac{1}{2} . \angle agb$ (I. 31. und 20.)

$$\angle \beta bc = \angle \beta cb = \frac{1}{2} . \angle bgc$$
$$\angle \gamma cd = \angle \gamma dc = \frac{1}{2} \angle cgd$$

so sind alle die Winkel gleich groß, welche die Linien ab, bc, cd mit den Tangenten der Punkte a, b, c, d bilden. Daher ist jedes der Dreiecke

$\Delta a\alpha b$, $\Delta b\beta c$, $c\gamma\delta$ gleichschenklig (I. 6.) und es decken sich diese Dreiecke (I. 26.)



Folglich ist $\angle \alpha = \angle \beta = \angle \gamma$;
die Figur um den Kreis ist also gleichwinklig. Und eben so folgt

$$a\alpha = \alpha b = b\beta = \beta c = c\gamma = \gamma d$$
$$\text{daher ist } \alpha\beta = 2 . b\beta$$
$$\text{und } \beta\gamma = 2 . c\beta$$

$$\text{und folglich } \alpha\beta = \beta\gamma.$$

Die Figur ist also auch gleichseitig, und folglich regulair.

Soll man also um einen gegebenen Kreis ein regulaires Vieleck beschreiben: so braucht man des Kreises Umfang nur in eben so viel gleiche Theile zu theilen, als Seiten das Vieleck haben soll, und durch die Theilpunkte Tangenten an den Kreis zu ziehen.

In den Sätzen 13. und 14. wird gezeigt: wie man in und um ein gegebenes regulaires Fünfeck einen Kreis beschreiben kann. Man braucht zu dieser Absicht nur zwei Winkel des Vielecks zu halbiren. Die Halbirungslinien schneiden sich in dem Mittelpunkte des Kreises; und es wird, wenn man von diesem Punkte eine Normale auf eine Seite fällt, diese Normale der Radius des Kreises, der in das Fünfeck hineingezeichnet werden kann. Verbindet man aber den Durchschnittspunkt der Halbirungslinien mit einer Ecke der Figur, so ist diese Verbindungslinie der Radius des Kreises, der um das Fünfeck sich beschreiben läßt.

Auch bei dieser Construction hat die Zahl der Seiten, welche das gegebene regulaire Vieleck hat, keinen Einfluß; und man lernt daher durch die in Satz 13. und 14. gegebene Auflösung das Verfahren kennen, „durch welches sich, wenn irgend ein regulaires Vieleck gegeben ist, sowohl in als um dasselbe ein Kreis beschreiben läßt".

Die Sätze 11., 12, 13. und 14. geben also die Abhängigkeit eines regulairen Vielecks von den dazu gehörigen Kreisen, und umgekehrt, an; und es bleibt, um diese Untersuchung zu ergänzen, nur noch die Frage zu beantworten: In wie viel gleiche Theile läßt sich des Kreises Umfang überhaupt geometrisch theilen? Diese Frage nun ist ebenfalls durch die vorhergehenden Sätze bereits zum Theil erledigt, und es wird das noch Fehlende durch die beiden Sätze 15. und 16. ergänzt.

Zur Beantwortung dieser Frage dient:

1) der 6te Satz, aus welchem sich ergiebt, „wie des Kreises Umfang in 4 gleiche Theile getheilt werden kann";

2) der 11te Satz, durch welchen man das Verfahren kennen lernt, „um des Kreises Umfang in 5 gleiche Theile zu theilen".

3) Nach der Anleitung in Satz 2. kann man in jeden Kreis ein Dreieck beschreiben, das mit einem gegebenen die Winkel gleich hat; und es kann also auch ein gleichseitiges Dreieck in den Kreis eingetragen, und dieser dadurch in 3 gleiche Theile getheilt werden. Durch den 15ten Satz lernt man ein einfacheres Verfahren kennen, um diese Theilung zu bewerkstelligen; denn indem hier gezeigt wird, „daß der Radius die Sehne eines Bogens ist, der den 6ten Theil des Kreisumfanges beträgt, und daß daher hierdurch der Umfang in sechs gleiche Theile getheilt werden kann": so hat man damit zu gleicher Zeit auch die Theilung in 3 gleiche Theile, die erhalten

wird, wenn man je zwei Bogen, von welchen jeder $\frac{1}{6}$ des Umfanges ist, zusammen nimmt.

4) Durch den 16ten Satz endlich lernt man auch die Theilung des Kreises in 15 gleiche Theile kennen.

5) Wird hiermit nun noch die Aufgabe des 30sten Satzes im 3ten Buche verbunden, welche die Anleitung enthält, „irgend einen Kreisbogen zu halbiren": so ist hierdurch vollständig bestimmt, „welche Theilungen des Kreises bis zu der neuesten Zeit als die allein geometrisch ausführbaren angesehen wurden".

Es kann nämlich des Kreises Umfang getheilt werden:

1) mit Hülfe der Sätze 6. und III. 30.
   in 4, 8, 16, 32 „ „ „ in 2^n gleiche Theile;
2) durch die Sätze 11. und III. 30.
   in 5, 10, 20, 40 „ „ „ $2^n . 5$ „
3) durch die Sätze 15. und III. 30.
   in 3, 6, 12, 24 „ „ „ $2^n . 3$ „
4) durch die Sätze 16. und III. 30.
   in 15, 30, 60, 120 „ „ „ $2^n . 3 . 5$

Anmerkung. In der neuesten Zeit hat man gefunden: daß noch einige andere Theilungen des Kreises geometrisch sich ausführen lassen, und daß namentlich des Kreises Umfang mit Hülfe der Sätze der Elementar-Geometrie auch in 17 gleiche Theile getheilt werden kann.

XX. Das Dreieck und die dazu gehörigen Kreise.

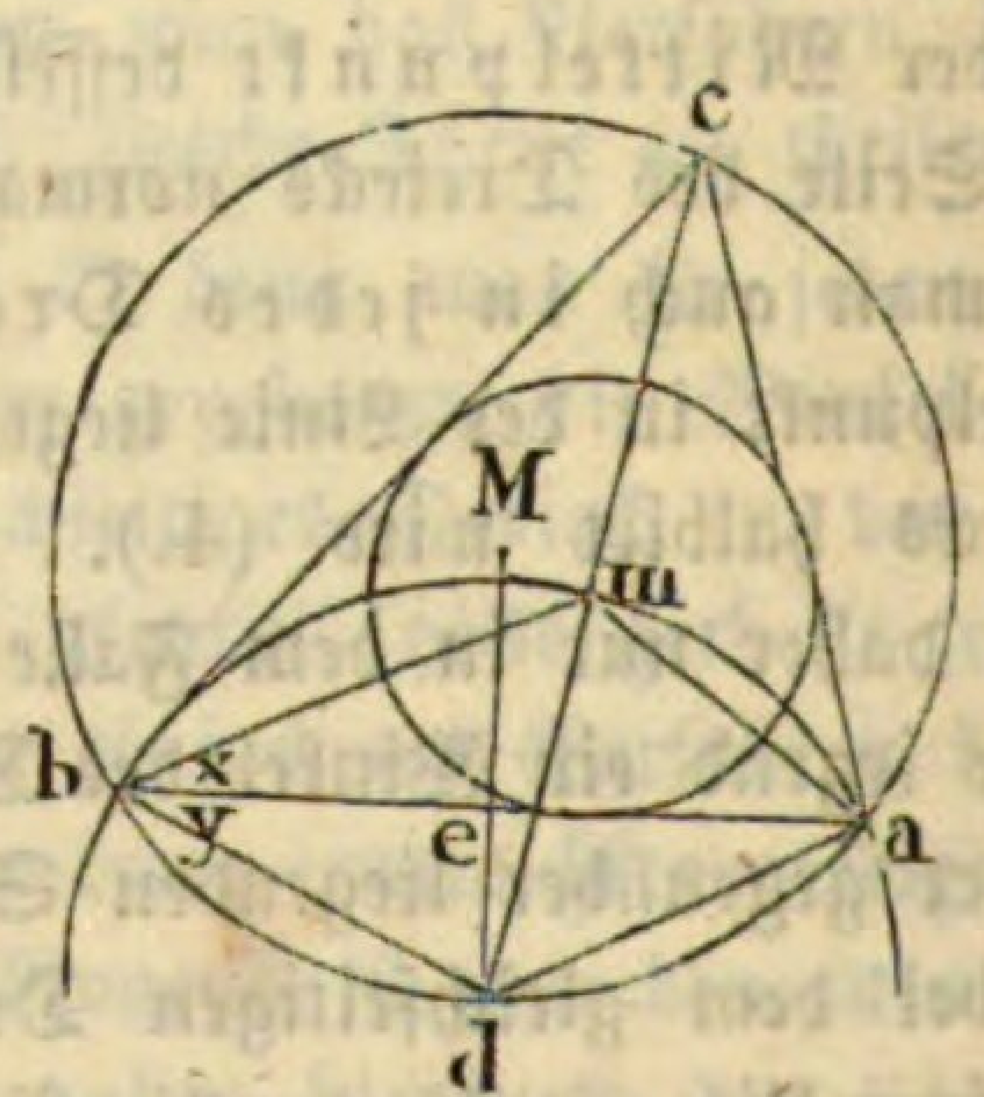
1) Man kann um jedes Dreieck einen Kreis beschreiben, und der Mittelpunkt desselben liegt in der Linie, die irgend eine Seite des Dreiecks normal halbirt (Aufg. 230.). Eben so kann man auch in jedes Dreieck einen Kreis hineinzeichnen, dessen Mittelpunkt in der Linie liegt, durch welche irgend ein Winkel des Dreiecks halbirt wird (4.). Die Mittelpunkte beider Kreise fallen daher nur in dem Falle zusammen: wenn die Linie, durch welche irgend ein Winkel des Dreiecks halbirt wird, zugleich normal auf der gegenüber liegenden Seite ist und dieselbe halbirt, was nur bei dem gleichseitigen Dreiecke statt findet. Ist das Dreieck gleichschenklig, so liegen die Mittelpunkte beider Kreise zwar in der Linie, welche von der Spitze normal auf die Grundlinie gefället werden kann, weil diese Linie zugleich den Winkel an der Spitze

und die Grundlinie halbirt: sie fallen aber nicht in Einem Punkte zusammen, da die Linie, welche einen Winkel an der Grundlinie halbirt, nicht normal auf dem gegenüber liegenden Schenkel ist.

2) Werden die Mittelpunkte der beiden zu einem Dreieck gehörigen Kreise durch eine gerade Linie verbunden: so soll diese Linie der Abstand der Mittelpunkte genannt, und der Kürze wegen mit **D** bezeichnet werden. Der Radius des Kreises, der um das Dreieck sich beschreiben läßt, werde mit R, und der Radius des Kreises, der in das Dreieck hineingezeichnet werden kann, mit r bezeichnet; wobei dadurch nicht wohl eine Zweideutigkeit entstehen kann, „daß man auch den rechten Winkel mit R bezeichnet"; da in jedem Falle aus den Umständen sich erkennen läßt, „welche Bedeutung R hat". Indessen soll zur Unterscheidung in der Folge der rechte Winkel durch ⌊ R oder R^0 angedeutet werden. Die Untersuchung, „wie die Linien R, r und **D** von einander abhängen" führt zu einem wichtigen Resultate; das aber dadurch auf eine einfache Weise sich ableiten läßt, daß zuvor ermittelt wird, „wie die beiden Radien R und r, und eine Seite des dazu gehörigen Dreiecks, von einander abhängen" und diese Abhängigkeit wird durch die Auflösung der folgenden Aufgabe gefunden:

3) Aufgabe. Von einem Dreieck kennt man Eine Seite **C**, und die Radien der beiden zu demselben gehörigen Kreise **R** und r; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Analysis. Da **R** gegeben ist, so kann, wenn man **M** als den Mittelpunkt annimmt, der Kreis acbd beschrieben werden, in welchem das zu construirende Dreieck abc liegt; und man kann nun die gegebene Seite ab = **C** als Sehne eintragen. Ist nun m der Mittelpunkt des Kreises, der in das Dreieck sich beschreiben läßt: so wird, wenn man von c durch m die Linie cmd zieht, der Winkel acb durch cd halbirt (4.), und es sind daher die Bogen ad und db gleich groß (III. 26.). Werden



ferner, von m aus, die Linien ma und mb gezogen, so halbiren

Diese die Winkel bac und abc des Dreiecks (4.). Man ziehe die Linien da und db.

Es ist $\angle bmd = \angle mcb + \angle mbc$ (I. 32.)
und da $\angle mcb = \angle dca$ und $\angle mbc = \angle x$

so ist $\angle bmd = \angle dca + \angle x$
Und weil $\angle dca = \angle y$ (III. 21.)

so ist auch $\angle bmd = \angle y + \angle x$
also $\angle bmd = \angle mbd$
Folglich ist $db = dm$ (I. 6.)
und aus gleichen Gründen ist auch
$da = dm$.
Es ist also $da = db = dm$;
der aus d mit $db = da$ beschriebene Kreis geht also durch den Punkt m; und es ist daher der Bogen amb dieses Kreises ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt des Kreises, der in das Dreieck hineingezeichnet werden kann, und es ist dieser Bogen gegeben. Da aber auch r gegeben ist, so ist auch die gerade Linie der Lage nach gegeben, die in einem Abstande = r der ab parallel gezogen werden kann; und es ist auch diese Linie ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt m, der daher der Lage nach gegeben ist.

Auflösung. Aus M beschreibe mit R einen Kreis, und trage $ab = C$ als Sehne ein. Den zu dieser Sehne gehörigen Bogen adb halbire in d; ziehe $da = db$; beschreibe mit da aus d einen Kreis, und in einem Abstande = r ziehe mit ab eine Parallele, welche den aus d beschriebenen Kreis in m schneidet. Zieht man nun von d durch m eine Linie, welche den mit R beschriebenen Kreis in c trifft, und zieht ca, cb: so ist abc das verlangte Dreieck.

Beweis. Da Δabc in dem Kreise adbc des gegebenen Radius R beschrieben, und $ab = C$ ist: so bleibt nur zu beweisen, „daß der Radius des Kreises, der in Δabc hineingezeichnet werden kann, = r seyn muß“.

Da Bogen db = Bogen da (p. c.)
so ist $\angle dcb = \angle dca$ (III. 26.)
und $\angle dca = \angle y$ (III. 21.)

Also auch $\angle dcb = \angle y$
aber $\angle mbc = \angle mbc$

Folglich ist $\angle dcb + \angle mbc = \angle y + \angle mbc$

und weil $\angle dcb + \angle mbc = \angle bmd$ (I. 32.)

so ist $\angle bmd = \angle y + \angle mbc$.

Da nun $\angle bmd = \angle mbd$, weil $db = dm$

so ist $\angle mbd = \angle y + \angle mbc$

Und da $\angle mbd = \angle y + \angle x$

so ist $\angle y + \angle mbc = \angle y + \angle x$

folglich ist $\angle mbc = \angle x$.

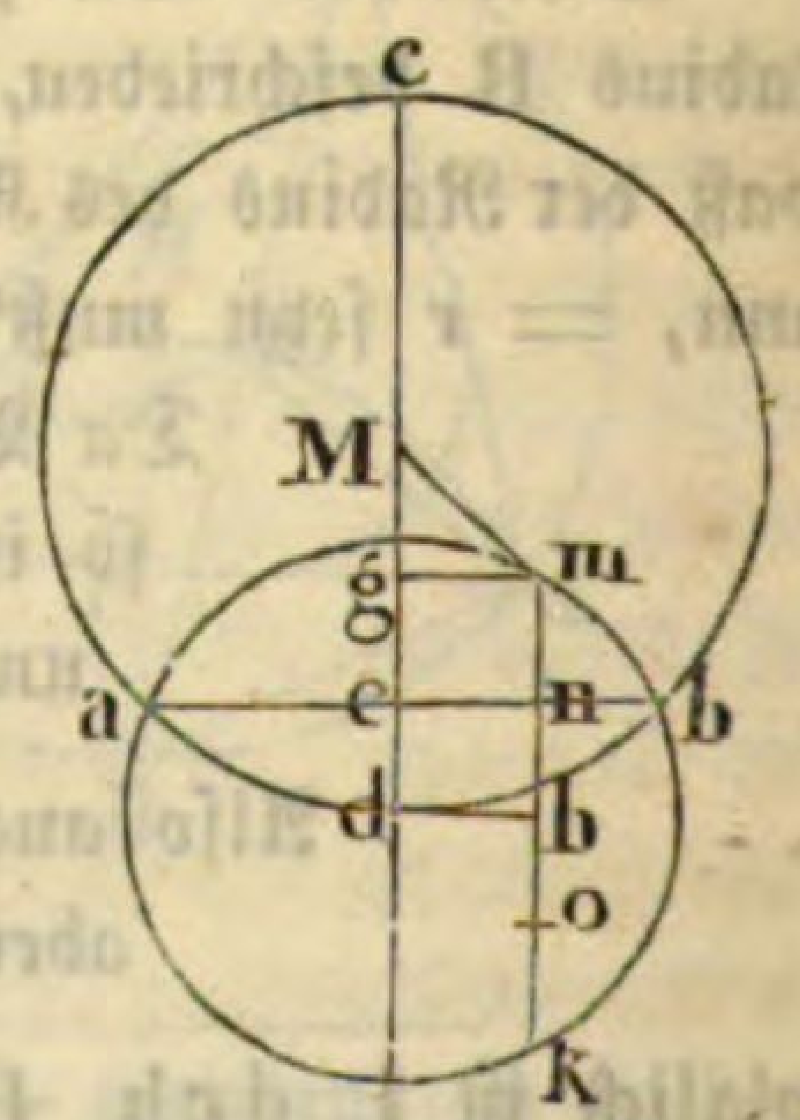
Der Winkel **abc** wird also durch **bm** halbirt, und es muß daher in **bm** der Mittelpunkt des Kreises liegen, der in Δ **abc** beschrieben werden kann. Aber auch in **cd** muß dieser Mittelpunkt liegen, folglich ist **m** der Mittelpunkt; und da **m** in der Linie liegt, die einen Abstand = **r** von **ab** hat, so ist auch **r** der Radius dieses Kreises.

Determination. Es darf nicht seyn 1) $ab > 2R$, und verbindet man **d** mit **M**, wodurch die Sehne **ab** in **e** halbirt wird: so darf nicht seyn $r > db - de$; es darf also auch nicht seyn $r + de > db$, weil sonst der Bogen **amb** von der mit **ba** gezogenen Parallele nicht getroffen wird.

Anmerkung. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe findet man bei Aufgabe 395.

---

4) Sind **M** und **m** die Mittelpunkte der beiden mit **R** und **r** beschriebenen Kreise, und ist **Mm** der Abstand derselben von einander; ist also $Md = R$, die Normale **mn** auf $ab = r$ und $Mm = D$: so läßt sich die Abhängigkeit der Größen **R**, **r** und **D**, von einander auf folgende Art ermitteln:



Es sey **ambk** der aus **d** beschriebene Kreis, der durch **m** geht, also **ab** eine Seite des Dreiecks; man verlängere die $mn = r$, bis sie diesen Kreis in **k** schneidet, und ziehe durch **d** und **m** die **dh** und **mg** parallel **ab**: so ist

$$(Mm)^2 = (Mg)^2 + (gm)^2 \quad (I. 47.)$$
$$= (Me - mn)^2 + (en)^2.$$

Da nun $an \times nb + (en)^2 = (ae)^2$ (II. 5.)
und daher $(en)^2 = (ae)^2 - an \times nb$

so ist auch $(Mm)^2 = (Me - mn)^2 + (ae)^2 - an \times nb$
Und weil $(Me - mn)^2 = (Me)^2 + (mn)^2 - 2(Me \times mn)$

so folgt $(Mm)^2 = (Me)^2 + (ae)^2 + (mn)^2 - an \times nb - 2(Me \times mn)$
Und da $(Me)^2 + (ae)^2 = (Ma)^2 = (Md)^2$

so ist $(Mm)^2 = (Md)^2 - an \times nb - 2(Me \times mn) + (mn)^2$.
Es ist aber $an \times nb = mn \times nk$ (III. 35.)
also ist auch $(Mm)^2 =$
$(Md)^2 - mn \times nk + (mn)^2 - 2(Me \times mn) =$
$(Md)^2 - mn(nk - mn) - 2(Me \times mn)$.

Nimmt man aber $ko = mn$, so ist auch $oh = hn$;
also $nk - mn = nk - ko = no = 2(nh)$:
und es ist daher auch
$$(Mm)^2 = (Md)^2 - (mn) \times 2(nh) - 2(Me \times mn)$$
$$= (Md)^2 - 2(mn) \times (nh) - 2(mn) \times (Me)$$
$$= (Md)^2 - 2(mn) \times (nh + Me)$$
Und da $nh + Me = ed + Me = Md$

so ist $(Mm)^2 = (Md)^2 - 2(mn \times Md)$.

Nun ist nach der angenommenen Bezeichnung
$Mm = D$, $Md = R$ und $mn = r$.
Folglich ist $D^2 = R^2 - 2rR$
und daher auch $R^2 = D^2 + 2rR$.

Das Quadrat von dem Radius des Kreises, der um das Dreieck beschrieben werden kann, besteht daher „aus dem Quadrate des Abstandes der Mittelpunkte beider Kreise, sammt dem Zweifachen, des unter beiden Radien enthaltenen Rechtecks".

Anmerkung. „Diese merkwürdige Abhängigkeit der Größen R, r und D von einander" hat man bisher bloß mit Hülfe eines großen Aufwandes von trigonometrischen Formeln abgeleitet; die hier angegebene einfache geometrische Ableitung derselben ist von mir zuerst in dem 4ten Bande des „Journals für reine und angewandte Mathematik von Crelle" angegeben worden.

5) Aus der Gleichung $R^2 = D^2 + 2rR$
folgt, „daß, wenn zwei von den Größen R, r und D gegeben sind, immer die dritte gefunden werden kann"; und es können daher diese drei Größen nicht als eben so viele Bestimmungsstücke eines Dreiecks angesehen werden. Soll ein entsprechendes Dreieck construirt werden: so dürfen von diesen Größen nur **zwei** gegeben seyn, und außerdem muß man noch irgend **ein anderes** Bestimmungsstück des Dreiecks kennen, das von diesen Größen unabhängig ist.

6) Da, wenn von einem Dreieck eine Seite und der ihr gegenüber liegende Winkel gegeben sind, hierdurch der Kreis gefunden werden kann, der sich um dieses Dreieck beschreiben läßt: so folgt „daß auch die drei Größen C, $\llcorner$c und R nicht unabhängig von einander sind, und daß daher auch von diesen nur zwei als Bestimmungsstücke eines Dreiecks vorkommen dürfen".

7) Aus der in Nr. 4 gefundenen Gleichung folgt

$$D^2 = R^2 - 2rR$$

und es ist daher auch $D^2 = R(R - 2r)$
und hieraus folgt, daß in keinem Falle $2r > R$ seyn kann. Für $R = 2r$ wird $D = 0$; die Mittelpunkte beider Kreise fallen also zusammen, und es ist alsdann das dazu gehörige Dreieck gleichseitig.

8) Als ein wichtiges Resultat dieser Untersuchung verdient hier noch angeführt zu werden: **daß, wenn man in und um ein gegebenes Dreieck einen Kreis beschreibt, diese beiden Kreise immer eine solche Lage zu einander haben, daß, wenn man nun um den kleinen Kreis irgend ein Dreieck beschreibt, dessen eine Seite Sehne des größern Kreises ist, dieses Dreieck auch immer in dem größeren Kreise beschrieben ist. Sind also die Seiten des Dreiecks Tangenten des kleineren Kreises, und ist eine der Seiten Sehne des größern Kreises: so sind die beiden übrigen Seiten ebenfalls Sehnen desselben.**

XXI. Aufgaben von geradlinigen Figuren und den dazu gehörigen Kreisen.

---

§. 24.

Anwendung der Sätze der vorigen Beilage.

Aufgabe 351. Von einem Dreieck sind die Radien der beiden dazu gehörigen Kreise gegeben; man soll den **Abstand** der Mittelpunkte dieser Kreise von einander angeben.

Gegeben R und r. Gesucht D.

Analysis. Da $D^2 = R^2 - 2\,Rr$

so ist auch $D^2 = R\,(R - 2\,r)$.

Das unter R und R — 2 r enthaltene Rechteck ist also dem Quadrate von D gleich. Da nun R und r, also auch R — 2 r, gegeben sind, so ist D ebenfalls gegeben.

Auflösung. Nimm R und R — 2 r als die Seiten eines Rechtecks, und verwandle dasselbe in ein Quadrat (II. 14): so ist die Seite dieses Quadrats = D.

Aufgabe 352. Der Radius des Kreises, der um ein Dreieck beschrieben werden kann, ist gegeben; und auch der Abstand des Mittelpunktes desselben von dem Mittelpunkte des Kreises, den man in das Dreieck beschreiben kann; man soll den Radius des Letzteren finden.

Gegeben R und D. Gesucht r.

Analysis. Da $D^2 = R^2 - 2\,Rr$

so ist $2\,Rr = R^2 - D^2$

und weil $R^2 - D^2 = (R + D)\,(R - D)$ (II. 5.)

so ist $2\,R \times r = (R + D) \times (R - D)$.

Nun ist R und D, also auch R + D und R — D gegeben, und daher auch das Rechteck (R + D) × (R — D); und da dieses dem Rechteck 2 R × r gleich seyn soll, von welchem die eine Seite = 2 R gegeben ist, so ist auch r ebenfalls gegeben.

Auflösung. Beschreibe ein Rechteck, dessen Seiten R + D und R — D sind; und verwandle Dasselbe in ein Anderes, dessen eine Seite = 2 R ist (Beilage X. Aufg. 3.): so ist die andere Seite dieses Rechtecks = r.

Aufgabe 353. Von einem Dreieck kennt man den Radius des Kreises, der in dasselbe beschrieben werden kann; und den Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises von dem des Kreises, der sich um das Dreieck beschreiben läßt; man soll den Radius dieses Letzteren finden.

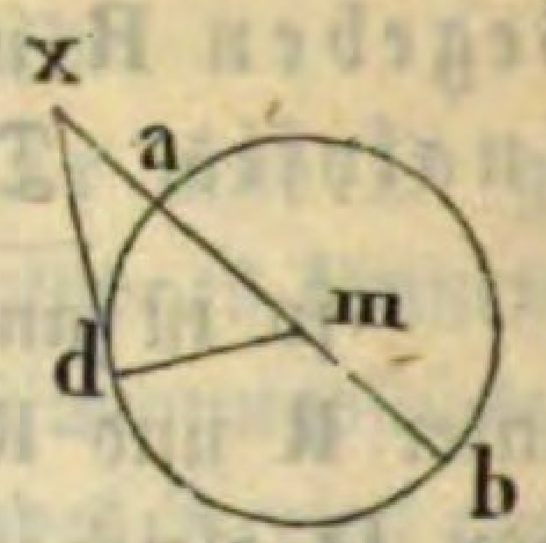
Gegeben r und D. Gesucht R.

Analysis. Es ist $R^2 = D^2 + 2\,rR$

also $R^2 - 2\,rR = D^2$

und daher $R\,(R - 2\,r) = D^2$.

Nun ist D und 2r gegeben; also kann R gefunden werden (Aufg. 327.)



Auflösung. Mit md = r beschreibe aus m einen Kreis; ziehe an irgend einen Punkt d des Umfanges die Tangente dx = D, und von x durch den Mittelpunkt m die Linie xb: so ist diese dem gesuchten Radius R gleich.

Beweis. Es ist $xa \times xb = (xd)^2$ (III. 36.)
und $xd = D$ (p. c.)

also $xa \times xb = D^2$
Und weil $xa = xb - ab$
so ist auch $xb\,(xb - ab) = D^2$.
Da nun $ma = mb = r$, also $ab = 2r$
so folgt $xb\,(xb - 2r) = D^2$
Es ist aber $R\,(R - 2r) = D^2$

folglich ist $xb = R$.

Aufgabe 354. Die Radien der beiden zu einem gleichschenkligen Dreieck gehörigen Kreise sind gegeben; man soll das Dreieck beschreiben.

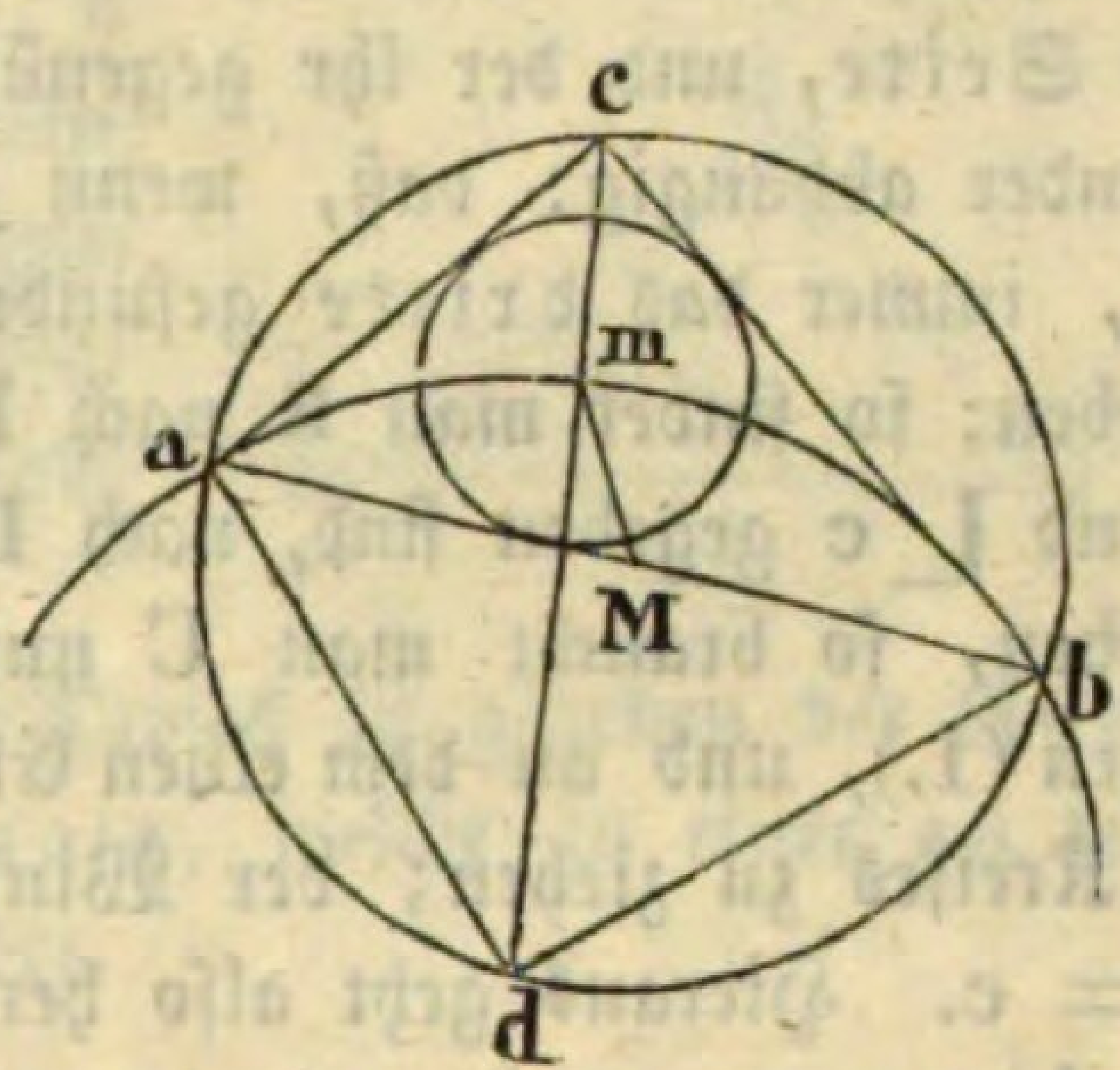
Aus R und r suche D (Aufg. 351.); beschreibe aus M mit Mc = R einen Kreis; ziehe den Halbmesser Md, nimm Mm = D, und beschreibe aus m mit me = r einen Kreis, und ziehe durch e die ab normal auf cd: so ist ab die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks. Verbindet man nun a und b mit c, so ist das Verlangte geschehen.



Zusatz. Da der Punkt e, von allen Punkten des Umfanges des aus m mit me beschriebenen Kreises, den größten Abstand von M hat (III. 7.): so ist ab die kleinste Sehne des größeren Kreises, die den kleineren berührt. Jede der drei Seiten eines ungleichseitigen Dreiecks, das um den kleineren und in den größeren Kreis beschrieben werden kann, ist also größer als ab.

Aufgabe 355. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist der Radius des Kreises gegeben, der um dasselbe beschrieben werden kann, und der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises von dem Mittelpunkte des Kreises, der in das Dreieck sich beschreiben läßt; man soll das Dreieck verzeichnen.

Analysis. Da R gegeben ist, und das Dreieck rechtwinklig seyn soll, so ist auch die Hypotenuse gegeben = 2 R (5.). Für Ma = R ist also ab = 2 R die Hypotenuse. Wird nun der Halbkreis in d halbirt: so muß, wenn man aus d mit da = db einen Kreisbogen amb beschreibt, in diesem Bogen der Mittelpunkt des kleineren Kreises liegen (Seite 378. Nr. 3.) Nun ist aber M gegeben, und auch Mm = D, folglich ist auch m gegeben.



Auflösung. Mit R beschreibe aus M einen Kreis; ziehe den Durchmesser ab, halbire den Halbkreis ab in d; beschreibe aus d mit da den Bogen amb, und aus M mit D einen Bogen, der amb in m schneidet. Von d ziehe durch m die dm, bis sie verlängert den Kreis in c schneidet. Verbindet man hierauf c mit a und b, so ist Δ abc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 356. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gegeben, und der Radius des Kreises, der sich in dasselbe hineinzeichnen läßt; man soll das Dreieck beschreiben.

Aufgabe 357. Man kennt von einem rechtwinkligen Dreieck die eine Kathete und den Radius des Kreises, der um dasselbe beschrieben werden kann; man soll das Dreieck verzeichnen.

Aufgabe 358. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man die Grundlinie und den Radius des Kreises, der in dasselbe beschrieben werden kann; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Aufgabe 359. Von einem gleichschenkligen Dreieck ist die Grundlinie gegeben, und der Radius des Kreises, der um dasselbe sich beschreiben läßt; man soll das Dreieck beschreiben.

Aufgabe 360. Von einem gleichseitigen Dreieck ist der Radius des Kreises gegeben, der in dasselbe beschrieben werden kann; es soll die Seite des Dreiecks gefunden werden.

§. 25.

Construction des Dreiecks, wenn der Radius des Kreises, der um dasselbe beschrieben werden kann, zu den gegebenen Stücken gehört.

Wie bereits in der vorigen Beilage bemerkt worden ist, wird der Radius des Kreises, der um ein Dreieck sich beschreiben läßt, mit R bezeichnet. Die drei Stücke **R**, **C** und **c** (also der Radius, eine Seite, und der ihr gegenüber liegende Winkel) sind so von einander abhängig: daß, wenn zwei von diesen Stücken gegeben sind, immer das dritte gefunden werden kann. Ist **C** und ∟ **c** gegeben: so findet man R nach **III**. 33.; **C** wird gefunden, wenn **R** und ∟ **c** gegeben sind, nach **III**. 34.; und ist endlich **R** und **C** gegeben, so braucht man **C** nur als Sehne in den Kreis einzutragen (1.), und an dem einen Endpunkte derselben eine Tangente des Kreises zu ziehen; der Winkel, den Diese mit **C** einschließt, ist = **c**. Hieraus geht also hervor, „daß die drei Größen **R**, **C** und ∟ **c** nur zwei von einander unabhängige Bestimmungsstücke des Dreiecks abgeben; und daß auch diese drei Größen nicht alle drei beliebig angenommen werden können"; da es alsdann nur Zufall seyn kann, wenn sie sämmtlich in Einem und demselben Dreieck vorkommen sollten.

Aufgabe 361. Von einem Dreieck kennt man den Radius des Kreises, der um dasselbe sich beschreiben läßt, und zwei Seiten; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben **R**, **A**, **B**.

Aufgabe 362. Man kennt von einem Dreieck R eine Seite, und einen an derselben anliegenden Winkel.

Gegeben **R**, **A** und **b**.

Aufgabe 363. Von einem Dreieck sind, außer **R**, noch zwei Winkel gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben **R**, ∟ **a**, ∟ **b**. (2).

Aufgabe 364. Es ist von einem Dreieck gegeben der Radius R, eine Seite und die zu dieser Seite gehörige Normale; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben **R**, **C** und γ.

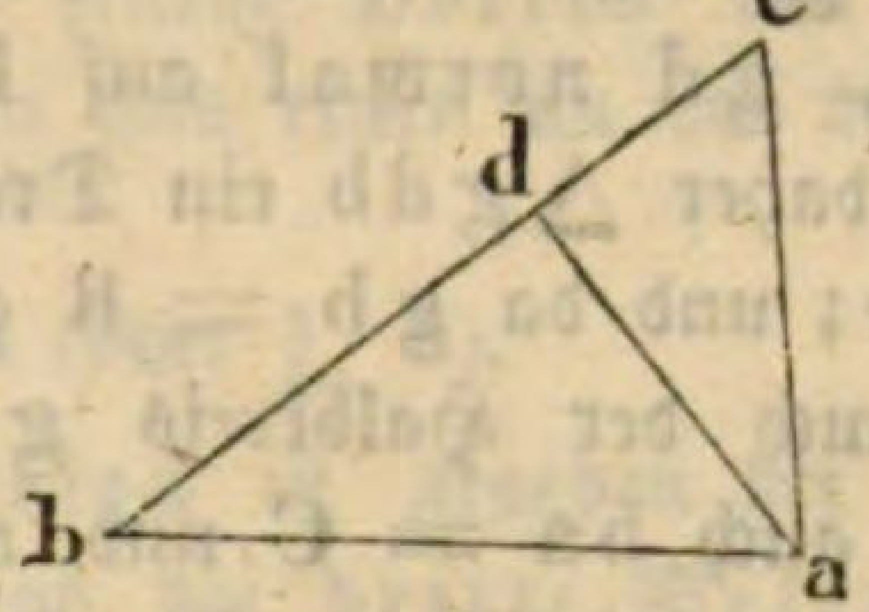
Aufgabe 365. Man kennt von einem Dreieck den Radius **R**, einen Winkel und die Normale, welche von dem Scheitel dieses Winkels auf die gegenüber liegende Seite gefället werden kann.

Gegeben R, $\angle c$ und γ.

Aufgabe 366. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius R, eine Seite des Dreiecks, und die zu einer andern Seite desselben gehörige Normale.

Gegeben R, C und α.

Analysis. Da ab = C und ad = α gegeben, so ist das rechtwinklige Dreieck adb, und daher $\angle b$ gegeben; man kennt also Eine Seite ab, und einen an derselben anliegenden Winkel b, und es ist außerdem auch R gegeben; also ist die Aufgabe nicht verschieden von Aufg. 362.



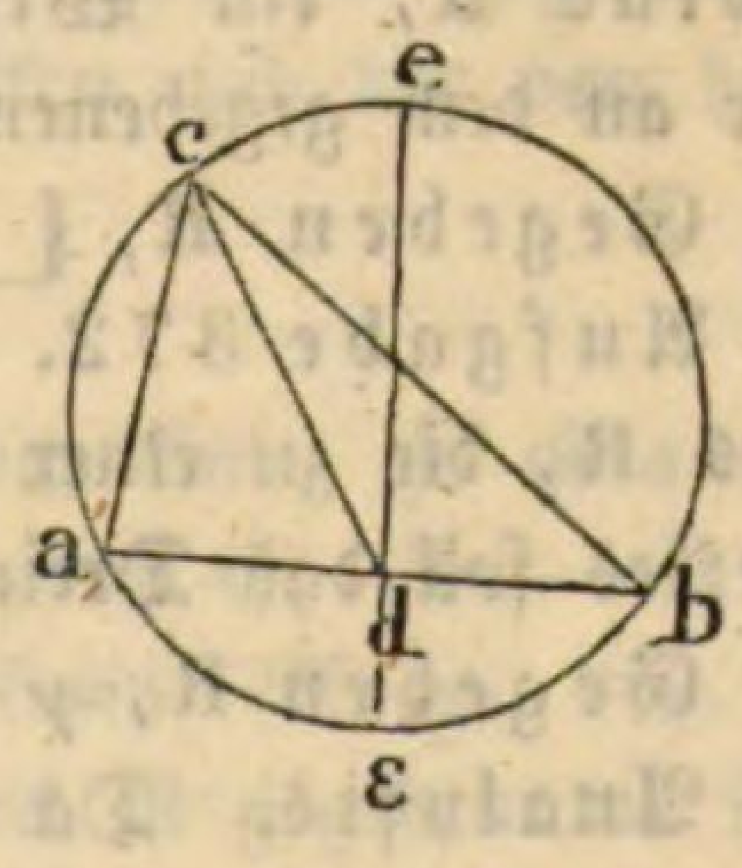
Aufgabe 367. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius R, ein Winkel, und die Normale, welche zu einer an diesem Winkel anliegenden Seite gehört.

Gegeben R, $\angle c$ und α.

Aufgabe 368. Es ist von einem Dreieck gegeben der Radius R, eine Seite des Dreiecks und die zu derselben gehörige Halbirungslinie.

Gegeben R, C und (γ).

Analysis. Da R gegeben ist und ab = C, so kann man den Kreis beschreiben, und C als Sehne in denselben eintragen. Durch ab = C ist der Punkt d der Lage nach gegeben, in welchem diese Linie halbirt wird; und da nun auch dc = (γ), also die Linie gegeben ist, welche den Halbirungspunkt d mit der gegenüber liegenden Spitze c des Dreiecks verbindet: so kann aus d mit (γ) ein Kreis beschrieben werden; und schneidet dieser den Kreis eaεb in c, so ist c die Spitze des Dreiecks.



Determination. Errichtet man in d auf ab eine Normale, und trifft diese den Kreis in e und ε: so darf nicht seyn

$$dc = (\gamma) > de \text{ oder } < d\varepsilon \text{ (III. 7.)}.$$

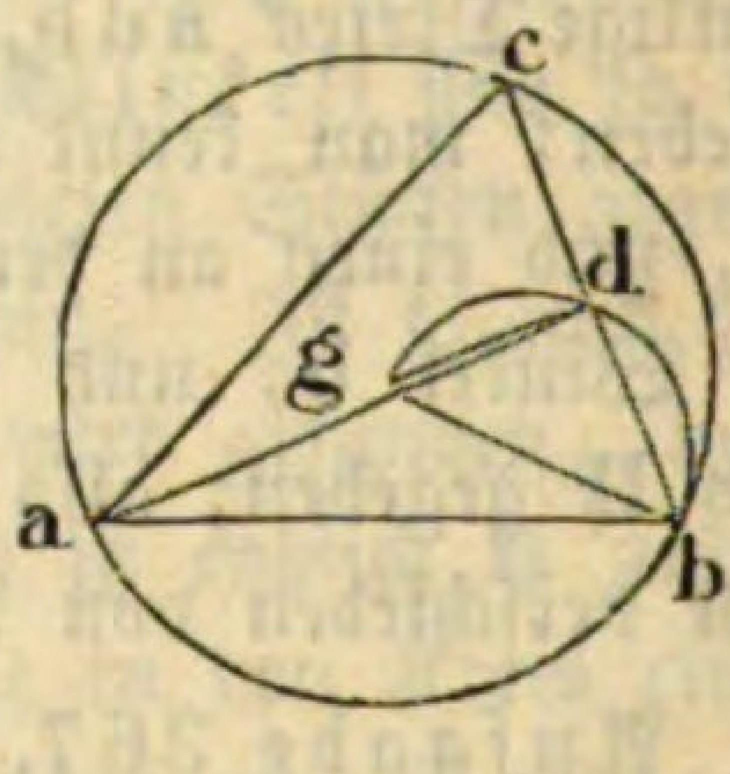
Aufgabe 369. Man kennt von einem Dreieck den Radius R, Einen Winkel, und die zu der gegenüber liegenden Seite gehörige Halbirungslinie.

Gegeben R, ∟c und (γ).

Aufgabe 370. Von einem Dreieck ist der Radius R gegeben, Eine Seite, und die zu einer der übrigen beiden Seiten gehörige Halbirungslinie; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben R, C und (α).

Analysis. Ist g der Mittelpunkt des Kreises, und man zieht gd: so ist, weil bc in d halbirt wird, gd normal auf bc (III. 3.), und daher △gdb ein Dreieck im Halbkreise; und da gb = R gegeben ist, so ist auch der Halbkreis gdb gegeben; aber auch ba = C und ad = (α) ist gegeben, folglich der Punkt d, in welchem der aus a mit (α) beschriebene Kreis den Halbkreis bdg schneidet; und hierdurch die Seite bc des Dreiecks der Größe und Lage nach.



Auflösung. Beschreibe mit R einen Kreis; trage ab = C als Sehne ein, ziehe den Radius bg; beschreibe über denselben einen Halbkreis, und aus a mit (α) einen Bogen. Schneidet dieser den Halbkreis in d, und man zieht von b durch d die bdc und verbindet c mit a: so ist △abc das verlangte Dreieck.

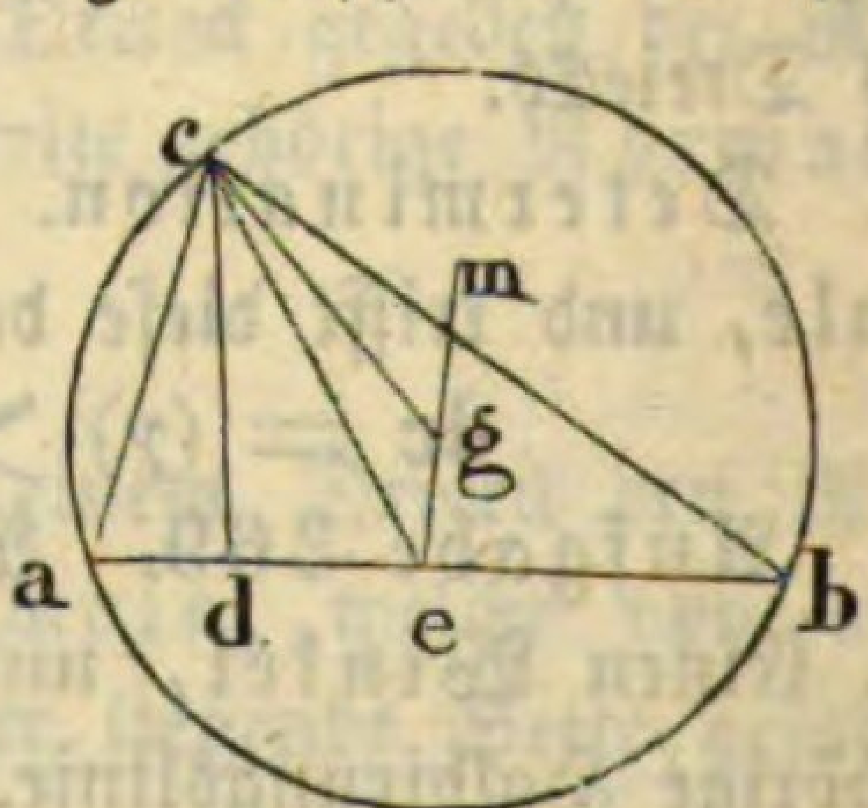
Aufgabe 371. Es ist von einem Dreieck gegeben der Radius R, ein Winkel, und die Halbirungslinie, welche zu einer an dem gegebenen Winkel anliegenden Seite gehört.

Gegeben R, ∟c und (α).

Aufgabe 372. Man kennt von einem Dreieck den Radius R, die zu einer Seite gehörige Normale und Halbirungslinie; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben R, γ und (γ).

Analysis. Da die Normale cd = γ und die Halbirungslinie ce = (γ) gegeben ist: so ist das rechtwinklige Dreieck cde gegeben, und daher de, also ab der Lage nach; und es ist e der Halbirungspunkt dieser Linie. Errichtet man also in e auf de eine Normale em, so muß in dieser der Mittelpunkt des Kreises liegen. Nun ist der Punkt c gegeben und cg = R; also auch der Mittelpunkt g, folglich die Punkte a und b der Lage nach, und hierdurch das Dreieck abc.



Aufgabe 373. Es ist von einem Dreieck gegeben der Radius R, die Summe zweier Seiten, und ein an der dritten Seite anliegender Winkel.

Gegeben R, (A + B) und $\llcorner$ a.

Analysis. Da R und $\llcorner$ a gegeben ist, so ist auch A gegeben; und weil man A + B kennt, so ist B ebenfalls gegeben.

Aufgabe 374. Man kennt von einem Dreieck den Radius R, die Differenz zweier Seiten und einen an der dritten Seite anliegenden Winkel.

Gegeben R, (A — B) und $\llcorner$ a (oder $\llcorner$ b).

Aufgabe 375. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius R, die Summe zweier Seiten und die dritte Seite; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben R, (A + B) und C.

Analysis. Da R und C gegeben sind, so ist auch $\llcorner$ c gegeben; und man kennt daher von dem Dreieck A + B, C und $\llcorner$ c, wodurch dasselbe sich construiren läßt. (Aufg. 94.)

Aufgabe 376. Man kennt von einem Dreieck den Radius R, die Summe zweier Seiten, und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel.

Gegeben R, (A + B) und $\llcorner$ c.

Aufgabe 377. Es ist von einem Dreieck gegeben der Radius R, die Differenz zweier Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel.

Gegeben R, (A — B) und $\llcorner$ c.

Analysis. Da R und $\llcorner$ c gegeben sind, so ist auch C gegeben; und man kennt daher von dem Dreieck C, A — B und $\llcorner$ c, wodurch dasselbe construirt werden kann (Aufg. 97).

Aufgabe 378. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius R, die Differenz zweier Seiten, und die dritte Seite; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben R, (A — B) und C.

Aufgabe 379. Es ist von einem Dreieck der Radius R gegeben, eine Seite, und die Differenz der beiden an derselben anliegenden Winkel.

Gegeben R, C und a — b.

Analysis. Da R und C gegeben sind, so ist auch $\llcorner$ c gegeben; folglich auch a + b. Da nun a — b ebenfalls gegeben ist, so kennt man a und b.

Aufgabe 380. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius R, der Umfang des Dreiecks und ein Winkel; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben R, (A + B + C) und ∟c.

Analysis. Da R und ∟c gegeben sind, so ist auch C gegeben; aber auch A + B + C, also auch A + B; und man kennt daher A + B, C, und ∟c (Aufg. 94).

---

§. 26.

Construction des Dreiecks, wenn der Radius des Kreises, der in dasselbe beschrieben werden kann, zu den gegebenen Stücken gehört.

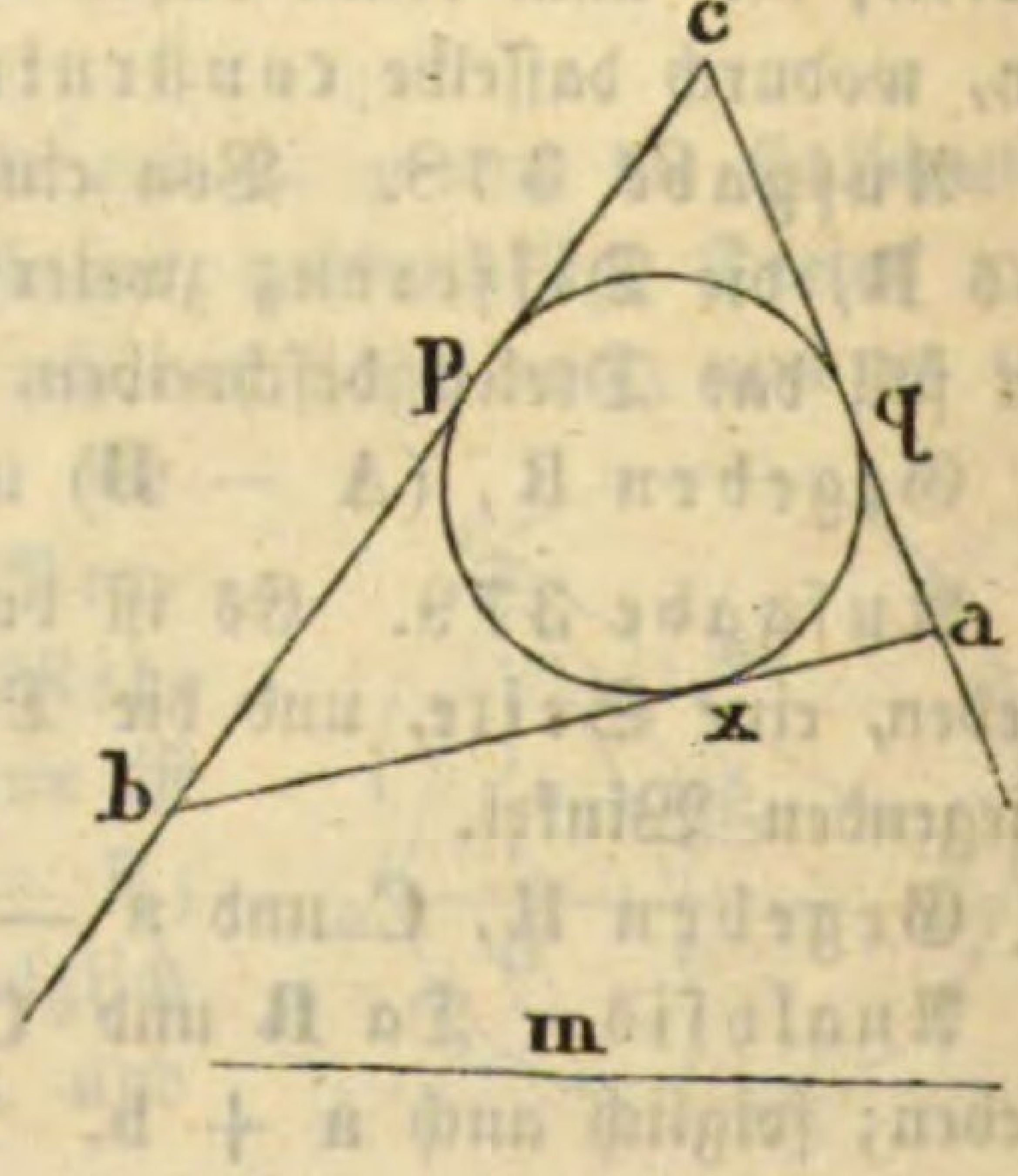
Der Radius des Kreises, der in ein Dreieck beschrieben werden kann, wird mit r bezeichnet; und es liegt der Mittelpunkt dieses Kreises immer in der geraden Linie, die einen Winkel des Dreiecks halbirt.

Aufgabe 381. Ein Winkel c ist gegeben, und ein Kreis, den beide Schenkel des Winkels berühren; man soll einen Punkt x in dem Umfange des Kreises von der Lage finden, daß, wenn man durch diesen Punkt eine Tangente zieht, der Theil ab derselben, welcher zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels liegt, einer gegebenen geraden Linie m gleich ist.

Analysis. Berührt der Kreis die Schenkel des gegebenen Winkels in p und q, so ist cp = cq gegeben; und es ist

bp = bx
und aq = ax

also bp + aq = bx + ax = ab; und da ab = m gegeben ist, so ist bp + aq ebenfalls gegeben, aber auch cp + cq ist gegeben; also auch die Summe der Größen, nämlich bc + ac.



Hiernach kennt man von dem Dreieck abc

die Summe zweier Seiten bc + ac = cp + cq + ab

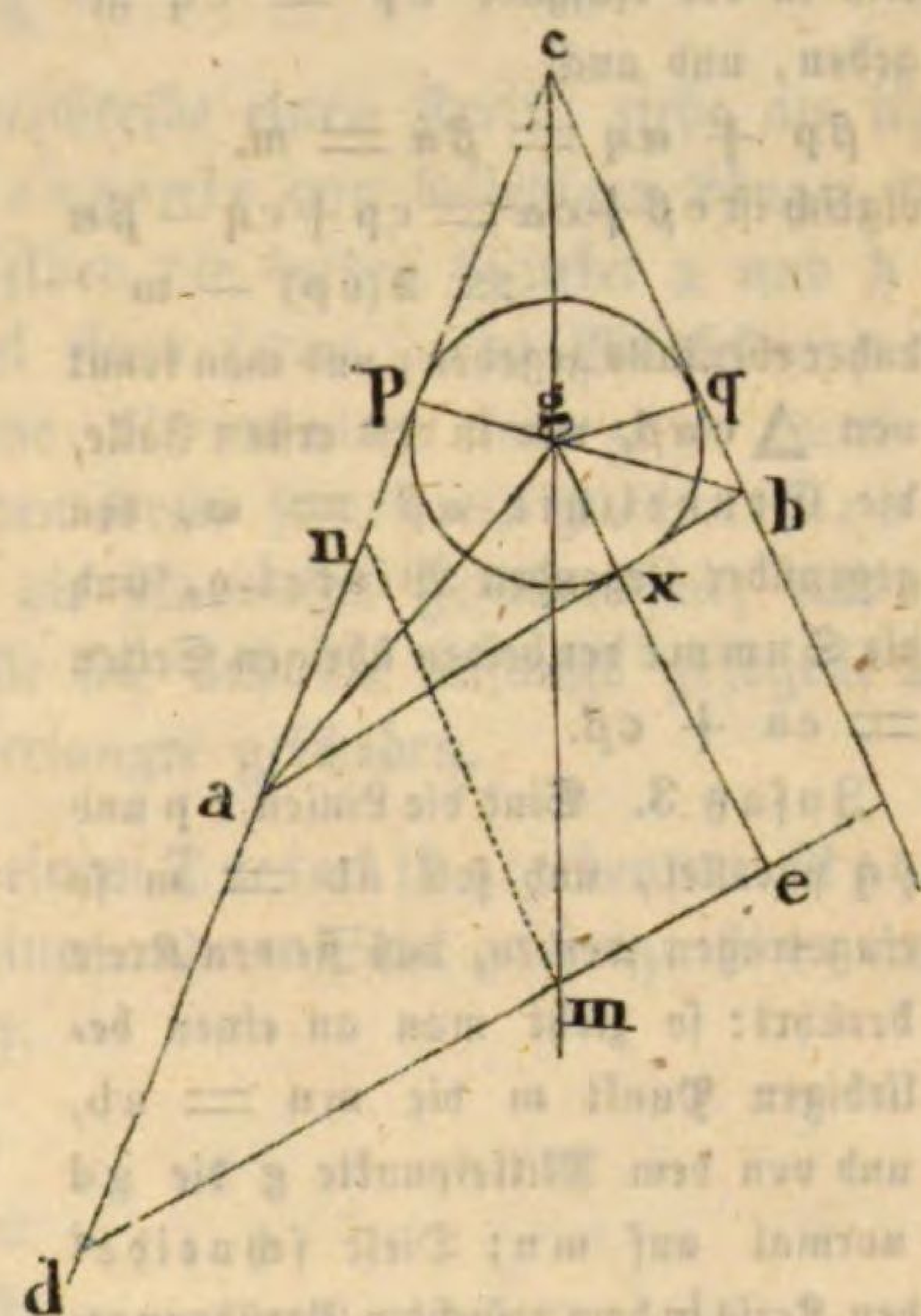
= 2 (cp) + m

die dritte Seite ab = m

und den derselben gegenüber liegenden Winkel c;

und es kann daher das Dreieck beschrieben werden (Aufg. 94).

Auflösung. Verlängere cp bis cd = 2 (cp) + m; von c ziehe durch den Mittelpunkt g des Kreises die Linie cgm, und schneide dieselbe, von d aus, mit einem Radius dm = m. Zieht man nun dm, und von m aus die mn parallel bc, nimmt hierauf ca = nd, und zieht von a die axb parallel dm: so ist das Verlangte geschehen.



Beweis. Da ca = nd, cb parallel nm und ab parallel dm: so ist Δ cab $\cong$ Δ ndm (I. 26.)
und daher ab = dm
Und da dm = m (p.c.)

so ist ab = m
und da in Δ dnm ist dn + nm = dn + nc = 2 (cp) + m (Aufg. 94.): so ist auch in Δ acb ac + cb = 2 (cp) + m = 2 (cp) + ab; und weil 2 (cp) = cp + cq, so ist

ac + cb = cp + cq + ab.

Folglich ist ap + bq = ab.

Man ziehe gp, gq, ga, gb; und gx normal auf ab: so ist gp = gq, und es sind diese Linien normal auf ca und cb.

Nimmt man nun an, „daß gx größer sey als gp, und also auch als gq", so folgt:

da $(ag)^2 = (gp)^2 + (ap)^2 = (gx)^2 + (ax)^2$

weil seyn soll $(gp)^2 < (gx)^2$

$(ap)^2 > (ax)^2$

also auch ap > ax

und aus gleichen Gründen bq > bx

also ap + pq > ab

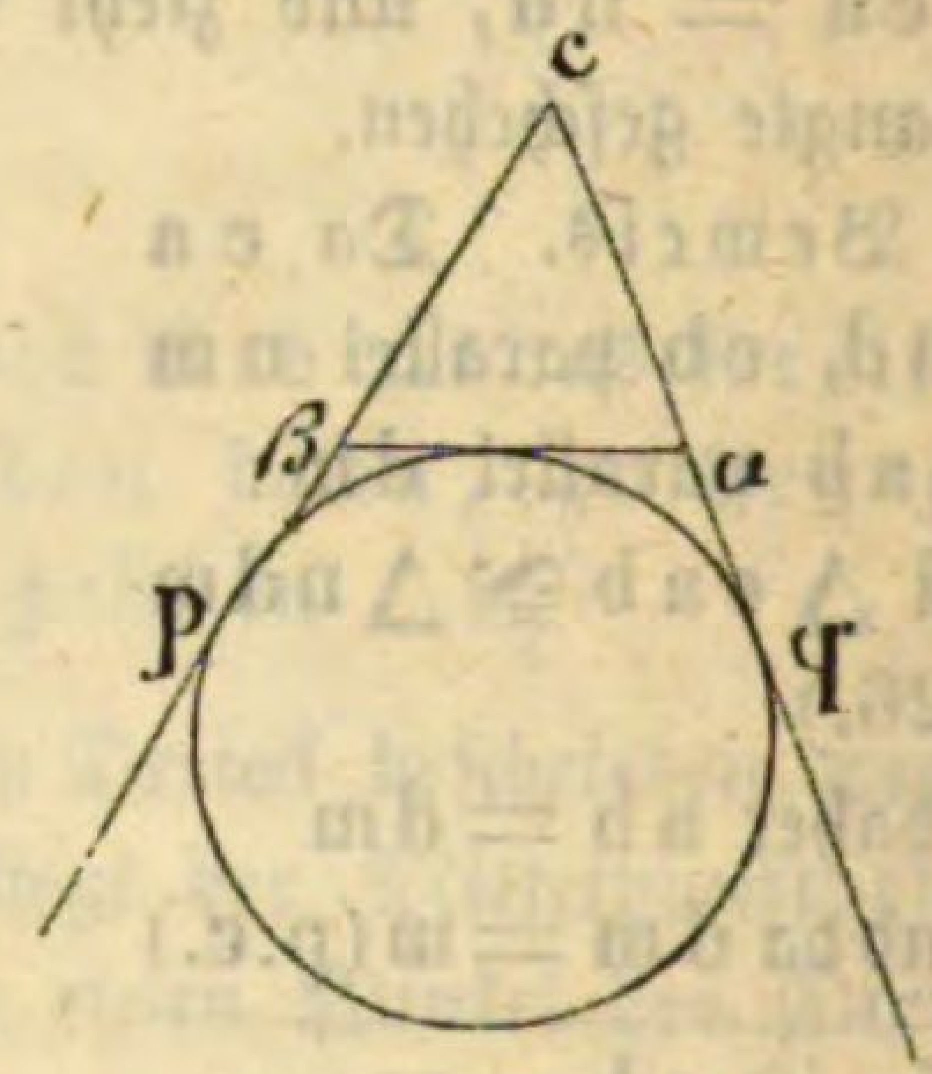
was dem Bewiesenen, wonach $ap + bq = ab$ ist, widerspricht. Eben so kann auch nicht seyn gx kleiner als gp. Folglich ist $gx = gp = gq$, und daher $ab = m$ eine Tangente des Kreises.

Zusatz 1. Die Construction kann auf folgende Art etwas einfacher ausgeführt werden:

Man nehme $cd = 2(cp) + m$, verlängere cg, schneide diese Linie aus d mit $dm = m$; ziehe dm fälle auf dieselbe aus g die Normale ge, und ziehe durch den Punkt x, wo diese Normale den Kreis schneidet, die ab parallel dm.

Zusatz 2. Soll die Linie, wie $\alpha\beta$, den Kreis so berühren, daß derselbe unterhalb dieser Linie liegt: so ist, wie in der Aufgabe $cp = cq$ gegeben, und auch

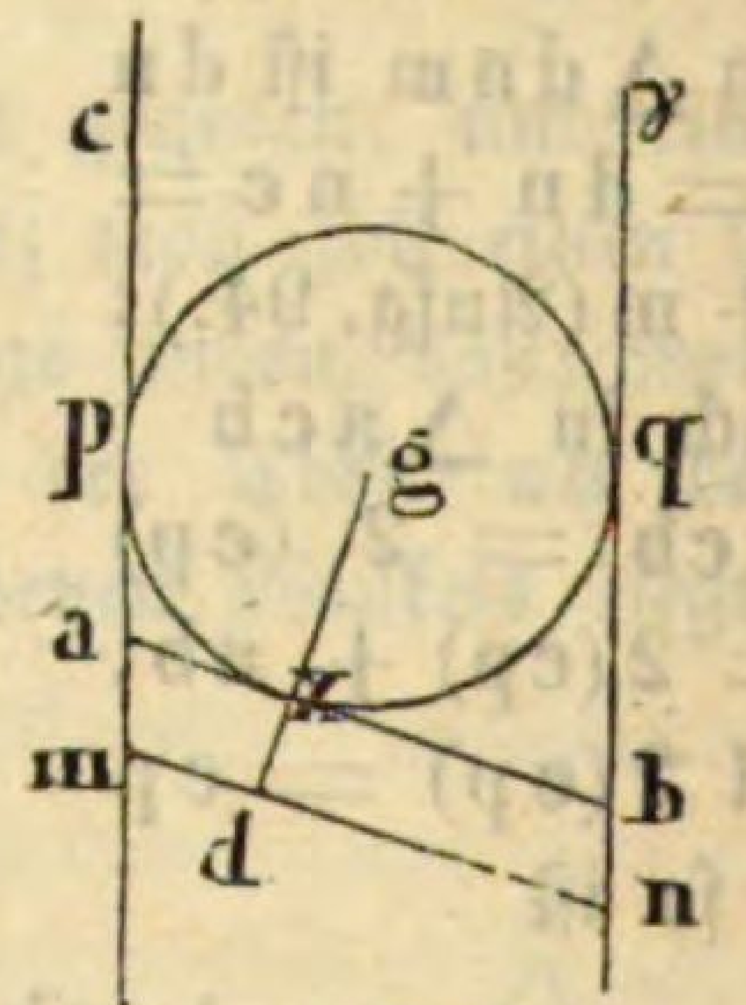
$$\beta p + \alpha q = \beta\alpha = m.$$



Folglich ist $c\beta + c\alpha = cp + cq - \beta\alpha$
$= 2(cp) - m$

daher ebenfalls gegeben; und man kennt von $\Delta\, c\alpha\beta$, wie in dem ersten Falle, die Grundlinie $\alpha\beta = m$, den gegenüber liegenden Winkel c, und die Summe der beiden übrigen Seiten $= ca + c\beta$.

Zusatz 3. Sind die Linien cp und γq parallel, und soll $ab = m$ so eingetragen werden, daß sie den Kreis berührt: so zieht man an einen beliebigen Punkt m die $mn = ab$, und von dem Mittelpunkte g die gd normal auf mn; Diese schneidet den Kreis in dem gesuchten Berührungspunkte x.



Aufgabe 382. Von einem Dreieck kennt man den Radius r des Kreises, der in dasselbe beschrieben werden kann, Eine Seite und den ihr gegenüber liegenden Winkel; es soll das Dreieck verzeichnet werden.

Gegeben r, C und $\angle c$.

Auflösung. Beschreibe mit r einen Kreis, der die Schenkel des Winkels c berührt (Aufg. 216.); und ziehe nun eine Tangente $= C$ so an den Kreis, daß die Endpunkte derselben die Schenkel des Winkels c treffen (Aufgabe 381.): so ist das Verlangte geschehen

Aufgabe 383. Von einem Dreieck kennt man den Radius r, Eine Seite, und einen an derselben anliegenden Winkel.

Gegeben r, A und ∟c.

Auflösung. Mit r beschreibe den Kreis, welcher die Schenkel des Winkels c berührt (Aufg. 216.); nimm den einen Schenkel = A, und ziehe von dem Endpunkte desselben eine Tangente an den Kreis, und verlängere dieselben bis sie den zweiten Schenkel trifft.

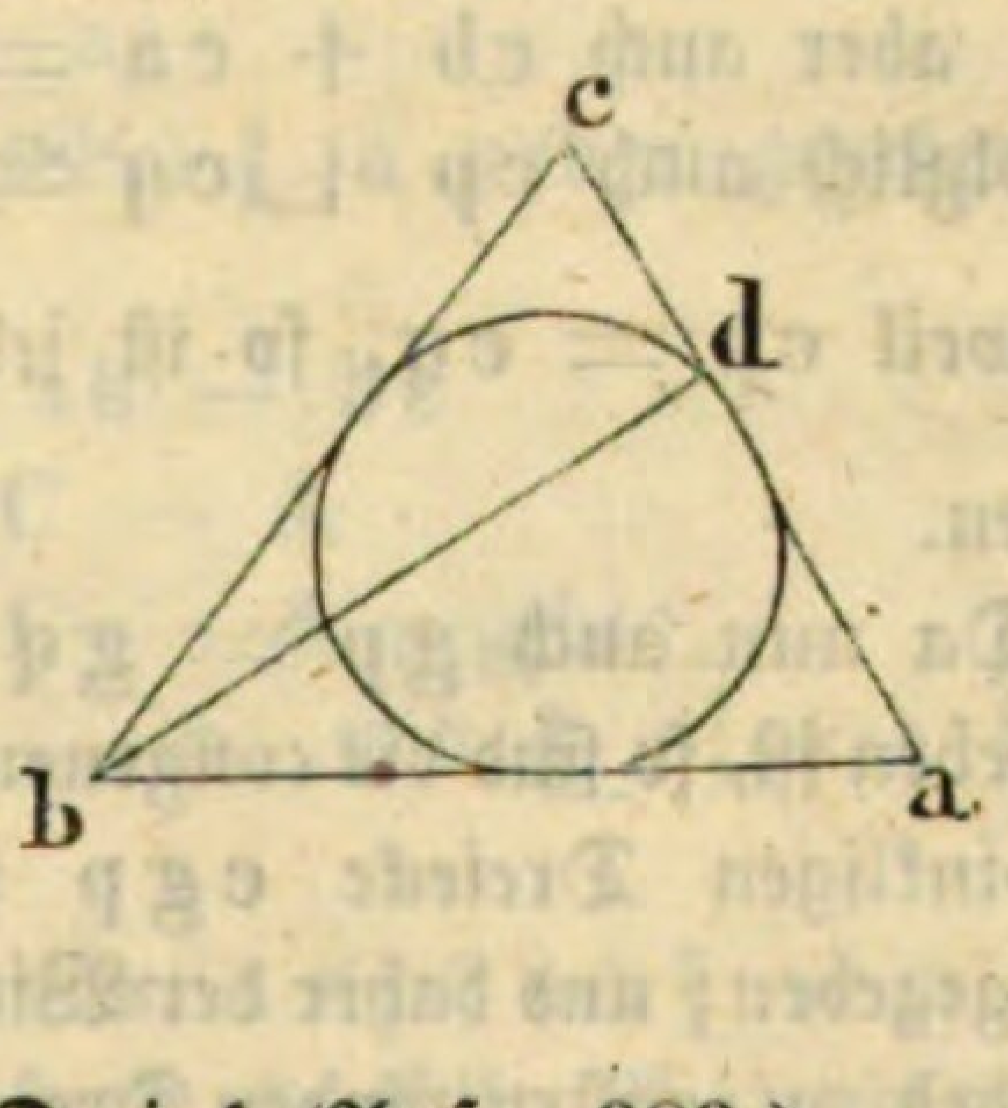
Aufgabe 384. Von einem Dreieck kennt man den Radius r, und zwei Winkel; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben r, ∟a, ∟b.

Auflösung. Mit r beschreibe einen Kreis; ziehe an irgend einen Punkt desselben eine Tangente von beliebiger Länge; trage an die beiden Endpunkte derselben die beiden Winkel a und b an; fälle auf den zweiten Schenkel eines jeden dieser Winkel aus dem Mittelpunkte des Kreises eine Normale; und ziehe durch die Punkte, wo diese Normalen den Kreis schneiden, Parallelen mit den Linien, auf welche man die Normalen gefället hat; und verlängere diese Parallelen, bis sie sich und die anfangs gezogene Tangente schneiden: so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 385. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius r, Eine Seite, und die zu einer andern Seite gehörige Normale; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben r, A und β.

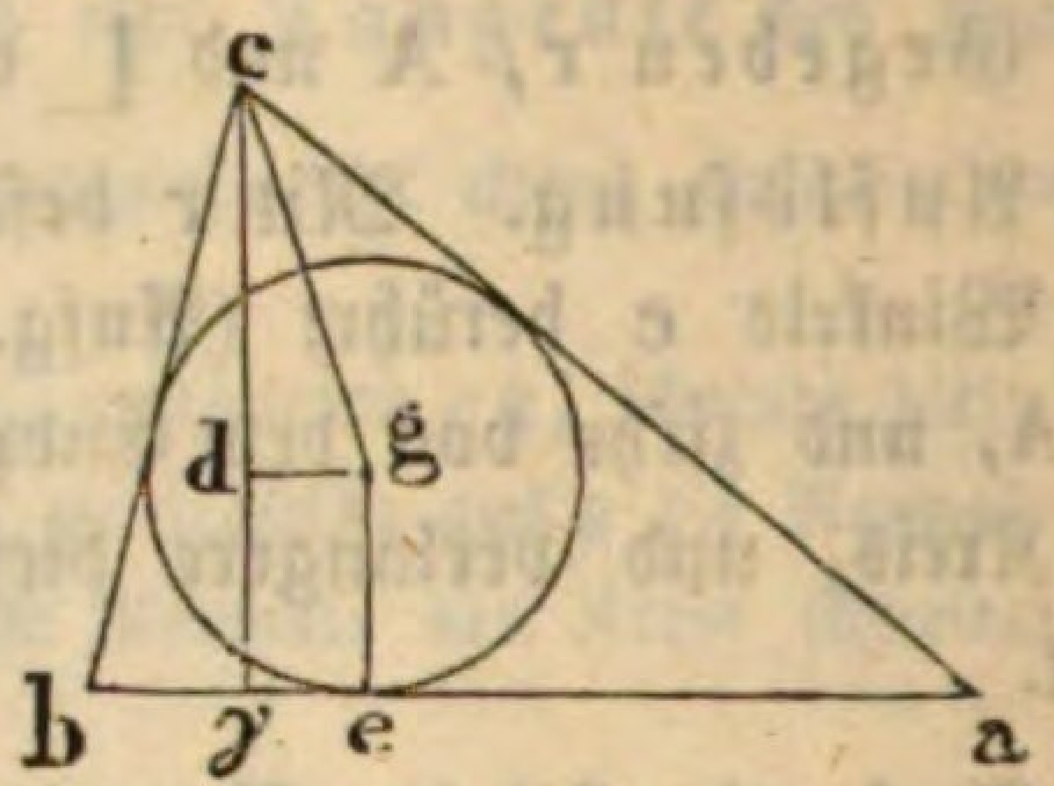


Analysis. Da cb = A und bd = β gegeben ist, so ist das rechtwinklige Dreieck bcd gegeben, also auch der Winkel c. Folglich kennt man von dem Dreieck abc Eine Seite bc = A, den an derselben anliegenden Winkel c, und den Radius r; und daher das Dreieck (Aufg. 383.).

Aufgabe 386. Es sind von einem Dreieck gegeben der Radius r, Ein Winkel, und die zu einer an diesem Winkel anliegenden Seite gehörige Normale.

Gegeben r, ∟c und β.

Aufgabe 387. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius r, Ein Winkel, und die zu der gegenüber liegenden Seite gehörige Normale.



Gegeben r, ∟c und γ.

Analysis. Man beschreibe in dem ∟c mit r einen Kreis, der beide Schenkel berührt, und verbinde c mit dem Mittelpunkte g dieses Kreises: so ist cg der Größe und Lage nach gegeben. Da nun $c\gamma = \gamma$ und $ge = r$ der Größe nach gegeben, und Beide normal auf ab sind: so ist auch, wenn man gd parallel ab zieht, $cd = \gamma - r$ ebenfalls der Größe nach gegeben; und man kennt daher von dem rechtwinkligen Dreieck cgd die Hypotenuse cg der Größe und Lage nach, und die Kathete cd der Größe nach; also ist das Dreieck gegeben, und daher cd der Lage nach, wodurch nun $c\gamma$ der Größe und Lage nach bestimmt ist.

Aufgabe 388. Von einem Dreieck ist der Radius r gegeben, Eine Seite, und die Summe der beiden übrigen Seiten; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben r, C und (A + B).

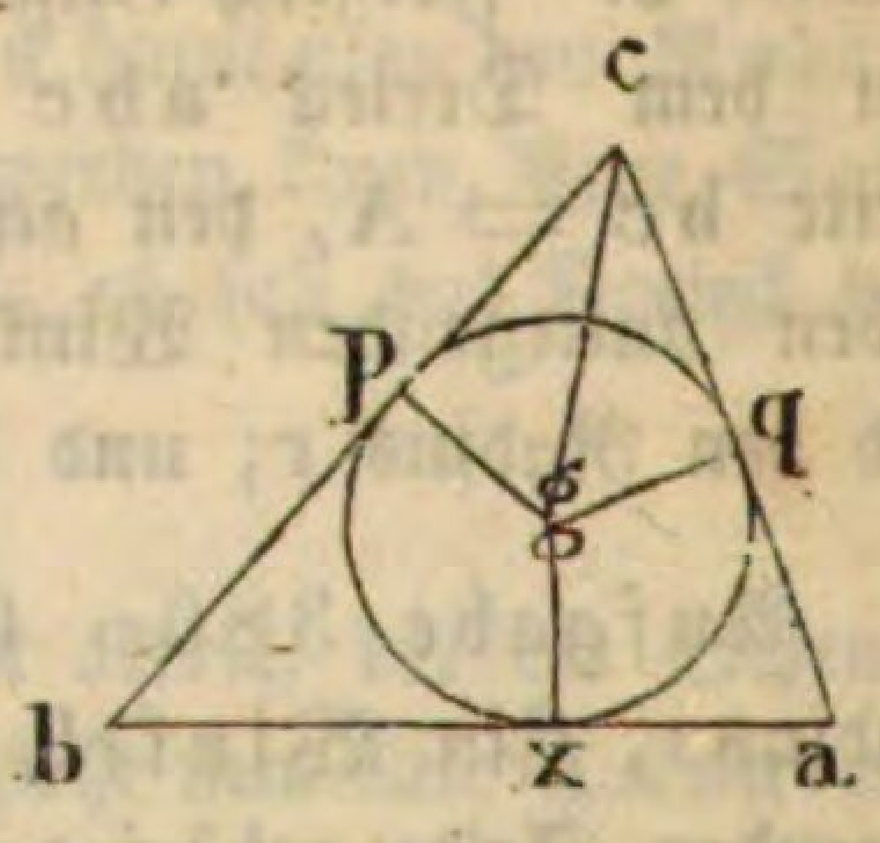
Analysis. Werden von dem Mittelpunkte g an die Berührungspunkte die Radien gp, gq gezogen, so ist

$$bp + aq = ba = C \text{ gegeben;}$$

$$\text{aber auch } cb + ca = A + B \text{ ist gegeben,}$$

$$\text{folglich auch } cp + cq = A + B - C$$

Und weil $cp = cq$, so ist jede dieser Linien $= \dfrac{A + B - C}{2}$ gegeben.



Da nun auch $gp = gq = r$ gegeben ist, so sind die congruenten rechtwinkligen Dreiecke cgp und cgq gegeben; und daher der Winkel acb des zu construirenden Dreiecks, von welchem also gegeben ist Eine Seite $ab = C$, der ihr gegenüber liegende Winkel c, und die Summe der beiden übrigen Seiten $cb + ca = A + B$; und folglich ist das Dreieck gegeben (Aufg. 94.).

Aufgabe 389. Man kennt von einem Dreieck den Radius r, Eine Seite, und die Differenz der beiden übrigen Seiten; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben r, A und (B — C).

Analysis. Da gegeben ist A und B — C, so ist auch gegeben $A + B - C = cb + ca - ab$ (Fig. Aufg. 388.)

$$= cb + ca - (bp + aq)$$
$$= cp + cq = 2(cp).$$

Folglich ist cp gegeben, aber auch $gp = r$; also das rechtwinklige Dreieck cpg, und das demselben congruente Dreieck cqg; wodurch der Winkel acb des Dreiecks abc gegeben ist. Man kennt also von diesem Dreieck einen Winkel c, die an demselben anliegende Seite A, und die Differenz der beiden übrigen Seiten B — C; wodurch das Dreieck bestimmt ist (Aufg. 96.).

Aufgabe 390. Von einem Dreieck kennt man den Radius r, die Summe zweier Seiten, und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel.

Gegeben r, (A + B) und $\llcorner c$.

Analysis. Da $\llcorner c$ und r gegeben sind, so ist (Fig. Aufgabe 388.) auch cp und cq gegeben; man kennt aber auch $cb + ca = A + B$, folglich ist $bp + aq$ gegeben; und weil $bp + aq = ab$, so ist ab gegeben, und daher das Dreieck. (Aufg. 94.)

Aufgabe 391. Man kennt von einem Dreieck den Radius r, die Differenz zweier Seiten, und den der Einen dieser Seiten gegenüber liegenden Winkel.

Gegeben r, (C — A) und $\llcorner a$.

Analysis. Da (Fig. Aufg. 388.) $\llcorner a$ und r gegeben ist, so kennt man auch ax und aq.

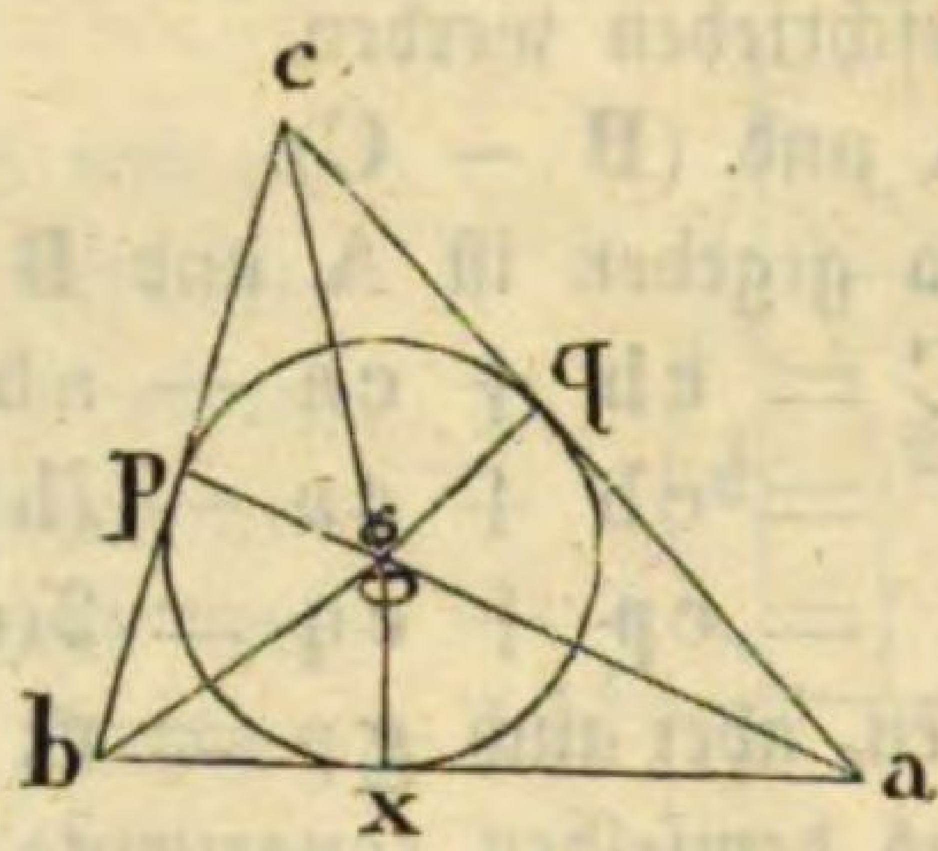
$$\text{also } ax + aq = ac + ab - bc$$
$$= B + C - A$$

Es ist aber auch C — A gegeben, folglich B. Man kennt also B, C — A, und $\llcorner a$; und daher das Dreieck (Aufg. 96.)

Anmerkung. Sind die gegebenen Stücke r, A — C und $\llcorner a$: so ist die Auflösung dieselbe, und es wird die Aufgabe auf Aufg. 95. zurückgeführt.

Aufgabe 392. Von einem Dreieck ist der Umfang gegeben, der Radius r, und eine Normale; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben r, (A + B + C) und α.



Analysis. Es ist $\Delta abc = \Delta abg + \Delta acg + \Delta bcg$; und daher $2 \,.\, \Delta abc = 2 \,.\, \Delta abg + 2 \,.\, \Delta acg + 2 \,.\, \Delta bcg$

Es ist aber $2 \,.\, \Delta abg = ab \times gx = ab \times r$
$$2 \,.\, \Delta acg = ac \times gq = ac \times r$$
$$2 \,.\, \Delta bcg = bc \times gp = bc \times r$$

Also ist auch $2 \,.\, \Delta abc = (ab + ac + bc) \times r$
$= (C + B + A) \times r$ gegeben.

Nun ist aber
$$2 \,.\, \Delta abc = A \times \alpha \quad \text{(I. 41.)}$$
folglich ist auch
$$(A + B + C) \,.\, r = A \times \alpha.$$

Da nun (A + B + C), r und α gegeben sind, so ist auch A gegeben, und folglich auch B + C. Man kennt also von dem Dreieck Eine Seite a, die Summe der beiden übrigen Seiten B + C, und den Radius r; wodurch das Dreieck bestimmt ist (Aufg. 388.).

Aufgabe 393. Von einem Dreieck ist der Umfang gegeben Ein Winkel, und der Radius r; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben r, (A + B + C) und ∟c.

Analysis. Da ∟c und r gegeben sind, so kann man den Kreis in den Winkel hineinzeichnen; und es ist hierdurch gegeben A + B — C. Aber auch A + B + C ist gegeben; folglich auch
$$(A + B + C) - (A + B - C) = 2C, \text{ also } C.$$
Daher kennt man Eine Seite C, den ihr gegenüber liegenden Winkel c und r, wodurch das Dreieck bestimmt ist (Aufg. 382.)

Aufgabe 394. Es ist von einem Dreieck der Radius r, Eine Seite, und die zu derselben gehörige Normale gegeben.

Gegeben r, A und α.

Analysis. Nach Aufg. 392. ist

$$A \times \alpha = (A + B + C)\, r.$$

Da nun A und α und auch r gegeben ist, so ist $A + B + C$ gegeben; und man kennt daher auch von dem Dreieck $A + B + C - A = B + C$.

Folglich ist Eine Seite A gegeben, die Summe der beiden übrigen Seiten $B + C$, und der Radius r; und dadurch ist das Dreieck gegeben (Aufg. 388.).

Aufgabe 395. Von einem Dreieck sind gegeben die Radien der beiden Kreise, von welchen der Eine in, und der Andere um das Dreieck beschrieben werden kann, und Eine Seite; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben r, R und C.

Analysis. Da R und C gegeben sind, so ist auch ∟ c gegeben; folglich kennt man von dem Dreieck Eine Seite C, den ihr gegenüber liegenden Winkel c, und den Radius r; es kann also das Dreieck beschrieben werden (Aufg. 382.).

Anmerkung. Man vergleiche hiermit die Auflösung dieser Aufgabe in Nr 3. der Beilage XX.

Aufgabe 396. Von einem Dreieck sind die Radien der beiden dazu gehörigen Kreise gegeben, und Ein Winkel; man soll das Dreieck beschreiben.

Gegeben r, R und ∟ c.

Analysis. Da R und ∟ c gegeben sind, so ist auch C gegeben (III. 33.), und daher das Dreieck; wie bei der vorigen Aufgabe.

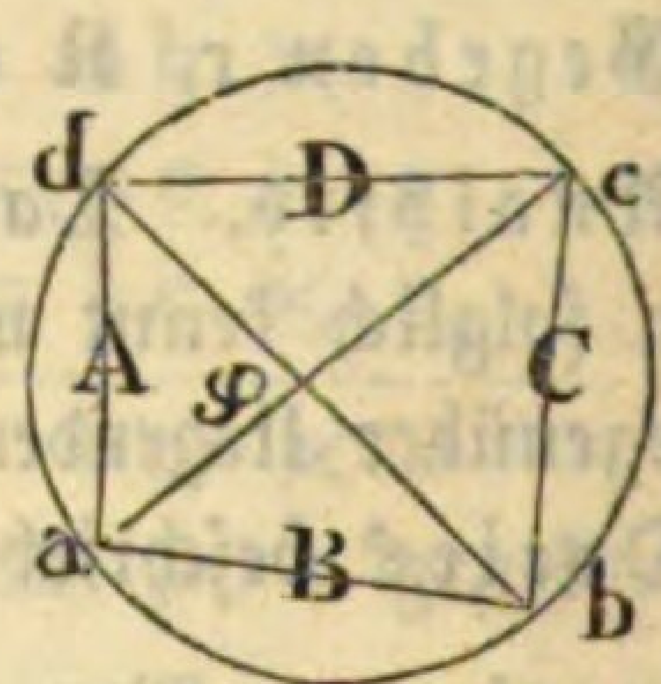
---

§. 27.

Aufgaben von dem Viereck im Kreise.

Die wesentlichste Eigenschaft des Vierecks im Kreise ist Die, „daß je zwei einander gegenüber liegende Winkel zusammen 2 R^o betragen (III. 22.)"; und es ist durch diese Eigenschaft ein Be-

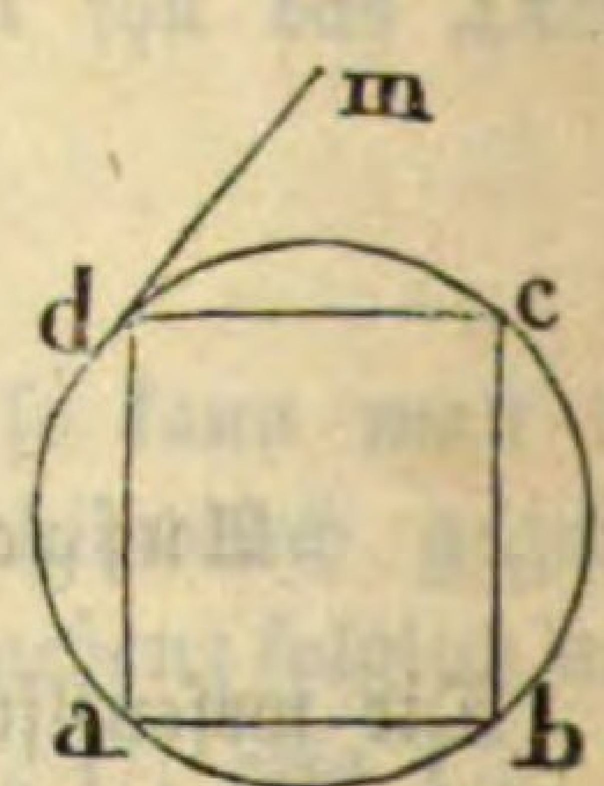
stimmungsstück der Figur gegeben. Während daher bei einem Viereck überhaupt 5 Bestimmungsstücke gegeben seyn müssen, um dasselbe construiren zu können (Seite 133. §. 5.), so sind für ein **Viereck im Kreise** nur noch deren 4 erforderlich; unter welchen jedoch nicht **zwei Seiten** und der von denselben eingeschlossene **Winkel** sich befinden dürfen, wenn der Radius des Kreises gegeben ist; weil, wenn **zwei** neben einander liegende **Seiten** in den Kreis als **Sehnen** eingetragen werden, hierdurch der von denselben eingeschlossene **Winkel** von selbst sich ergiebt. Und da durch Einen Winkel zugleich der demselben gegenüber liegende gegeben ist: so dürfen, wenn der Radius gegeben ist, auch nicht 2 **neben** einander liegende Seiten und der von den beiden übrigen eingeschlossene **Winkel** gegeben seyn. Der **Radius** des Kreises, der um das Viereck sich beschreiben läßt, soll mit **R** bezeichnet werden; die Seiten und Winkel, wie in dem beistehenden Schema mit **A**, **B**, **C**, **D**, und a, b, c, d. Die **Diagonale**, welche die Winkelspitzen a und **c** verbindet (also **ac**) soll = **E**, und die Diagonale **bd** = **F** seyn. Der **Winkel**, unter welchem beide Diagonalen sich schneiden, und der den Seiten **A** und **C** gegenüber liegt, ist = φ; so daß also der den Seiten **B** und **D** gegenüber liegende Winkel φ zu 2 R° ergänzt.



Aufgabe 397. Von einem **Viereck** im Kreise ist der **Radius R** gegeben, **zwei** neben einander liegende **Seiten**, und der **Winkel**, der an Einer dieser Seiten anliegt, ohne von Beiden eingeschlossen zu seyn; man soll das **Viereck** verzeichnen.

Gegeben R, A, B und ∟ **d.**

Auflösung. Beschreibe mit **R** einen **Kreis**, von irgend einem Punkte d aus, trage **da = A** als **Sehne** ein, und an **a** die **ab = B.** Wird nun in d an ad der Winkel **adc** = d angesetzt, und c mit b verbunden: so ist das Verlangte geschehen.



Determination. Es darf keine der beiden Seiten **A** und **B** > 2 **R** seyn; und wenn eine dieser Seiten = 2 **R** ist, muß die andere kleiner seyn, als 2 **R.** Zieht

man ferner an d die Tangente dm, so ist $\angle adm > \angle d$; und es muß daher seyn $\angle d < \angle adm$.

Aufgabe 398. Von einem Viereck im Kreise ist der Radius R gegeben zwei einander gegenüber liegende Seiten, und Ein Winkel; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben R, A, C und $\angle a$.

Aufgabe 399. Man kennt von einem Viereck im Kreise den Radius R, Eine Seite, und die beiden an derselben anliegenden Winkel.

Gegeben R, A, $\angle a$ und $\angle d$.

Aufgabe 400. Es sind von einem Viereck im Kreise gegeben der Radius R, Eine Seite, und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen nur der Eine an der gegebenen Seite anliegt.

Aufgabe 401. Von einem Viereck im Kreise ist gegeben der Radius R, Eine Seite, und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen keiner an der gegebenen Seite anliegt.

Gegeben R, A, $\angle b$ und $\angle c$.

Analysis. Da $\angle a + \angle c = 2 R^{0}$ (III. 22.) und $\angle c$ gegeben ist, so ist auch $\angle a$ gegeben.

Aufgabe 402. Man kennt von einem Viereck im Kreise den Radius R, und drei Seiten; es soll das Viereck verzeichnet werden.

Gegeben R, A, B, C.

Aufgabe 403. Man kennt von einem Viereck im Kreise drei Seiten, und Einen von zwei dieser Seiten eingeschlossenen Winkel; es soll der Radius des dazu gehörigen Kreises gefunden und das Viereck beschrieben werden.

Gegeben A, B, C und $\angle a$.

Analysis. Da A, B, und $\angle a$ gegeben sind, so ist das Dreieck abd gegeben (Aufg. 1. S. 104.); und daher der Radius R des Kreises, der um dieses Dreieck beschrieben werden kann (5.); und Dieses ist zugleich der Radius des Kreises, der auch um das Viereck sich beschreiben läßt.

Aufgabe 404. Von einem Viereck im Kreise sind drei Seiten gegeben, und Ein Winkel, der an der vierten unbekannten Seite anliegt; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben A, B, C und $\angle c$.

Analysis. Es ist $a + c = 2 R^{0}$ (III. 22.) und $\angle c$ gegeben; also auch $\angle a$, und daher R (Aufg. 403.), und folglich das Viereck.

Aufgabe 405. Es ſind von einem Viereck im Kreiſe zwei neben einander liegende Seiten gegeben, und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen der eine von den gegebenen Seiten eingeſchloſſen iſt; man ſoll das Viereck verzeichnen.

Gegeben A, B, $\angle$ a und $\angle$ b.

Aufgabe 406. Man kennt von einem Viereck im Kreiſe zwei neben einander liegende Seiten, und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen keiner durch die gegebenen Seiten eingeſchloſſen iſt.

Gegeben A, B, $\angle$ b und $\angle$ c.

Aufgabe 407. Es ſind von einem Viereck im Kreiſe zwei gegenüber liegende Seiten, und zwei neben einander liegende Winkel gegeben; es ſoll das Viereck beſchrieben werden.

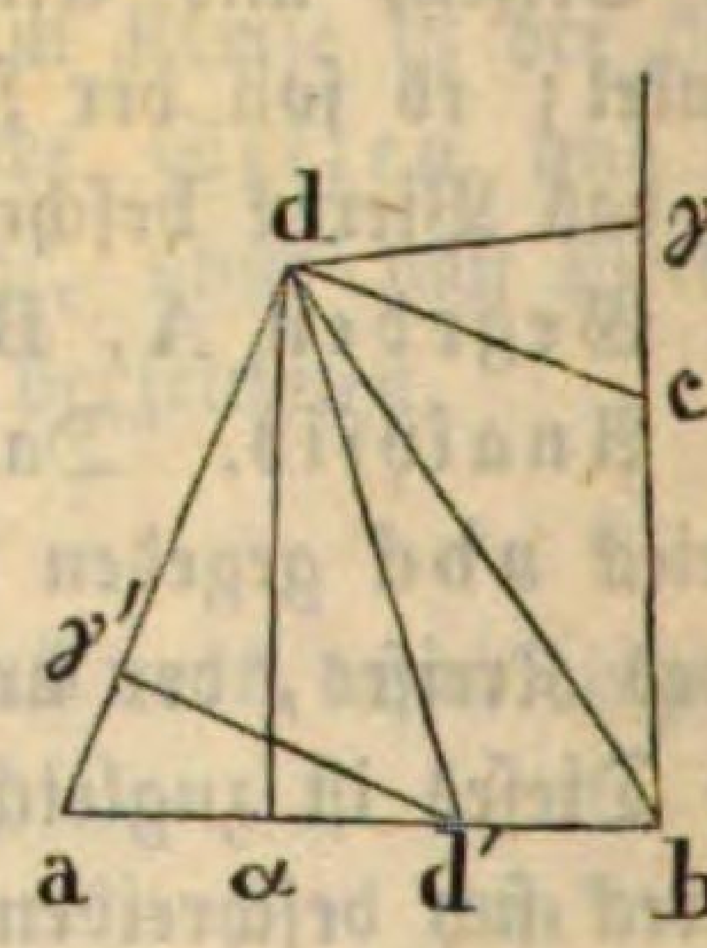
Gegeben A, C, $\angle$ a und $\angle$ b.

Analyſis. Da $\angle a + \angle c = 2\,R^0$ und $\angle$ a gegeben ſind, ſo iſt auch $\angle$ c gegeben; folglich ſind von dem Viereck drei Winkel und zwei einander gegenüber liegende Seiten gegeben; und es kann daher das Viereck beſchrieben werden (Aufg. 62. Seite 134).

Aufgabe 408. Die vier Seiten eines Vierecks im Kreiſe ſind gegeben; es ſoll der Radius des Kreiſes gefunden werden, der um daſſelbe beſchrieben werden kann.

Gegeben A, B, C, D.

Analyſis. Iſt abcd das Viereck, ſo muß ſeyn $\angle a + \angle dcb = 2\,R^0$; und es iſt daher $\angle a = \angle dc\gamma$. Iſt daher $\angle a < R^0$, ſo iſt $\angle dcb > R^0$; und fället man alſo von d Normalen dα und dγ auf ab und bc: ſo trifft die Normale dα die ab zwiſchen a und b, und bc wird von dγ in der Verlängerung getroffen.



Man ziehe bd, ſo iſt

in $\triangle abd$, $(bd)^2 = (da)^2 + (ab)^2 - 2\,(ab)\,(a\alpha)$ (II. 13.)

in $\triangle cbd$, $(bd)^2 = (cd)^2 + (bc)^2 + 2\,(bc)\,(c\gamma)$ (II. 12.)

Folglich iſt auch

$$(da)^2 + (ab)^2 - 2\,(ab)\,(a\alpha) = (cd)^2 + (bc)^2 + 2\,(bc)\,(c\gamma)$$

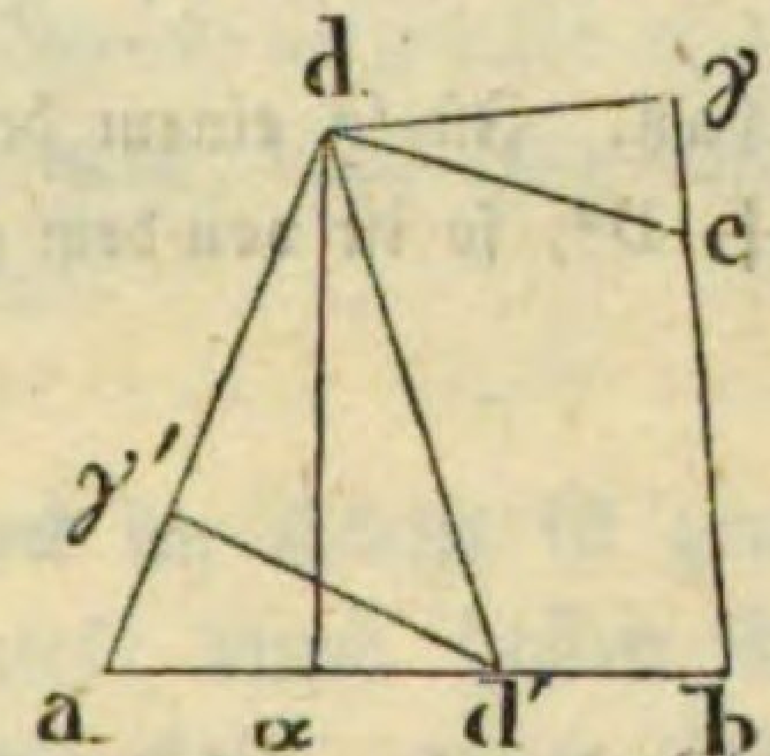
und hieraus folgt unmittelbar

$$(da)^2 + (ab)^2 - (cd)^2 - (bc)^2 = 2\,(ab)\,(a\alpha) + 2\,(bc)\,(c\gamma).$$

Nun sind da, ab, cd und bc, die Seiten des Vierecks also gegeben; und daher auch die Quadrate derselben. Folglich ist auch das Quadrat gegeben, welches erhalten wird, wenn man von der Summe der Quadrate der beiden ersten Seiten die der beiden letzten abzieht; und setzt man die Seite dieses Quadrats = Q, so ist Q^2 gegeben, und es ist nun

$$Q^2 = 2\,(ab)\,(a\alpha) + 2\,(bc)\,(c\gamma).$$

Man nehme $ad' = cd$ und $a\gamma' = c\gamma$: so ist, weil auch $\angle a = \angle dc\gamma$, wenn man $d'\gamma'$ zieht, $\triangle d'a\gamma' \cong \triangle dc\gamma$, und daher bei γ' rechte Winkel. Zieht man also dd', so liegen α und γ' in dem Umfange des Halbkreises, dessen Durchmesser dd' ist (III. 31.); und es ist daher



$$(a\alpha)\,(ad') = (a\gamma')\,(ad) \quad \text{(III. 36.)}$$

also $(a\alpha)\,(cd) = (c\gamma)\,(ad)$.

Da nun aber $Q^2 = 2\,(ab)\,(a\alpha) + 2\,(bc)\,(c\gamma)$ so ist auch

$$Q^2\,(ad) = 2\,(ab)\,(a\alpha) \times (ad) + 2\,(bc) \times (ad)\,(c\gamma)$$

Folglich da $(ad) \times (c\gamma) = (a\alpha) \times (cd)$

$$Q^2\,(ad) = 2\,(ab)\,(a\alpha)\,(ad) + 2\,(bc)\,(a\alpha)\,(cd).$$

Nämlich es ist

$$Q^2 = 2\,(ab)\,(a\alpha) + \frac{2\,(bc) \times (cd)}{(ad)}\,(a\alpha).$$

Und hieraus folgt

$$Q^2 = 2\,(a\alpha) \times \left((ab) + \frac{bc \times cd}{ad} \right)$$

Da nun ab, bc, cd, ad und Q gegeben sind: so ist auch $a\alpha$ gegeben, folglich $\angle a$, und daher das Viereck; und also auch **R.**

Auflösung. 1) Man setze da = **A** und ab = **B** unter einem rechten Winkel an einander, ziehe die Hypotenuse des hierdurch bestimmten rechtwinkligen Dreiecks, und setze diese = m.

2) Eben so setze man bc = **C** und cd = **D** unter einem rechten Winkel an einander, und setze die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks = n.

3) Man verzeichne das rechtwinklige Dreieck, von welchem die Hypotenuse = m und die eine Kathete = n ist, so ist die zweite Kathete dieses Dreiecks = Q.

4) Aus bc = **C** und cd = **D** beschreibe man ein Rechteck,

und verwandele dasselbe in ein anderes, dessen eine Seite = ad = A ist, und setze die zweite Seite dieses Rechtecks = p.

5) Beschreibt man nun ein Rechteck = Q^2, dessen eine Seite man = p + ab = p + B annimmt: so ist die zweite Seite dieses Rechtecks = 2 ($a\alpha$), und es ist also hierdurch $a\alpha$ gefunden.

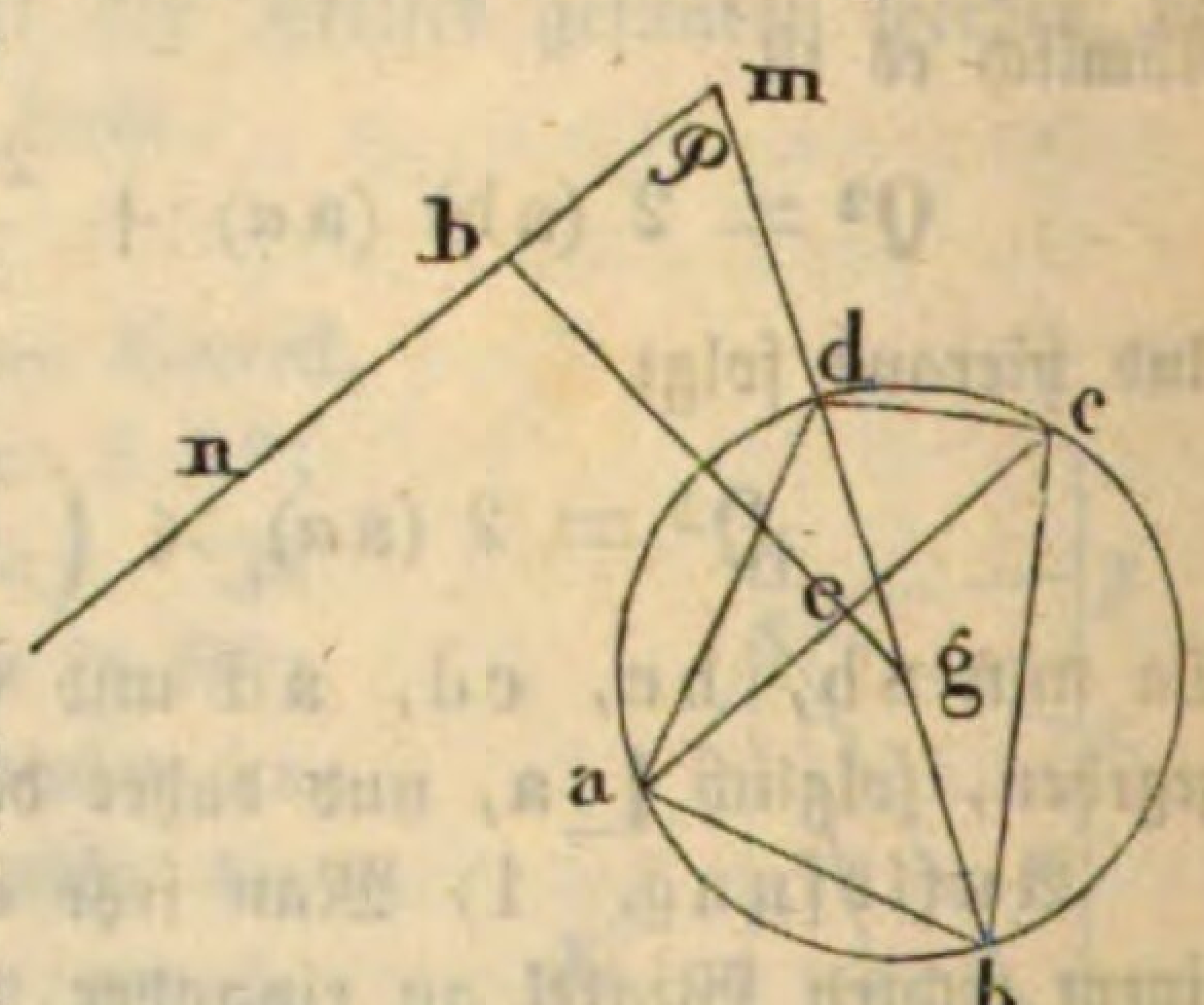
6) Wird nun endlich ein rechtwinkliges Dreieck construirt, von welchem die Hypotenuse = da = A ist, und eine Kathete = $a\alpha$: so ist der an dieser Kathete anliegende Winkel = a, also ein Winkel des Vierecks, und Dieses hierdurch bestimmt.

Zusatz. Ist in einem besonderen Falle m = n, also $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$, so ist von dem gesuchten Viereck ∟a = ∟c ein rechter Winkel.

Aufgabe 409. Von einem Viereck im Kreise ist der Radius R gegeben, die beiden Diagonalen und der Winkel, unter welchem dieselben sich schneiden; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben R, E, F und ∟φ.

Auflösung. Beschreibe mit R einen Kreis, trage die Eine Diagonale bd = F als Sehne ein, verlängere dieselbe, und ziehe an einen Punkt m derselben eine Linie mn unter dem gegebenen Winkel φ. Von dem Mittelpunkte g fälle die Normale gh auf mn, und schneide auf dieser Normale ein Stück ge ab, welches dem Abstande der der Größe nach gegebenen Sehne = E von dem Mittelpunkte gleich ist. Zieht man hierauf durch e die ca parallel mn: so sind die hierdurch, und durch die gegebene bd = F bestimmten Punkte a, b, c, d des Umfanges, die Winkelspitzen des zu beschreibenden Vierecks.



Aufgabe 410. Man kennt von einem Viereck im Kreise den Radius R, die beiden Diagonalen und Eine Seite; es soll das Viereck beschrieben werden.

Gegeben R, E, F und A.

Aufgabe 411. Es ist von einem Viereck im Kreise der Radius R gegeben, Eine Diagonale, und zwei einander gegenüber liegende Seiten.

Gegeben R, E, A und C.

Aufgabe 412. Von einem Viereck im Kreise ist gegeben der Radius R, Eine Diagonale, Eine Seite und Ein Winkel, der an dieser Seite anliegt, und durch dessen Scheitel die gegebene Diagonale geht.

Gegeben R, E, A und $\llcorner$ a.

Aufgabe 413. Es ist von einem Viereck im Kreise gegeben der Radius R, Eine Seite, Eine Diagonale, und der Winkel, unter welchem beide Diagonalen sich schneiden.

Gegeben R, A, E und $\llcorner\ \varphi$.

Aufgabe 414. Von einem Viereck im Kreise ist gegeben der Radius R, Eine Diagonale, der Winkel; durch dessen Spitze die gegebene Diagonale geht, und der Winkel, unter welchem beide Diagonalen sich schneiden; es soll das Viereck beschrieben werden.

Gegeben R, E, $\llcorner$ a und φ.

Analysis. Da von dem Dreieck abd der Radius R des Kreises, der um dasselbe beschrieben werden kann, gegeben ist, und der Winkel bad = a: so ist auch die Seite bd = F desselben gegeben (III. 34.). Folglich kennt man von dem zu beschreibenden Viereck R, E, F und φ, und es ist dasselbe daher gegeben. (Aufgabe 409.)

Aufgabe 415. Von einem Viereck im Kreise kennt man den Radius R, zwei neben einander liegende Seiten, und den Winkel, unter welchem die beiden Diagonalen sich schneiden.

Gegeben R, A, B und $\llcorner\ \varphi$.

Aufgabe 416. Von einem Viereck im Kreise ist der Radius R gegeben, Eine Seite, Ein an derselben anliegender Winkel, und der Winkel, unter welchem beide Diagonalen sich schneiden.

Gegeben R, A, $\llcorner$ a und $\llcorner\ \varphi$.

Aufgabe 417. Man kennt von einem Viereck im Kreise den Radius R, Eine Seite, Einen Winkel, der nicht an der gegebenen Seite anliegt, und den Winkel, unter welchem beide Diagonalen sich schneiden.

Gegeben R, A, $\llcorner$ b und $\llcorner\ \varphi$.

Analysis. Da **R** und $\angle b$ gegeben sind, so ist auch **E** gegeben; also kennt man auch **R**, **E**, **A** und $\angle \varphi$, wodurch das Viereck sich construiren läßt.

Aufgabe 418. Von einem Viereck im Kreise sind drei Seiten und eine Diagonale gegeben; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben **A**, **B**, **C** und **E**.

Analysis. Durch **B**, **C** und **E** ist $\triangle abc$ bestimmt; also auch der Kreis, in welchem dieses Dreieck liegt; und in eben diesem Kreise liegt auch das Viereck.

Aufgabe 419. Es sind von einem Viereck im Kreise zwei Seiten gegeben, der Winkel, den diese Seiten einschließen, und die von der Spitze dieses Winkels ausgehende Diagonale.

Gegeben **A**, **B**, $\angle a$ und **E**.

Aufgabe 420. Von einem Viereck im Kreise kennt man zwei Seiten, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel, und den Winkel, unter welchem die Diagonalen sich schneiden.

Gegeben **A**, **B**, $\angle a$ und $\angle \varphi$.

Aufgabe 421. Man kennt von einem Viereck im Kreise zwei neben einander liegende Seiten; einen an der einen Seite anliegenden, aber nicht von beiden eingeschlossenen Winkel, und die diesem Winkel gegenüber liegende Diagonale.

Gegeben **A**, **B**, $\angle b$ und **E**.

Analysis. Durch **E** und $\angle b$ läßt sich **R** finden (**III. 33.**), und daher auch das ganze Viereck.

Aufgabe 422. Zwei neben einander liegende Seiten eines Vierecks im Kreise sind gegeben; der von den beiden übrigen Seiten eingeschlossene Winkel, und die durch die Spitze dieses Winkels gehende Diagonale.

Gegeben **A**, **B**, $\angle c$ und **E**.

Analysis. Da $\angle a + \angle c = 2\,\mathbf{R}^0$ und $\angle c$ gegeben sind, so ist auch $\angle a$ gegeben; daher $\triangle abd$, und folglich **R**.

Aufgabe 423. Zwei neben einander liegende Seiten eines Vierecks im Kreise sind gegeben, der von den beiden übrigen Seiten eingeschlossene Winkel, und der Winkel, unter welchem die beiden Diagonalen sich schneiden.

Gegeben **A**, **B**, $\angle c$ und $\angle \varphi$.

Aufgabe 424. Es sind von einem Viereck im Kreise gegeben zwei einander gegenüber liegende Seiten, Ein Winkel, und die diesem Winkel gegenüber liegende Diagonale.

Gegeben A, C, $\angle b$ und E.

Analysis. Durch E, C und $\angle b$ ist Δacb gegeben, und daher R; also auch das Viereck.

Aufgabe 425. Von einem Viereck im Kreise sind zwei neben einander liegende Seiten und die beiden Diagonalen gegeben.

Gegeben A, B, E und F.

Aufgabe 426. Es sind von einem Viereck im Kreise die beiden Diagonalen gegeben, Eine Seite, und Ein an derselben anliegender Winkel.

Gegeben E, F, A und $\angle a$.

Aufgabe 427. Man kennt die beiden Diagonalen eines Vierecks im Kreise, eine Seite und einen Winkel, der nicht an dieser Seite anliegt.

Gegeben E, F, A und $\angle b$.

Aufgabe 428. Von einem Viereck im Kreise sind die beiden Diagonalen gegeben; der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, und ein Winkel des Vierecks; man soll Dasselbe verzeichnen.

Gegeben E, F, $\angle \varphi$ und $\angle a$.

Analysis. Da F und $\angle a$ gegeben sind, so ist auch R gegeben (III. 33.); und es läßt sich das Viereck daher beschreiben, wie bei Aufgabe 409.

Aufgabe 429. Es sind von einem Viereck im Kreise gegeben eine Diagonale, und zwei neben einander liegende Winkel; und der Winkel, unter welchem die Diagonalen sich schneiden.

Gegeben E, $\angle a$, $\angle b$ und $\angle \varphi$.

Analysis. Da E und $\angle b$ gegeben sind, so ist R gegeben; und durch R und $\angle a$ ist F der Größe nach bestimmt.

---

§. 27.

Aufgaben von dem Viereck um den Kreis.

Beschreibt man um einen Kreis ein Viereck, so daß die Seiten Desselben Tangenten des Kreises sind: so ist die Summe zweier einander gegenüber liegenden Seiten dieses Vierecks eben so groß, als die Summe der beiden übrigen.

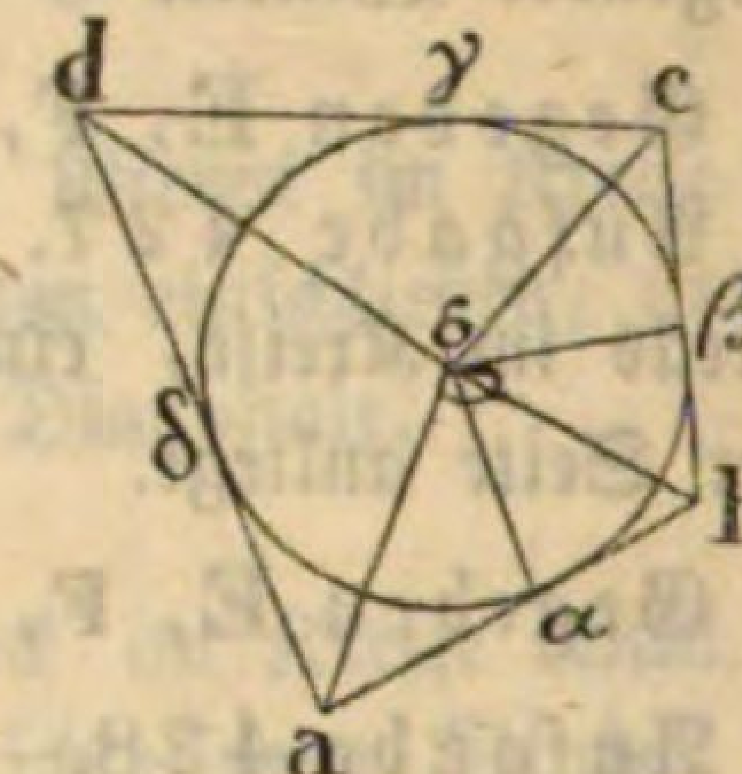
Beweis. Berühren die Seiten des Vierecks abcd den Kreis in den Punkten α, β, γ, δ, so ist

$$\begin{aligned} a\delta &= a\alpha \\ b\beta &= b\alpha \\ c\beta &= c\gamma \\ d\delta &= d\gamma \end{aligned}$$

folglich $(b\beta + c\beta) + (a\delta + d\delta) = (a\alpha + b\alpha) + (c\gamma + d\gamma)$ nämlich es ist

$$bc + ad = ab + cd.$$

Verbindet man den Mittelpunkt g dieses Kreises mit den Ecken a, b, c, d des Vierecks, so werden durch diese Linien die Winkel des Vierecks halbirt; denn es ist, wenn man $g\alpha$ und $g\beta$ zieht, in den bei α und β rechtwinkligen Dreiecken $g\alpha b$ und $g\beta b$



$$\begin{aligned} g\alpha &= g\beta \quad \text{(I. 15. E.)} \\ gb &= gb \\ \angle\alpha &= \angle\beta \end{aligned}$$

daher $\triangle g\alpha b \cong \triangle g\beta b$

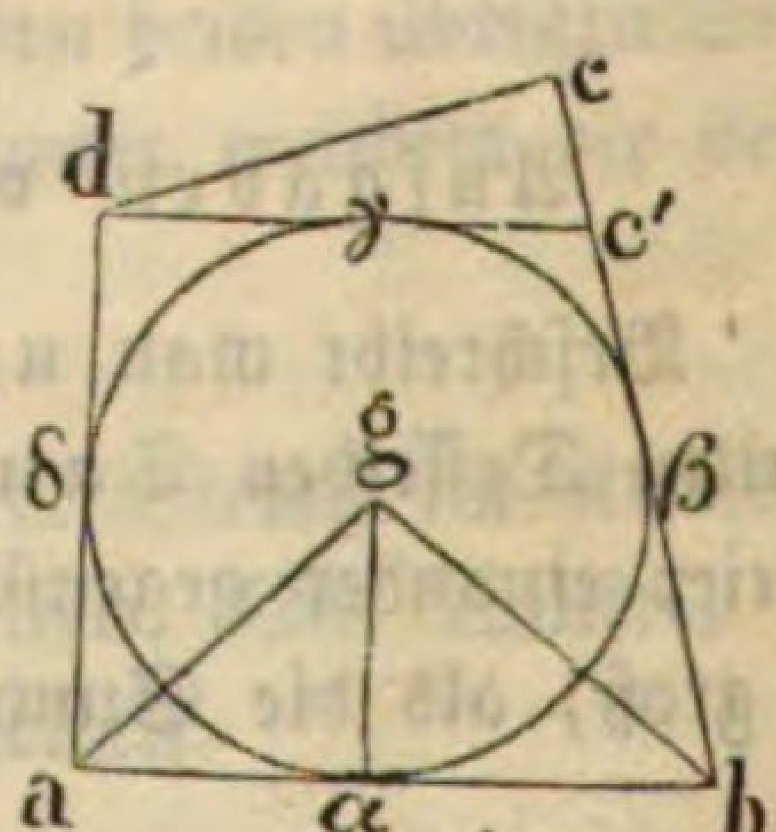
und folglich $\angle gb\alpha = \angle gb\beta$

und aus gleichen Gründen ist auch $\angle gc\beta = \angle gc\gamma$ rc.

Hieraus folgt zugleich: daß, wenn man in irgend einem Viereck zwei neben einander liegende Winkel a und b halbirt, die Halbirungslinien in g sich so schneiden, daß der Punkt g von den drei Seiten da, ab, bc, die diese Winkel einschließen, gleich weit absteht; und es muß daher der aus g mit diesem Abstande beschriebene Kreis diese drei Seiten berühren.

Der Satz, „daß bei einem Viereck um den Kreis zwei einander gegenüber liegende Seiten zusammen so groß, als die beiden übrigen sind", gilt auch umgekehrt: Ist in dem Viereck abcd die Summe der Seiten $ab + cd = bc + ad$, so muß sich in dieses Viereck ein Kreis beschreiben lassen, der alle vier Seiten berührt.

Beweis. Man halbire die neben einander liegenden Winkel a und b; und beschreibe, aus dem Durchschnittspunkte g der Halbirungslinien, mit dem Abstande $g\alpha$ derselben von ab einen Kreis: so berührt Dieser die drei Seiten da, ab, bc. Wird nun die vierte Seite dc von



diesem Kreise nicht berührt: so kann man von d eine Tangente $d\gamma$ an den Kreis ziehen (III. 16.), welche verlängert die bc in c′ treffen mag, so ist nun

$$d\gamma = d\delta$$
$$c'\gamma = \beta c'$$

$$\text{also} \quad dc' = d\delta + \beta c'$$
$$\text{hierzu} \quad c'c = c'c$$

$$\text{giebt} \quad dc' + c'c = d\delta + c\beta.$$

Nun ist aber, nach der Voraussetzung,

$$ab + dc = ad + bc$$
$$\text{und } ab \quad = a\delta + b\beta$$

$$\text{folglich} \quad dc = d\delta + c\beta.$$

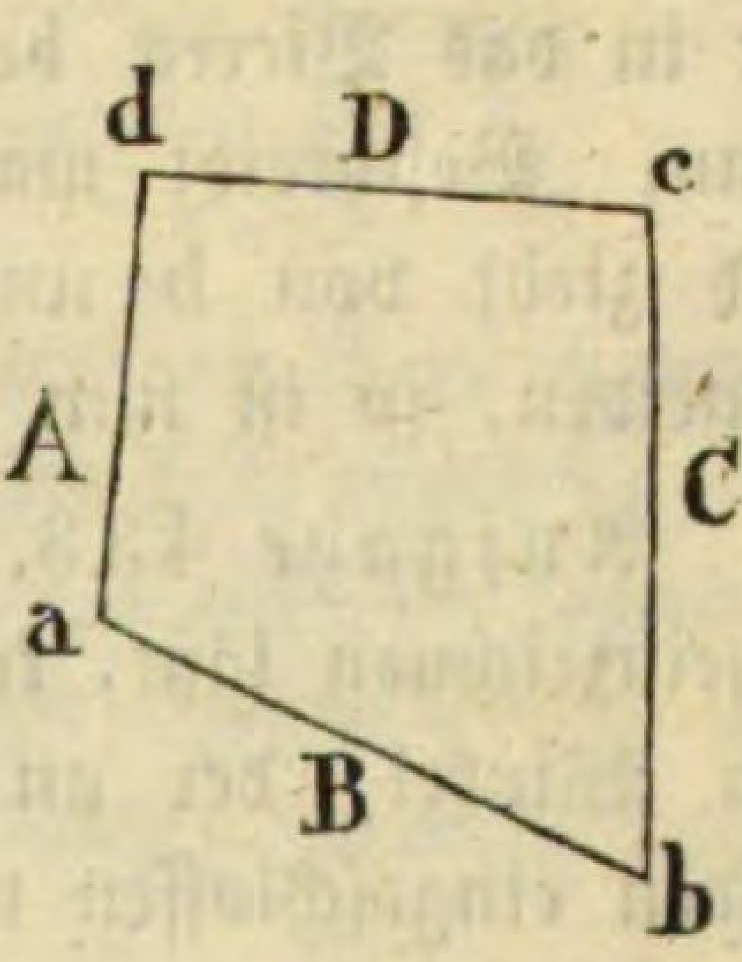
Es muß aber auch seyn

$$dc' + c'c = d\delta + c\beta$$

$$\text{folglich ist} \quad dc = dc' + c'c.$$

Also ist in dem Dreieck dcc′ die eine Seite dc so groß, als die beiden übrigen zusammen; was nicht möglich ist. Folglich kann, von dem Punkte d aus, keine Tangente an den Kreis gezogen werden, die verschieden von dc sey; und es muß daher dc den Kreis berühren.

Anmerkung. Bei einem Viereck um den Kreis werden ebenfalls die vier Seiten der Reihe nach mit A, B, C, D, und die Winkel mit a, b, c, d bezeichnet; so daß ∟ a von A und B, ∟ b von B und C ꝛc. eingeschlossen wird. Der Radius des Kreises, der sich in das Viereck hineinzeichnen läßt, soll mit r bezeichnet werden.



Aufgabe 430. Von einem Viereck, in welches ein Kreis beschrieben werden kann, sind drei Seiten gegeben, und ein Winkel, der von zwei dieser Seiten eingeschlossen wird; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben A, B, C und ∟ a.

Analysis. Da in das Viereck ein Kreis beschrieben werden kann, so ist

$$A + C = B + D.$$

Nun ist **A** und **C**, also auch **A** + **C** gegeben, folglich kennt man auch **B** + **D**; und da **B** gegeben ist, so ist **D** ebenfalls gegeben. Man kennt also von dem Viereck alle vier Seiten und einen Winkel; wodurch das Viereck bestimmt ist.

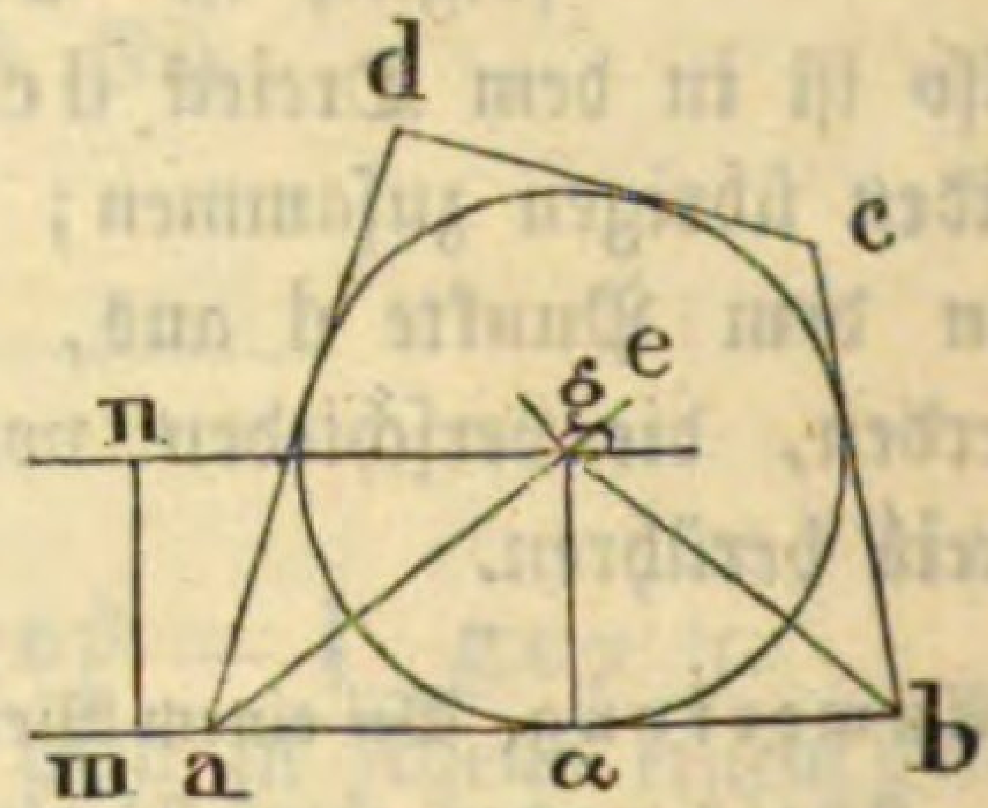
Aufgabe 431. Von einem Viereck, in welches ein Kreis sich beschreiben läßt, sind drei Seiten gegeben und ein Winkel, der an der vierten Seite anliegt; es soll das Viereck beschrieben werden.

Gegeben **A**, **B**, **C** und $\angle$ c.

Aufgabe 432. Von einem Viereck, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, ist der Radius r gegeben, zwei Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben r, **A**, **B** und $\angle$ a.

Auflösung. Setze an ab = **B** den Winkel bad = $\angle$ a, nimm ad = **A**, halbire den Winkel bad durch ae; errichte in irgend einem Punkte m der ab oder deren Verlängerung eine Normale mn = r, und ziehe durch n eine der ab parallele Linie: so schneidet Diese die ae in dem Mittelpunkte g des Kreises, der in das Viereck beschrieben werden kann. Beschreibt man diesen Kreis, und zieht von b und d Tangenten an denselben, die sich in c schneiden, so ist nun abcd das verlangte Viereck.



Aufgabe 433. Von einem Viereck, in welches sich ein Kreis hineinzeichnen läßt, kennt man den Radius r, zwei Seiten, und den Winkel, der an einer dieser Seiten anliegt, aber nicht von beiden eingeschlossen wird.

Gegeben r, **A**, **B** und $\angle$ b.

Analysis. Halbirt man den Winkel b (Fig. Aufg. 432.), so liegt der Mittelpunkt g des Kreises in dieser Linie; und da mn = r gegeben ist, so ist's auch g, und daher der Kreis der Größe und Lage nach. Da nun auch ba = **B** gegeben ist, so ist der Punkt a gegeben; also die Tangente ad, welche von a aus an den Kreis gezogen wird, der Lage nach; und weil ad = **A** seyn muß, so ist auch der Punkt d, und daher die Tangente dc der Lage nach gegeben. Aber durch $\angle$ b ist auch bc der Lage nach gegeben, folglich auch der Punkt c, und daher das Viereck.

Aufgabe 434. Es sind von einem Viereck, das um einen Kreis sich beschreiben läßt, vier neben einander liegende Stücke (also zwei neben einander liegende Seiten, der von denselben eingeschlossene, und ein an der einen Seite anliegender Winkel) gegeben; man soll das Viereck beschreiben.

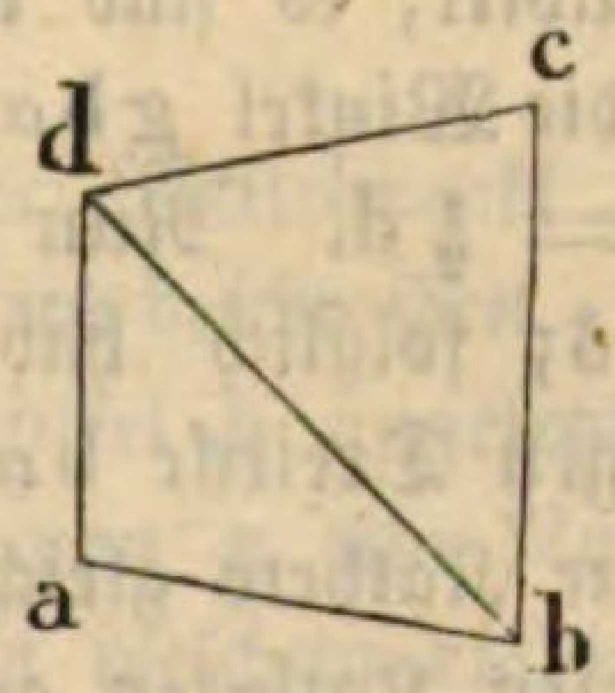
Gegeben A, $\angle a$, B und $\angle b$.

Analysis. Halbirt man $\angle a$ und $\angle b$, so schneiden sich die Halbirungslinien in dem Mittelpunkte des Kreises, der daher der Lage nach gegeben ist; und folglich ist auch r gegeben, und daher das Viereck.

Aufgabe 435. Man kennt von einem Viereck, in das ein Kreis sich beschreiben läßt, zwei neben einander liegende Seiten, den von denselben eingeschlossenen Winkel, und den Winkel, der von den beiden übrigen Seiten eingeschlossen wird; es soll das Viereck beschrieben werden.

Gegeben A, B, $\angle a$ und $\angle c$.

Analysis. Da in das Viereck ein Kreis sich beschreiben läßt, so ist



$$ab + cd = bc + ad$$

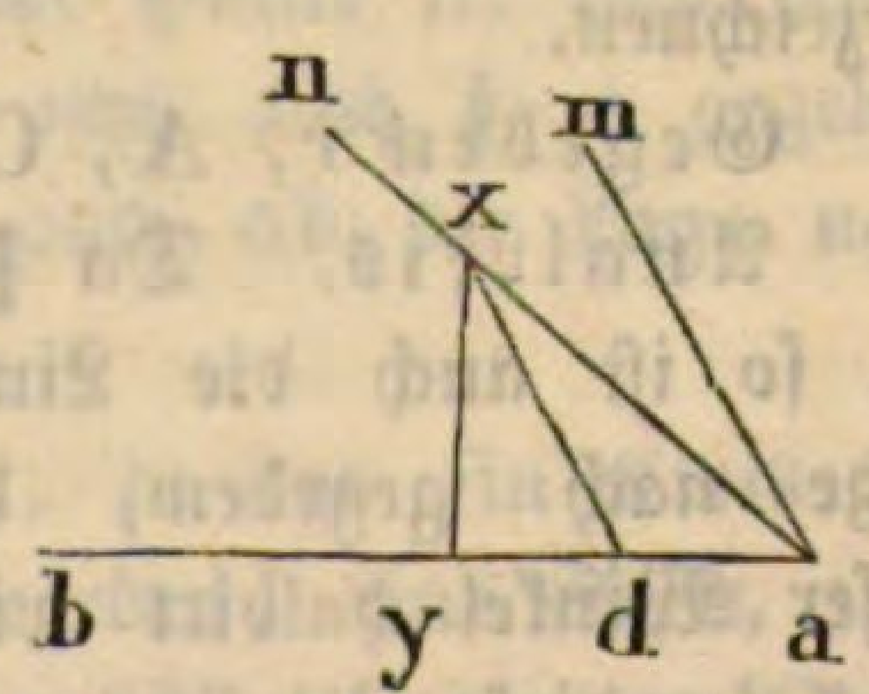
und daher auch

$$ab - ad = bc - cd.$$

Nun ist $ab = B$ und $ad = A$ gegeben, also auch $ab - ad = B - A$; folglich ist $bc - cd$ ebenfalls gegeben.

Da $ad = A$, $ab = B$ und $\angle a$ gegeben sind, so ist $\triangle abd$, und folglich auch bd gegeben. Es ist aber auch $\angle c$ gegeben; man kennt also von $\triangle bcd$ die Seite bd, den ihr gegenüber liegenden Winkel c, und die Differenz der beiden übrigen Seiten $bc - cd = B - A$; folglich ist das Dreieck gegeben (Aufg. 97. Seite 145.), und hierdurch das ganze Viereck.

Aufgabe 436. Zwei rechtwinklige Dreiecke haben die eine Kathete gemein, und es sind die Winkel gegeben, welche in diesen Dreiecken der gemeinschaftlichen Kathete gegenüber liegen. Außerdem kennt man die Differenz der beiden unbekannten Katheten; es sollen die Dreiecke verzeichnet werden.



Auflösung. Es sey mab der gegebene Winkel des einen und nab des andern Dreiecks; man nehme ad gleich der gegebenen

Differenz der unbekannten Katheten, ziehe durch d die dx paraller ma, und fälle von x die xy normal auf ab: so ist axy das eine, und dxy das andere der beiden zu construirenden Dreiecke.

Aufgabe 437. Von einem Viereck, das um einen Kreis sich beschreiben läßt, kennt man zwei neben einander liegende Seiten, und die beiden an diesen Seiten anliegenden Winkel, von welchen jedoch keiner durch diese Seiten eingeschlossen wird; man soll das Viereck beschreiben.

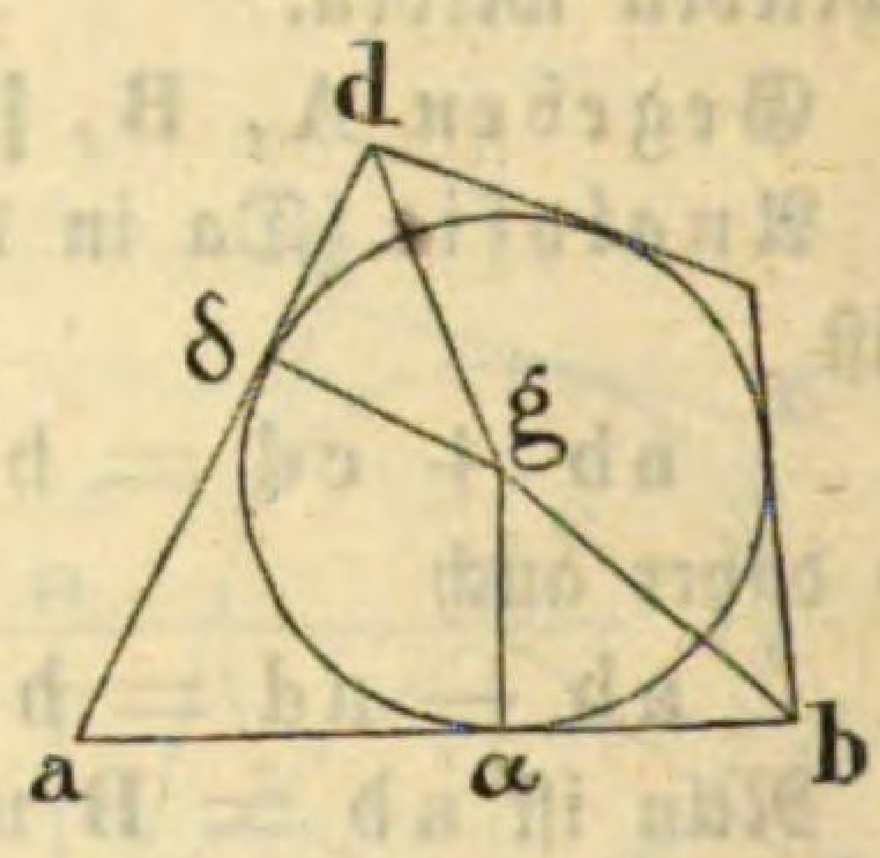
Gegeben A, B, ∟ b und ∟ d.

Analysis. Da ab = B und ad = A gegeben sind, so ist auch gegeben

$$ab - ad = B - A$$

und weil $a\alpha = a\delta$, so ist

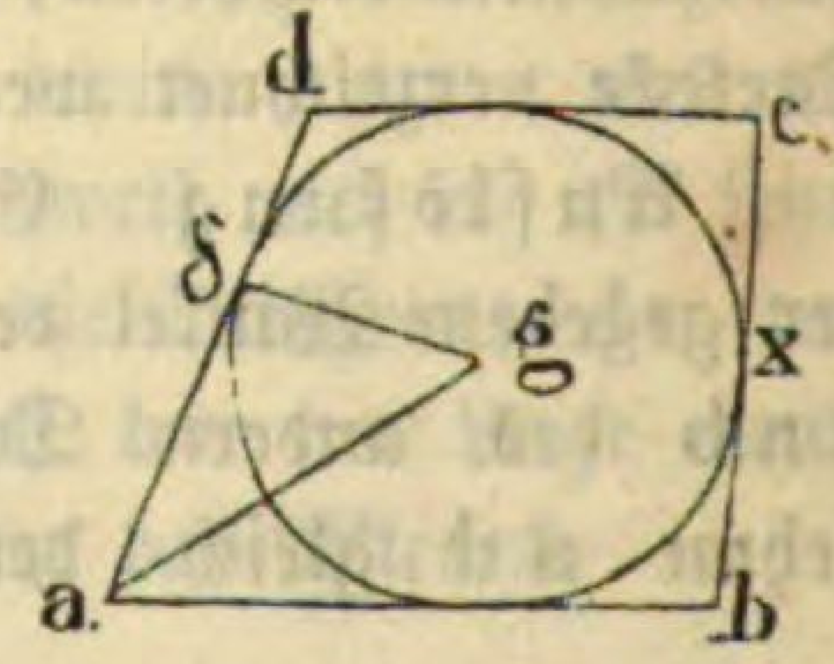
$$\alpha b - \delta d = B - A \text{ gegeben.}$$



Ist g der Mittelpunkt des Kreises, so wird der gegebene Winkel b durch bg und ∟ d durch dg halbirt; es sind also auch gegeben die Winkel $gb\alpha = \frac{1}{2}b$ und $gd\delta = \frac{1}{2}d$. Nun ist aber $g\alpha = g\delta$; folglich haben die rechtwinkligen Dreiecke $b\alpha g$ und $d\delta g$ die eine Kathete gleich $g\alpha = g\delta$; die diesen Katheten gegenüber liegenden Winkel $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}d$ sind gegeben,
und man kennt außerdem die Differenz der beiden andern Katheten $b\alpha - d\delta = B - A$.
Folglich können die Dreiecke beschrieben werden (Aufg. 436.), und es ist daher $g\alpha = g\delta = r$ gegeben; also kennt man von dem Viereck A, B, ∟ b und r, wodurch dasselbe bestimmt ist (Aufg. 433.).

Aufgabe 438. Von einem Viereck, in welches ein Kreis beschrieben werden kann, ist der Radius r gegeben, zwei einander gegenüber liegende Seiten und ein Winkel; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben r, A, C und ∟ a.



Analysis. Da ∟ a gegeben ist, so ist auch die Linie ag der Lage nach gegeben, durch welche dieser Winkel halbirt wird, und es liegt in dieser Linie der Mittelpunkt

g des Kreises. Nun ist der Radius $g\delta = r$ gegeben, folglich der Punkt g, und der Kreis kann daher beschrieben werden. Da $ad = A$ gegeben ist, so kennt man den Punk d, und daher dc der Lage nach; und auch ab ist der Lage nach gegeben. Wird nun in des Kreises Umfang der Punkt x so bestimmt, daß die Tangente dieses Punktes $bc = C$ wird (Aufg. 381.): so erhält man hierdurch das gesuchte Viereck.

Aufgabe 439. Man kennt von einem Viereck, in das ein Kreis beschrieben werden kann, zwei einander gegenüber liegende Seiten, und die beiden an der einen dieser Seiten anliegenden Winkel.

Gegeben A, C, ∟a und ∟d.

Aufgabe 440. Von einem Viereck, in welches ein Kreis beschrieben werden kann, ist der Radius r gegeben, eine Seite, und zwei neben einander liegende Winkel, von welchen der Eine an der gegebenen Seite anliegt.

Gegeben r, A, ∟a und ∟b.

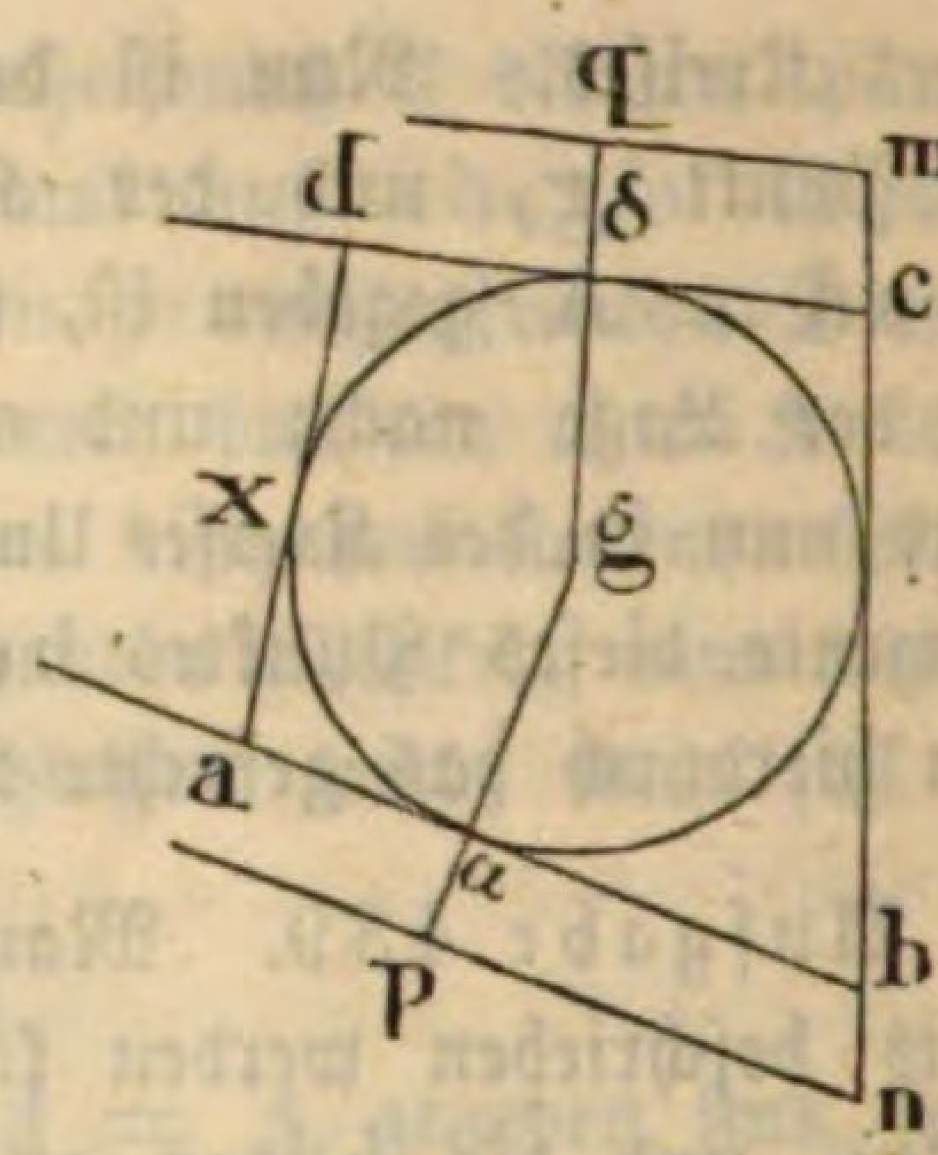
Analysis. Durch ∟a und r ist der Mittelpunkt g des Kreises gegeben, und man kann daher den Kreis beschreiben. Wird nun an irgend einen Punkt der ab der Winkel b angesetzt, und man fället auf den zweiten Schenkel desselben von g eine Normale: so schneidet diese den Kreis in dem Punkte, in welchem die bc den Kreis berührt, und es ist daher bc der Lage nach gegeben. Da aber $ad = A$ gegeben ist, so ist dc ebenfalls der Lage nach gegeben, und folglich das gesuchte Viereck.

Aufgabe 441. Es ist von einem Viereck, in das ein Kreis sich beschreiben läßt, der Radius r gegeben, eine Seite und zwei einander gegenüber liegende Winkel.

Gegeben r, A, ∟a und ∟c.

Analysis. Durch ∟a und r ist der Kreis der Größe und Lage nach gegeben; und durch A auch der Punkt d, und daher die Tangente dc der Lage nach; und da nun auch ∟c gegeben ist, so ist, wie bei der vorigen Aufgabe, auch cb der Lage nach gegeben.

Aufgabe 442. Von einem Viereck, in das ein Kreis beschrieben werden kann, ist der Radius r gegeben, eine Seite, und die beiden Winkel, welche an der dieser gegenüber liegenden Seite



anliegen; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben r, A, ∠ b und ∠ c.

Auflösung. Mit r beschreibe einen Kreis, ziehe eine Tangente mn an denselben, trage an diese Linie in m den Winkel c und in n den ∠ b an, und fälle die Normalen gq und gp. Durch die Punkte α und δ, wo diese Normalen den Kreis schneiden, ziehe ba und cd parallel den Linien np und mq. Hierauf suche in dem Umfange des Kreises den Punkt x von der Lage, daß die Tangente ad dieses Punktes = A wird (Aufgabe 381.): so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 443. Von einem Viereck um einen Kreis ist Eine Seite gegeben und drei Winkel; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben A, ∠ a, ∠ b und ∠ c.

Analysis. Da drei Winkel gegeben sind, so ist auch der vierte gegeben; man kennt also A, ∠ a und ∠ d, und daher r; und folglich von dem Viereck A, ∠ b, ∠ c und r, wodurch die Figur bestimmt ist (Aufg. 442.).

Aufgabe 444. Von einem Viereck um einen Kreis ist der Radius r gegeben und drei Winkel; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben r, ∠ a, ∠ b, und ∠ c.

Aufgabe 445. Es sind drei gerade Linien gegeben; man soll ein Viereck beschreiben, von welchem diese Linien Seiten sind, und es soll dieses Viereck die Eigenschaft haben, daß sich sowohl in als um dasselbe ein Kreis beschreiben läßt.

Gegeben A, B, und C.

Analysis. Da sich in das Viereck ein Kreis soll beschreiben lassen, so ist durch A, B und C auch die vierte Seite D bestimmt; indem A + C = B + D, also D = A + C − B seyn muß. Folglich kennt man alle vier Seiten, und daher den Radius R des Kreises, der um dieses Viereck sich beschreiben läßt (Aufg. 408.), und also auch die Figur.

Aufgabe 446. Von einem Viereck, in und um welches ein Kreis sich beschreiben läßt, sind zwei Seiten gegeben und der

von denselben eingeschlossene Winkel; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben A, B und $\angle a$.

Analysis. Da ein Kreis um das Viereck beschrieben werden kann, so ist $a + c = 2R$ (III. 22.), und da $\angle a$ gegeben ist, so ist auch $\angle c$ gegeben. Folglich kennt man von dem Viereck, in welches ein Kreis sich beschreiben läßt, A, B, a und c, und daher das Viereck selbst (Aufg. 435.)

Aufgabe 447. Man kennt von einem Viereck, in und um welches ein Kreis sich beschreiben läßt, zwei neben einander liegende Seiten, und einen Winkel, der an einer dieser Seiten anliegt, aber nicht von beiden eingeschlossen wird; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben A, B und $\angle b$.

Analysis. Weil ein Kreis um das Viereck sich beschreiben läßt, so ist $\angle b + \angle d = 2R^{o}$ also d gegeben; und daher von dem Viereck A, B, $\angle b$ und $\angle d$, wodurch dasselbe sich construiren läßt (Aufg. 437.).

Aufgabe 448. Von einem Viereck, in und um das ein Kreis sich beschreiben läßt, ist der Radius R gegeben, und zwei neben einander liegende Seiten; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben R, A und B.

Analysis. Durch R, A und B, ist auch $\angle a$, und folglich $\angle c$ gegeben, und daher das Viereck (Aufg. 435.).

Aufgabe 449. Man kennt von einem Viereck, in und um das ein Kreis sich beschreiben läßt, den Radius R, Eine Seite, und einen an derselben anliegenden Winkel; es soll das Viereck verzeichnet werden.

Gegeben R, A und $\angle a$.

Analysis. Da R, A und $\angle a$ gegeben sind, so ist auch B und $\angle c$ gegeben.

Aufgabe 450. Von einem Viereck, in und um welches ein Kreis sich beschreiben läßt, ist der Radius r gegeben, Eine Seite, und ein an derselben anliegender Winkel; man soll das Viereck beschreiben.

Gegeben r, A und $\angle a$.

Analysis: Weil um das Viereck ein Kreis sich beschreiben läßt, so ist durch a auch $c = 2R^{o} - a$ gegeben; und man kennt daher r, A, a und c, folglich das Viereck (Aufg. 441.)

Aufgabe 451. Es sind von einem Viereck, in und um das ein Kreis sich beschreiben läßt, gegeben der Radius r, Eine Seite, und ein Winkel, der nicht an dieser Seite anliegt.

Gegeben r, A und $\angle b$.

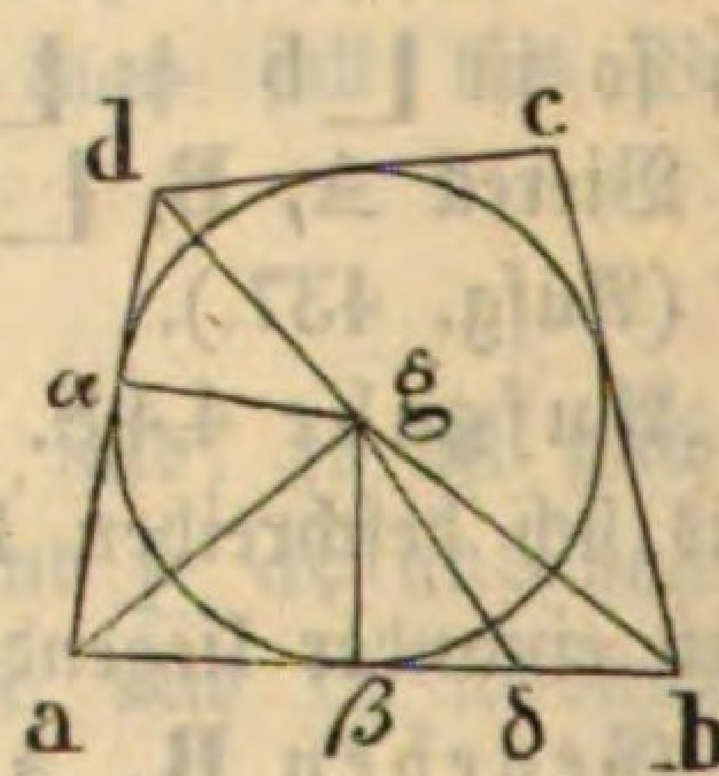
Aufgabe 452. Von einem Viereck, in und um das ein Kreis sich beschreiben läßt, ist der Radius r gegeben und zwei neben einander liegende Winkel; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben r, $\angle a$ und $\angle b$

Analysis. Da um das Viereck ein Kreis sich beschreiben läßt, so ist durch $\angle a$ auch $\angle c$ gegeben; folglich kennt man 3 Winkel und r, und daher das Viereck.

Aufgabe 453. Von einem Viereck, in und um welches ein Kreis sich beschreiben läßt, ist der Radius r gegeben, und zwei neben einander liegende Seiten; man soll das Viereck verzeichnen.

Gegeben r, A und B.



Analysis. Es sey abcd das Viereck; $g\alpha = g\beta = r$, $da = A$, $ab = B$; man nehme $a\delta = ad$, so ist $b\delta = B - A$ gegeben.

Da $a\delta = ad$
und $a\alpha = a\beta$

so ist $\beta\delta = \alpha d$
aber $g\beta = g\alpha$
und $\angle\beta = \angle\alpha = R^0$

folglich ist $\Delta g\beta\delta \cong \Delta g\alpha d$, und daher $\angle g\delta\beta = \angle gd\alpha$.

Da um das Viereck ein Kreis sich soll beschreiben lassen, so ist $\angle d + \angle b = 2R^0$; und da diese Winkel durch gd und gb halbirt werden, so ist

$$\angle gd\alpha + \angle gb\beta = R^0$$
$$\text{aber } \angle gd\alpha = \angle g\delta\beta.$$

$$\text{Folglich } \angle g\delta\beta + \angle gb\beta = R^0$$
$$\text{aber auch } \angle g\delta\beta + \angle\beta g\delta = R^0$$

$$\text{es ist also } \angle gb\beta = \angle\beta g\delta.$$

Wird daher um $\Delta gb\delta$ ein Kreis beschrieben (5.), so berührt βg diesen Kreis in g (III. 32.); und es ist daher

$$(\beta g)^2 = \beta\delta \times \beta b \text{ (III. 36.)}$$
$$= \beta\delta\,[\beta\delta + \delta b].$$

Nun ist $\beta g = r$ gegeben, und auch $\delta b = B - A$; also kann $\beta\delta$ gefunden werden; wobei es nur darauf ankömmt, die gegebene δb so zu verlängern, daß das unter der verlängerten Linie und der Verlängerung derselben enthaltene Rechteck dem Quadrate der gegebenen βg gleich werde (Seite 207. Aufg. 1.).

Da hiernach $b\beta$ gefunden wird, und $ba = B$ gegeben ist, so kennt man auch βa; es ist nun aber auch $\beta g = r$ gegeben, folglich das rechtwinklige Dreieck $\beta a g$, und daher $\llcorner \beta a g = \frac{1}{2} a$. Folglich ist $\llcorner a$ gegeben, und man kennt also von dem Viereck A, B, $\llcorner a$ und r, wodurch dasselbe bestimmt ist. (Aufg. 446.).

---

§. 28.

Einige Aufgaben von den Vielecken.

Aufgabe 454. Die Zahl der Seiten, von welchen ein Vieleck eingeschlossen wird, ist gegeben; man soll hieraus bestimmen, wie groß die Summe aller Winkel dieses Vielecks ist.

Auflösung. Nimmt man innerhalb der Figur beliebig einen Punkt an, und verbindet diesen mit allen Ecken derselben, so erhält man eben so viel Dreiecke, als Seiten die Figur hat. Da nun die Summe aller Winkel eines Dreiecks $= 2 R^o$, so ist die Summe der Winkel aller dieser Dreiecke $= n \times 2 R^o$, wenn die Figur von n Seiten begrenzt ist. Werden hiervon alle die Winkel abgezogen, welche um den angenommenen Punkt herum liegen und die zusammen $4 R^o$ betragen: so bleibt die Summe aller Winkel der Figur übrig, welche daher $n \times 2 R^o - 4 R^o = n \times 2 R^o - 2 \times 2 R^o = (n - 2)\, 2 R^o$ beträgt.

Aufgabe 455. Die Größe eines jeden Winkels von einem regulairen Vieleck soll bestimmt werden.

Auflösung. Wird das regulaire Vieleck von n Seiten begrenzt, so ist die Summe aller Winkel $= (n - 2) \,.\, 2 R^o$. Da nun bei einer regulairen Figur alle Winkel gleich groß sind, so ist jeder Winkel $= \frac{(n - 2) \,.\, 2 R^o}{n} = \left(\frac{n - 2}{n}\right) . \, 2 R^o$.

Zusatz. Man theilt den rechten Winkel in 90 Grad $= 90^o$, und jeden Grad in 60 Minuten $= 60'$ à 60 Secunden $= 60''$. Der Winkel eines

regulairen Vielecks ist daher auch $= \left(\frac{n-2}{n}\right) . 180^\circ$, und es ist daher der Winkel von dem regulairen

Dreieck	$= \frac{1}{3} . 2 R^\circ$	$= \frac{2}{3} R^\circ$	$= 60^\circ$
Viereck	$= \frac{2}{4} . 2 R^\circ$	$= R^\circ$	$= 90^\circ$
Fünfeck	$= \frac{3}{5} . 2 R^\circ$	$= \frac{6}{5} R^\circ$	$= 108^\circ$
Sechseck	$= \frac{4}{6} . 2 R^\circ$	$= \frac{4}{3} R^\circ$	$= 120^\circ$
Siebeneck	$= \frac{5}{7} . 2 R^\circ$	$= \frac{10}{7} R^\circ$	$= 128^\circ\ 34\frac{2}{7}'$
Achteck	$= \frac{6}{8} . 2 R^\circ$	$= \frac{3}{2} R^\circ$	$= 135^\circ$
Neuneck	$= \frac{7}{9} . 2 R^\circ$	$= \frac{14}{9} R^\circ$	$= 140^\circ$
Zehneck	$= \frac{8}{10} . 2 R^\circ$	$= \frac{8}{5} R^\circ$	$= 144^\circ$ ꝛc.

Aufgabe 456. Es soll angegeben werden „wie viel Diagonalen in einem Vieleck gezogen werden können".

Auflösung. Von jeder Ecke der Figur können Diagonalen an alle übrigen Ecken gezogen werden; nur an die beiden zunächst anliegenden Ecken nicht, weil diese mit den Seiten zusammen fallen. Ist die Figur also ein neck, so können von jeder Ecke $n - 3$ Diagonalen gezogen werden, und von allen n Ecken zusammen $n \times (n - 3)$ Diagonalen. Hierbei ist aber jede Diagonale zwei Mal gezogen; denn sind z. B. a und d zwei durch eine Diagonale verbundene Ecken, so ist diese ein Mal gerechnet, indem man sie als von a nach d gezogen annimmt, und ein Mal als von d nach a gezogen. Die Anzahl aller Diagonalen ist daher halb so groß, als der gefundene Ausdruck, und sie beträgt also $\frac{n\,(n-3)}{2}$. Die Zahl der Diagonalen wird also erhalten, wenn man die Zahl der Seiten der Figur mit der um 3 verkleinerten Zahl multiplicirt, und von dem Produkte die Hälfte nimmt.

Aufgabe 457. Es soll angegeben werden, „wie viel Diagonalen von verschiedener Größe in einem regulairen Vieleck gezogen werden können".

Auflösung. Von einer Ecke a aus können immer zwei Diagonalen, eine rechts und eine links, von gleicher Größe gezogen werden. Da nun die Anzahl aller von einer Ecke ausgehenden Diagonalen $= n - 3$ ist (Aufg. 456.): so würde die Zahl der Diagonalen von verschiedener Größe, die von einer Ecke aus gezogen werden können $= \frac{n-3}{2}$ seyn, wenn nicht für eine

gerade Zahl = n der Ausdruck $\frac{n-3}{2}$ einen Bruch gäbe. Bei einem solchen Vieleck aber geht Eine Diagonale durch den Mittelpunkt des Kreises, und diese kömmt bei jeder Ecke nur einmal vor; daher erhält man, bei einem regulairen Vieleck mit einer geraden Anzahl Seiten, von jeder Ecke $\frac{n-4}{2}$ Diagonalen von verschiedener Größe; und außerdem noch Eine, welche die größte von allen ist, und die durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Hiernach ist die Zahl der Diagonalen von verschiedener Größe, die von einer Ecke aus in einem regulairen Vieleck gezogen werden können, wenn n eine ungerade Zahl ist $= \frac{n-3}{2}$, und für eine gerade Zahl $n = \frac{n-4}{2} + 1$; und Dieses ist überhaupt die Zahl der verschiedenen Diagonalen, weil dieselben Diagonalen bei jeder Ecke wieder vorkommen.

Aufgabe 458. Wie viel Diagonalen von einer jeden Größe können in einem regulairen Vieleck gezogen werden?

Auflösung. Wird die Figur von n Seiten begrenzt, und ist n eine ungerade Zahl: so ist die Anzahl aller Diagonalen von derselben Größe, welche gezogen werden können, = n, wenn $n > 3$. Ist n aber eine gerade Zahl und > 4, so ist, mit Ausnahme der größten Diagonalen, ebenfalls die Zahl der Diagonalen von derselben Größe = n; die Anzahl der möglichst größten Diagonalen aber beträgt nur $\frac{n}{2}$.

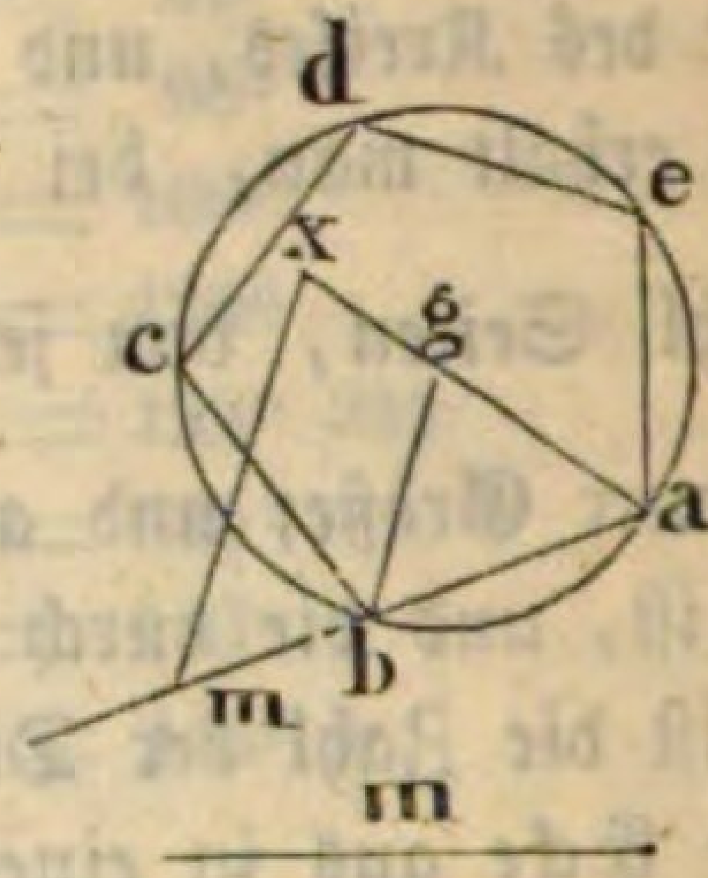
Aufgabe 459. Von einem regulairen n eck ist der Radius **R** des Kreises gegeben, der um dasselbe beschrieben werden kann; man soll die Seite finden.

Auflösung. Beschreibt man mit **R** den Kreis, und theilt den Umfang desselben in n gleiche Theile: so ist die Sehne, welche zwei neben einander liegende Theilpunkte verbindet, die gesuchte Seite.

Aufgabe 460. Der Radius r des Kreises ist gegeben, der in ein regulaires n eck beschrieben werden kann; man soll das Vieleck beschreiben.

Auflösung. Beschreibe mit r den Kreis, theile den Umfang desselben in n gleiche Theile, und ziehe durch die Theilpunkte Tangenten an den Kreis: so ist das Verlangte geschehen.

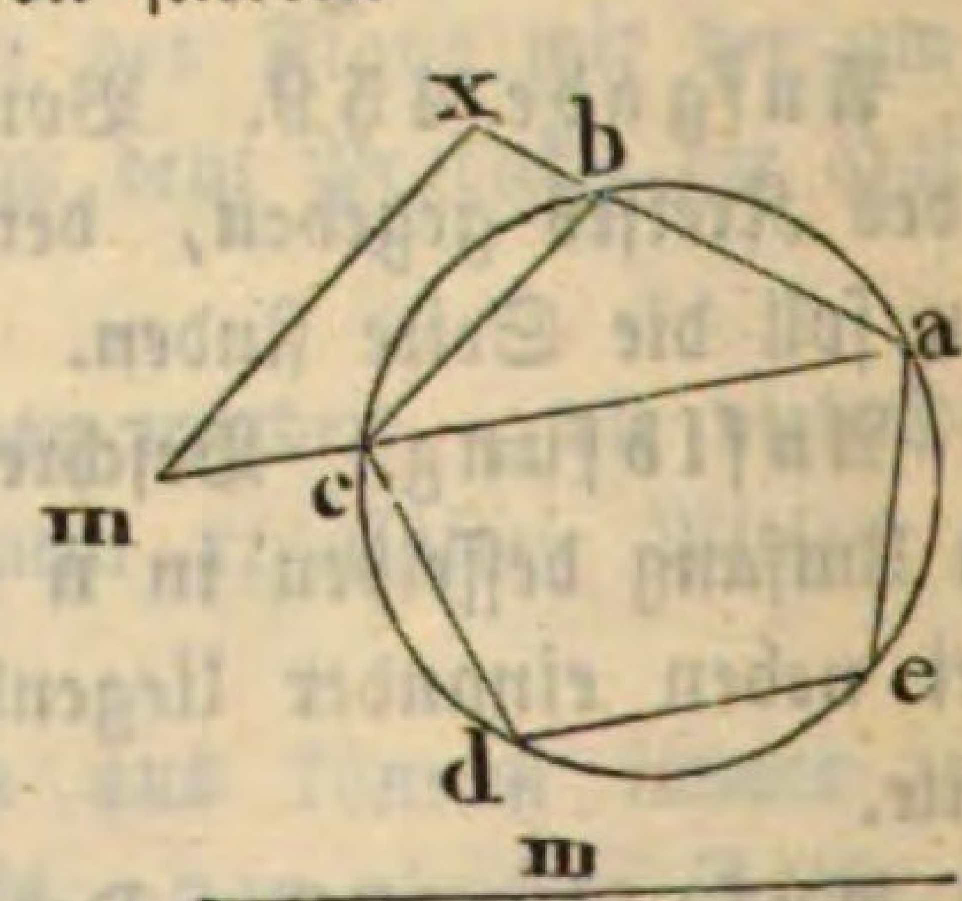
Aufgabe 461. Die Seite eines regulairen n ecks ist gegeben; man soll die Radien der beiden dazu gehörigen Kreise finden.



Auflösung. Mit einem beliebigen Radius g a beschreibe einen Kreis, theile den Umfang desselben in so viel gleiche Theile, als Seiten das Vieleck haben soll; und verbinde je zwei neben einander liegende Theilpunkte, wodurch ein regulaires Vieleck a b c d e erhalten wird. Auf der einen Seite a b desselben nehme man a m = m so groß, als die gegebene Seite des Vielecks ist; ziehe g a, g b, und durch m eine Parallele mit b g, bis sie die a g in x schneidet: so ist x a = x m der Radius des Kreises, der um das gesuchte Vieleck sich beschreiben läßt; und fället man von x eine Normale auf a m, so ist diese der Radius von dem Kreise, der in das Vieleck beschrieben werden kann.

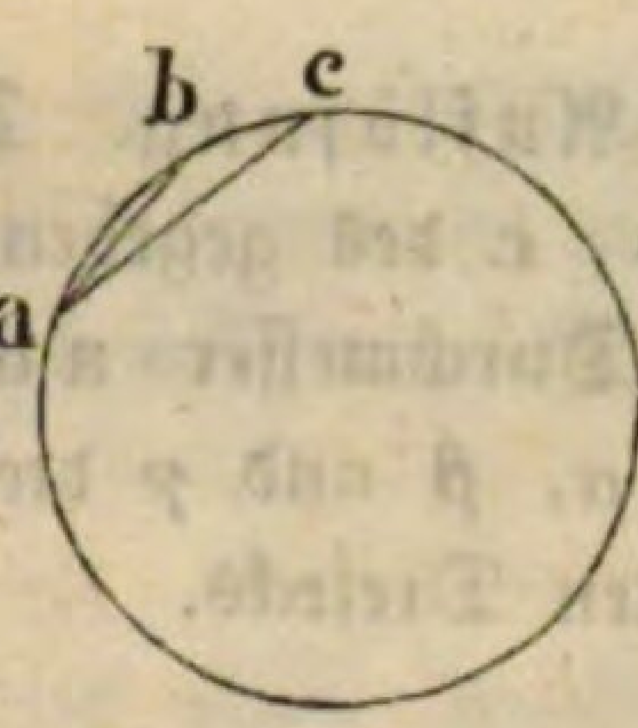
Anmerkung. Die drei letzten Aufgaben lassen sich nur insofern lösen, in wiefern es geometrisch möglich ist, eines Kreises Umfang in die entsprechende Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufgabe 462. Die Diagonale eines regulairen Fünfecks ist gegeben; man soll die Seite desselben finden.



Auflösung. Man beschreibe mit einem beliebigen Radius einen Kreis, und in denselben ein regulaires Fünfeck a b c d e; ziehe die Diagonale a c, und nehme auf derselben a m = m so groß, als die gegebene Diagonale ist. Durch m ziehe man m x parallel der Seite c b, bis sie die a b in x schneidet: so ist x a = x m die gesuchte Seite des Fünfecks.

Aufgabe 463. Eines Kreises Umfang ist in 9 gleiche Theile getheilt; es soll derselbe hierdurch nun auch in 45 gleiche Theile getheilt werden.



Auflösung. Ist der Bogen ab der 9te Theil des Umfanges, so trage von a aus die Seite ac des regulairen Fünfecks in den Kreis hinein (10.), und theile den Bogen bc in vier gleiche Theile, so ist das Verlangte geschehen; denn es ist

$$\text{ac} = \tfrac{1}{5} = \tfrac{9}{45} \text{ des Umfanges}$$
$$\text{und ab} = \tfrac{1}{9} = \tfrac{5}{45} \text{ „ „}$$

$$\text{daher ac} - \text{ab} = \text{bc} = \tfrac{4}{45};$$
und folglich der 4te Theil von bc $= \frac{1}{45}$ des Umfanges.

Aufgabe 464. Eines Kreises Umfang ist in 9 gleiche Theile getheilt; man soll denselben dadurch nun auch in 360 gleiche Theile theilen.

Auflösung. Theile den Umfang in 45 gleiche Theile, und durch fortgesetztes Halbiren (III. 30.) jeden dieser Theile wieder in 8 gleiche Theile: so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 465. Eines Kreises Umfang ist in 17 gleiche Theile getheilt; man soll denselben hierdurch nun auch in 51 gleiche Theile theilen.

Auflösung. Nimmt man 6 der Theile, von welchen jeder $= \frac{1}{17}$ des Umfanges ist, so erhält man $\frac{6}{17} = \frac{18}{51}$ von dem Umfange; und wird des Kreises Umfang nun in 3 gleiche Theile getheilt, so erhält man $\frac{1}{3} = \frac{17}{51}$. Dieses von Jenem abgezogen giebt $\frac{18}{51} - \frac{17}{51} = \frac{1}{51}$ des Kreisumfanges.

Aufgabe 466. Der Umfang eines Kreises ist in 17 gleiche Theile getheilt; es soll derselbe hierdurch nun auch in 85 gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung. Man theile denselben in 5 gleiche Theile, und ziehe 2 solche Theile $= \frac{2}{5}$, von 7 Theilen, deren jeder $\frac{1}{17}$ ist, also von $\frac{7}{17}$ ab: so ist der Unterschied $= \frac{1}{85}$ von dem Umfange.

Aufgabe 467. Der Umfang eines Kreises ist in 17 gleiche Theile getheilt; man soll denselben hierdurch nun auch in $15 \times 17 = 255$ gleiche Theile theilen.

Auflösung. Nimm $\frac{2}{85}$ (Aufg. 466.) $= \frac{6}{255}$, und ziehe davon $\frac{1}{51} = \frac{5}{255}$ ab, so ist der Rest $= \frac{1}{255}$.

Aufgabe 468. In einem Kreise ist ein Dreieck abc beschrieben; man soll ein anderes, demselben congruentes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ so hineinzeichnen, daß die Seiten desselben den Seiten es Ersteren parallel sind.

Auflösung. Durch die Spitzen a, b, c des gegebenen Dreiecks ziehe die Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$: so sind α, β und γ die Spitzen des gesuchten Dreiecks.



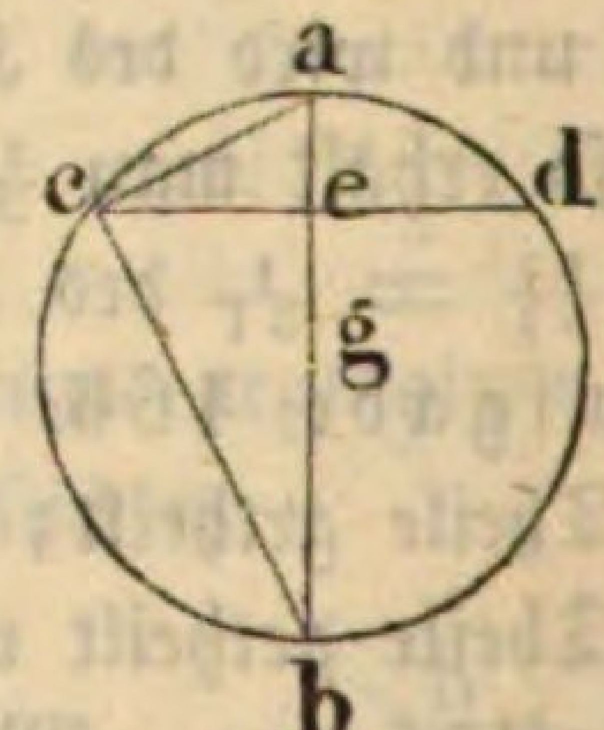
XXII. Lehrsätze.

Lehrsatz 146. Das Quadrat der Seite eines regulairen Vielecks, und das Quadrat von dem Durchmesser des Kreises, der in das Vieleck beschrieben werden kann, sind zusammen dem Quadrate von dem Durchmesser des Kreises gleich, der um dieses Vieleck sich beschreiben läßt.

Beweis (I. 47.).

Lehrsatz 147. Beschreibt man in und um ein regulaires neck einen Kreis, so ist das unter dem Durchmesser des größeren Kreises und der Differenz der Radien beider Kreise enthaltene Rechteck dem Quadrate der Seite eines regulairen 2 necks gleich, das mit dem neck in demselben Kreise liegt.

Beweis. Ist cd die Seite des regulairen necks, und man halbirt diese Linie in e, und zieht durch e und den Mittelpunkt g den Durchmesser ab: so ist, wenn nun ac gezogen wird, diese Linie die Seite des 2 necks. Zieht man nun cb, so ist in Δacb.



$$(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 - 2\,[ae \times ab] \quad \text{(II. 13.)}$$

und da $(ab)^2 = (bc)^2 + (ac)^2$ (III. 31.)

$$(bc)^2 = (bc)^2 + 2\,(ac)^2 - 2\,[ae \times ab]$$

folglich ist $2\,(ae \times ab) = 2\,(ac)^2$

also $ae \times ab = (ac)^2$

und daher auch $(ga - ge) \times (ab) = (ac)^2$.

Es ist aber $ga = R$, $ab = 2\,R$ und $ge = r$

folglich ist auch $(ac)^2 = (R - r)\,.\,2\,R$.

Lehrsatz 148. Beschreibt man in einen Kreis ein regulaires neck und ein regulaires 2 neck, so ist das unter dem

Durchmesser dieses Kreises und der Summe der Radien von diesem Kreise, und von dem Kreise, der in das n eck beschrieben werden kann, enthaltene Rechteck dem Quadrate des Durchmessers des Kreises gleich, der in das 2 n eck sich beschreiben läßt.

Beweis (Lhrs. 146.) und (Lhrs. 147.).

Lehrsatz 149. Der Abstand der Seite eines regulairen Dreiecks im Kreise von dem Mittelpunkte desselben ist halb so groß, als der Radius dieses Kreises.

Beweis (15.).

Lehrsatz 150. Das Quadrat der Seite eines regulairen Dreiecks im Kreise ist 3 Mal so groß, als das Quadrat von dem Radius dieses Kreises.

Beweis (Lhrs. 149.) und (I. 47.)

Lehrsatz 151. Das Quadrat der Seite eines regulairen Dreiecks im Kreise ist 3 Mal so groß, als das Quadrat von dem Durchmesser des Kreises, der in dieses Dreieck beschrieben werden kann.

Beweis (Lhrs. 149.) und (Lhrs. 150.).

Lehrsatz 152. Wird ein regulaires Dreieck in und um einen Kreis beschrieben, so ist die Seite des letzteren 2 Mal so groß, als die des ersteren.

Beweis (Lhrs. 149.) und (I. 6.).

Lehrsatz 153. Das regulaire Viereck im Kreise ist halb so groß, als das Quadrat von dem Durchmesser dieses Kreises.

Beweis (I. 47.).

Lehrsatz 154. Der Radius des Kreises, der in ein regulaires Viereck beschrieben werden kann, ist der Hälfte der Seite dieses Vierecks gleich.

Beweis (8.).

Lehrsatz 155. Wird um und in ein regulaires Viereck ein Kreis beschrieben, so ist das Quadrat von dem ersteren Kreise 2 Mal so groß, als von dem letzteren.

Beweis (I. 47.).

Lehrsatz 156. Die Seite des regulairen Sechsecks im Kreise ist dem Radius dieses Kreises gleich.

Beweis (15.).

Lehrsatz 157. Das Quadrat von dem Durchmesser des Kreises, der in ein regulaires Sechseck beschrieben werden kann, ist 3 Mal so groß, als das Quadrat der Seite dieses Sechsecks.

Beweis (Lhrs. 146.) und (15.).

Lehrsatz 158. Das vierfache Quadrat der Seite eines regulairen Sechsecks in dem Kreise ist dem dreifachen Quadrate der Seite des Sechsecks um diesen Kreis gleich.

Beweis. (Lhrs. 157.).

Lehrsatz 159. Werden in einem regulairen Fünfeck zwei sich schneidende Diagonalen gezogen, so ist der größere Abschnitt einer jeden dieser Diagonalen der Seite des Fünfecks gleich.

Beweis (III. 21.), (I. 16. und 6.).

Lehrsatz 160. Wenn man die Endpunkte einer Seite eines regulairen Zehnecks im Kreise mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet: so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, von welchem jeder der beiden Winkel an der Grundlinie 2 Mal so groß ist, als der Winkel an der Spitze.

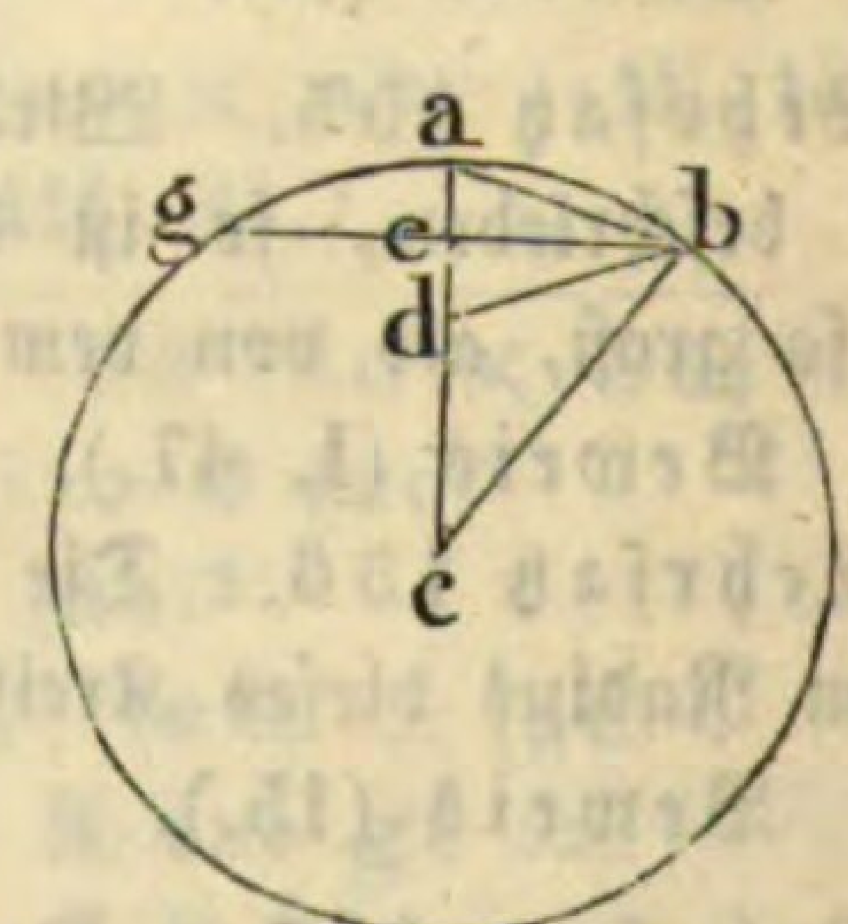
Beweis (III. 27.) und (I. 32.).

Lehrsatz 161. Wird der Radius eines Kreises so geschnitten, daß das Quadrat des einen Theiles dem unter dem anderen Theile und dem Radius enthaltenen Rechteck gleich ist (II. 11.), so ist der größere Abschnitt die Seite des regulairen Zehnecks in dem Kreise.

Beweis (10.).

Lehrsatz 162. Beschreibt man in einen Kreis ein regulaires Fünfeck und ein regulaires Zehneck, so ist die Seite des Zehnecks und der Radius des Kreises zusammen dem Durchmesser des Kreises gleich, der in das regulaire Fünfeck hinein gezeichnet werden kann.

Beweis. Wenn ab die Seite des Zehnecks ist, so wird für cd = ab auch bd = ab (10.), also Δabd gleichschenklig; und nimmt man nun den Bogen ag = ab und zieht bg, so ist diese Linie die Seite des regulairen Fünfecks im Kreise, und es wird ad von der bg normal geschnitten; folglich ist ae = ed und ce der Radius des Kreises, der in das Fünfeck beschrieben werden kann. Nun ist



$$\begin{aligned} cd &= ab \\ \text{und}\quad de &= ae \\ \hline \text{also}\quad ce &= ab + ae \\ \text{und}\quad ce &= \phantom{ab +{}} ec \\ \hline \text{folglich}\quad 2\,(ce) &= ab + ac \end{aligned}$$

was bewiesen werden sollte.

Lehrsatz 163. Das unter der Seite des regulairen Zehnecks und dem Radius des Kreises, der um dasselbe beschrieben werden kann, enthaltene Rechteck ist eben so groß, als die Differenz der Quadrate dieses Radius und der Seite des Zehnecks.

Beweis. Für $cd = ab$ ist

$$\begin{aligned} (cd)^2 &= ac \times ad \quad (10.) \\ \text{also auch}\quad (ab)^2 &= ac \times ad \\ &= ac \times (ac - cd) \\ &= ac \times (ac - ab) \\ \hline \text{und daher}\quad (ab)^2 &= (ac)^2 - ac \times ab \end{aligned}$$

und hieraus folgt unmittelbar

$$ac \times ab = (ac)^2 - (ab)^2.$$

Lehrsatz 164. Beschreibt man in einen Kreis ein regulaires Fünfeck und ein regulaires Zehneck, so ist das Quadrat der Seite des Fünfecks eben so groß, als das Quadrat des Radius, sammt dem Quadrate der Seite des Zehnecks.

Beweis. Es ist $ad = ac - cd = ac - ab$

$$\begin{aligned} \text{und}\quad ad &= 2\,(ae) \\ \hline \text{also}\quad ae &= \frac{ac - ab}{2}. \end{aligned}$$

Nun ist $(be)^2 = (ab)^2 - (ae)^2$

folglich auch $(be)^2 = (ab)^2 - \left(\frac{ac - ab}{2}\right)^2$

und $4\,(be)^2 = 4\,(ab)^2 - 4 \cdot \frac{(ac - ab)^2}{4}$

und weil $bg = 2\,(be)$, so ist $(bg)^2 = 4\,(be)^2$

folglich wird $(bg)^2 = 4\,(ab)^2 - (ac - ab)^2$

und da $(ac - ab)^2 = (ac)^2 - 2\,(ac \times ab) + (ab)^2$

so ist auch

$(bg)^2 = 4\ (ab)^2 - (ac)^2 + 2\ (ac \times ab) - (ab)^2$

also $(bg)^2 = 3\ (ab)^2 - (ac)^2 + 2\ (ac \times ab)$.

Da nun $ac \times ab = (ac)^2 - (ab)^2$ (Lhrs. 163.)

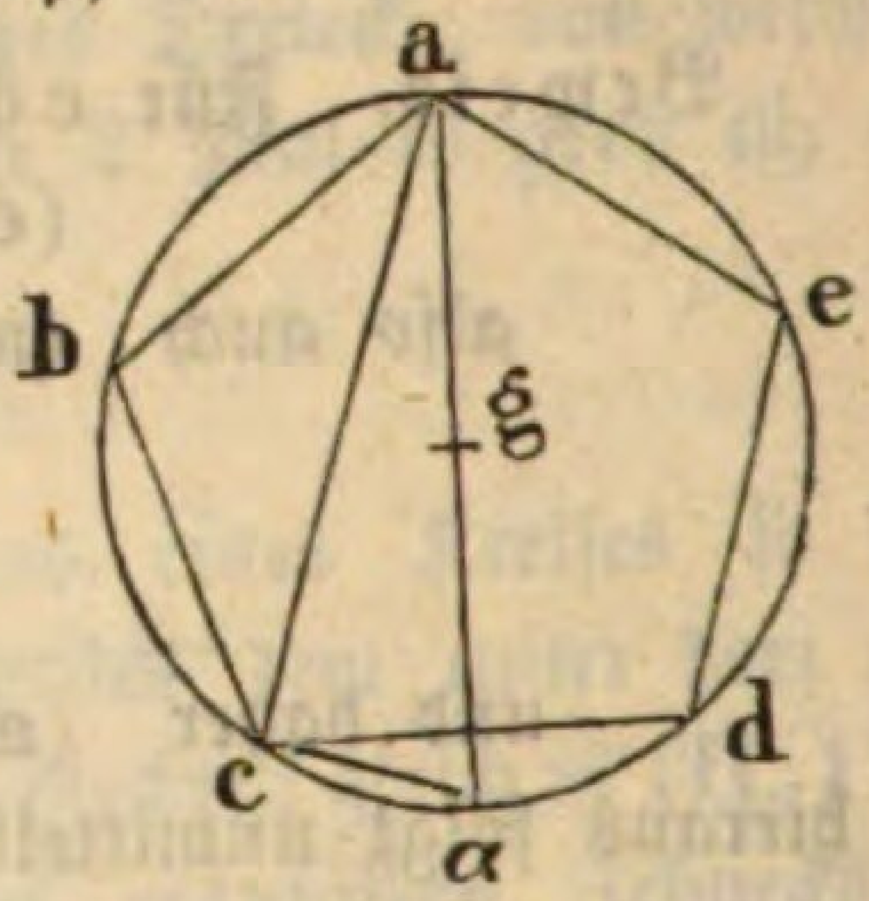
so wird

$$(bg)^2 = 3\ (ab)^2 - (ac)^2 + 2\ [(ac)^2 - (ab)^2]$$
$$= 3\ (ab)^2 - (ac)^2 + 2\ (ac)^2 - 2\ (ab)^2$$

folglich ist $(bg)^2 = (ab)^2 + (ac)^2$

was bewiesen werden sollte.

Lehrsatz 165. Beschreibt man in einen Kreis ein regulaires Fünfeck, so ist das Quadrat der Seite und der einen Diagonale desselben zusammen 5 Mal so groß, als das Quadrat des Radius.



Beweis. Es sey abcde das regulaire Fünfeck, $a\alpha$ ein Durchmesser und g der Mittelpunkt des Kreises: so ist, wenn man ca und $c\alpha$ zieht, ca die Diagonale des Fünfecks, und $c\alpha$ die Seite des regulairen Zehnecks im Kreise;

folglich ist $(g\alpha)^2 + (c\alpha)^2 = (cd)^2$ (Lhrs. 164.)

und $(ac)^2 = (ac)^2$

daher $(g\alpha)^2 + (ac)^2 + (c\alpha)^2 = (cd)^2 + (ac)^2$.

Nun ist aber $ac\alpha$ ein rechter Winkel (III. 31.)

und daher $(ac)^2 + (c\alpha)^2 = (a\alpha)^2 = (2 \cdot g\alpha)^2 = 4\ (g\alpha)^2$

folglich ist auch

$$(g\alpha)^2 + 4\ (g\alpha)^2 = (cd)^2 + (ac)^2$$
$$\text{also}\ \ 5\ (g\alpha)^2 = (cd)^2 + (ac)^2.$$

Lehrsatz 166. Beschreibt man in einen und denselben Kreis ein regulaires Fünfeck und ein regulaires Zehneck: so ist das Quadrat der Diagonale des Fünfecks und das Quadrat der Seite des Zehnecks zusammen dem Quadrate von dem Durchmesser des Kreises gleich.

Beweis (III. 31.) und (I. 47.).

Lehrsatz 167. Beschreibt man in einen Kreis ein regulaires Dreieck, Viereck und Fünfeck: so ist das Quadrat der Seite und das der Diagonale des Fünfecks zusammen eben so groß, als das Quadrat des Dreiecks, sammt dem Quadrate des Vierecks.

Beweis (Lhrs. 165.), (Lhrs. 150.) und (Lhrs. 153.).

Lehrsatz 168. Die Fläche eines regulairen Vielecks ist einem Dreieck gleich, von welchem der Umfang des Vielecks die Grundlinie, und der Radius des Kreises, der in dasselbe beschrieben werden kann, die Höhe ist.

Beweis (I. 38.).

Lehrsatz 169. Wenn man in und um einen Kreis ein regulaires Dreieck beschreibt, so ist das Letztere 4 Mal so groß, als das Erstere.

Beweis (Lhrs. 152.).

Lehrsatz 170. Wird ein regulaires Dreieck und Sechseck in demselben Kreise beschrieben, so ist das Sechseck 2 Mal so groß als das Dreieck.

Beweis (14.) und (I. 8.).

Lehrsatz 171. Beschreibt man in einen Kreis ein regulaires Dreieck, so ist dasselbe 3 Mal so groß, als das gleichseitige Dreieck, dessen Seite der Radius ist.

Beweis (Lhrs. 170.).

Lehrsatz 172. Wird in und um einen Kreis ein Quadrat beschrieben, so ist das Letztere 2 Mal so groß, als das Erstere.

Beweis (6.), (7.) und (I. 47.).

Lehrsatz 173. Jedes Viereck ist halb so groß, als das Parallelogramm, welches aus den beiden Diagonalen desselben unter dem Winkel, unter welchem sie sich schneiden, beschrieben werden kann.

Beweis. Zieht man durch die Ecken des Vierecks Parallelen mit den Diagonalen, so folgt die Richtigkeit des Satzes alsdann aus I. 41.

Lehrsatz 174. Wenn die Diagonalen eines Vierecks unter rechten Winkeln sich schneiden, so ist das Rechteck der beiden Diagonalen doppelt so groß als das Viereck.

Beweis (Lhrs. 173.).

Lehrsatz 175. Beschreibt man ein regulaires Zwölfeck in einen Kreis, so ist dasselbe 3 Mal so groß, als das Quadrat des Radius dieses Kreises.

Beweis (Lhrs. 174.).

Lehrsatz 176. Wenn man die vier Seiten eines Vierecks zu beiden Seiten verlängert, und hierauf vier außerhalb des Vierecks liegende Kreise beschreibt, von welchen jeder eine Seite des Vierecks, und von den beiden anliegenden Seiten ihre Verlänge-

rungen berührt: so liegen die Mittelpunkte dieser vier Kreise in dem Umfange eines und desselben Kreises.

Beweis (Lhrs. 47. Seite 83) und (III. 22.).

Lehrsatz 177. Wird irgend eine Figur von einer geraden Anzahl Seiten um einen Kreis beschrieben, so daß alle Seiten derselben Tangenten des Kreises sind: so ist immer, wenn man von irgend einer Seite zu zählen anfängt, die Summe der ersten, dritten, fünften Seite rc. der Summe der zweiten, vierten, sechsten rc. gleich.

Beweis. Dieser hängt von dem Satze ab, daß die beiden Tangenten, welche von einem Punkte an den Kreis gezogen werden können, immer gleich groß sind. (Anm. S. 281.)

Lehrsatz 178. Beschreibt man irgend eine geradlinige Figur um einen Kreis, so daß alle Seiten derselben Tangenten des Kreises sind: so ist diese Figur einem Dreieck gleich, das den Umfang der Figur zur Grundlinie und den Radius des Kreises, um den sie beschrieben ist, zur Höhe hat.

Beweis (I. 37.).

Lehrsatz 179. Beschreibt man in einen Kreis ein Dreieck und ein anderes um denselben, so daß die Seiten dieses Dreiecks den Kreis in den Punkten berühren, in welchen die Spitzen des ersten Dreiecks liegen: so wird jeder Winkel des Dreiecks um den Kreis durch das Zweifache des gegenüber liegenden Winkels des Dreiecks in dem Kreise zu zwei rechten Winkeln ergänzt.

Beweis (III. 32.).

Lehrsatz 180. Beschreibt man ein Dreieck in einen Kreis und legt durch die Ecken desselben Tangenten, so bilden diese nur in dem Falle ein Dreieck um den Kreis, wenn das in den Kreis beschriebene Dreieck ein spitzwinkliges ist.

Beweis (Lhrs. 179.).

Lehrsatz 181. Beschreibt man um einen Kreis ein Dreieck, so ist der zwischen je zwei Berührungspunkten liegende Bogen des Kreisumfanges kleiner als der Halbkreis.

Beweis (Lhrs. 179.) und (5.).

Lehrsatz 182. Werden zwei Winkel eines Dreiecks und die Nebenwinkel derselben halbirt: so schneiden die vier Halbirungslinien sich in vier Punkten, von welchen zwei und zwei mit dem Scheitel des dritten Winkels dieses Dreiecks in gerader Linie liegen.

Beweis (I. 15., 16. und 32.); (III. 21. und 22.) und (4.).

Das fünfte Buch der Elemente.

Erklärungen

1) Eine Größe ist ein Theil von einer andern, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau mißt.

2) Die größere aber ist von der kleineren ein Vielfaches, wenn sie von der kleineren genau gemessen wird.

Erläuterung. Ist die Linie a zwei-, drei- oder vier Mal, oder überhaupt eine gewisse Anzahl Mal so groß als b: so ist

a ein Vielfaches von b, und

b ist ein Theil von a.

Eben so ist, wenn die Figur A zwei- oder drei- rc. Mal so groß als die Figur B ist,

A ein Vielfaches von B, und

B ein Theil von A.

Jede Zahl ist ein Vielfaches von einer anderen, wenn sie dieselbe als Factor enthält; und es ist umgekehrt jede Zahl, die Factor einer anderen ist, ein Theil derselben. Daher ist z. B. 36 ein Vielfaches von 3 und 3 ein Theil von 36.

Wenn von zwei Zahlen keine ein Factor der anderen ist, so ist auch Keine von Beiden ein Theil oder ein Vielfaches der Anderen; wohl aber können alsdann Beide noch ein Theil oder ein Vielfaches von einer dritten seyn. So sind z. B. 5 und 4 jede für sich ein Theil von 40, und jede der Zahlen 15 und 27 ist ein Vielfaches von 3.

---

3) Verhältniß ist die zweien gleichartigen Größen in Rücksicht ihrer Größe gegen einander zukommende Beschaffenheit.

4) Ein Verhältniß zu einander haben Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.

Erläuterung. Ein Verhältniß überhaupt ist die Vergleichung zweier Größen mit einander, und es wird das Resultat dieser Vergleichung der Verhältnißnahme genannt. Sieht man bei der Vergleichung bloß darauf, wie die eine der beiden Größen aus der andern durch Addition erhalten wird: so nennt man das Verhältniß arithmetisch, und der Verhältnißnahme ist die Differenz beider Größen. Wird bei der Vergleichung aber darauf gesehen, wie die eine Größe durch Multiplication aus der anderen entsteht, so ist das Verhältniß geometrisch, und es wird alsdann der Verhältnißnahme der Exponent des Verhältnisses genannt. In der Geometrie werden nur die Verhältnisse der letzteren Gattung berücksichtigt.

Ein Verhältniß kann nur zwischen gleichartigen Größen statt finden, da ungleichartige sich gar nicht mit einander vergleichen lassen.

Der Exponent eines geometrischen Verhältnisses kann nicht in allen Fällen durch ganze oder gebrochene Zahlen vollständig angegeben werden. Z. B.

1. Beschreibt man in und um einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck, so ist die Seite des Letzteren zwei Mal so groß als die des Ersteren, und die Fläche ist viermal so groß. Der Exponent des Verhältnisses der Seiten dieser Dreiecke ist also $= 2$, und der ihrer Flächen $= 4$.

2. Beschreibt man in und um einen Kreis ein regulaires Sechseck, so ist die Fläche des Letztern $1\frac{1}{3}$ Mal so groß, als die des Ersteren. Der Exponent des Verhältnisses der Flächen beider Figuren ist daher $= 1\frac{1}{3}$.

3. Wird in und um einen Kreis ein Quadrat beschrieben, so läßt sich der Exponent des Verhältnisses der Seiten dieser beiden Quadrate durch ganze oder gebrochene Zahlen nicht angeben (dieser Exponent ist irrational); dessen ungeachtet findet ein Verhältniß zwischen denselben statt, denn beide sind Linien und also gleichartig.

Das Merkmal, woraus sich erkennen läßt, ob zwischen zwei gegebenen Größen ein Verhältniß statt findet, wird durch die 4te Erklärung angegeben.

Ein Verhältniß findet immer zwischen zwei gegebenen Größen statt, wenn von der Einen ein Vielfaches genommen werden kann, welches größer als die Andere ist. Zwischen einer Linie und einer Fläche kann daher kein Verhältniß statt finden, da kein Vielfaches einer Linie eine Fläche geben kann.

Ein Verhältniß wird nie allein betrachtet, sondern es werden immer zwei Verhältnisse mit einander verbunden, und daher hat es auch keinen Einfluß, wenn in einem besonderen Falle der Exponent des Verhältnisses nicht vollständig angegeben werden kann. So unterliegt es keinem Zweifel: daß, wenn man zwei Kreise mit verschiedenen Radien beschreibt, und sowohl in als um jeden dieser Kreise ein Quadrat beschreibt, die Seiten der beiden Quadrate des einen Kreises dasselbe Verhältniß zu einander haben, wie bei dem Anderen.

5) **In einerlei Verhältniß** sind die Größen **A**, **B**, **C** und **D** zu einander; und es verhält sich also die Erste **A** zu der Zweiten **B**, wie eine Dritte **C** zu der Vierten **D** sich verhält: wenn von beliebigen Gleichvielfachen der ersten und dritten **A** und **C**, und beliebigen Gleichvielfachen der Zweiten und Vierten **B** und **D**, die Vielfachen der Ersten und Dritten zugleich, entweder kleiner, oder eben so groß, oder größer sind, als die Vielfachen der Zweiten und vierten, nach der Ordnung mit einander verglichen.

4) **Proportionirt** heißen Größen, die in einerlei Verhältniß sind.

Erläuterung. Hängen die Größen A, B, C, D so von einander ab, daß für zwei ganz beliebig angenommene Zahlen m und n, wenn man das m fache der Ersten und Dritten, und das n fache der Zweiten und Vierten nimmt, also

mA		mC	
	nB		nD

und es ist, welche Zahlen m und n auch seyn mögen,

wenn $mA < nB$ zugleich auch $mC < nD$
„ $mA = nB$ „ „ $mC = nD$
„ $mA > nB$ „ „ $mC > nD$

so sind die Verhältnisse von A zu B und C zu D einerlei, und die vier Größen sind proportionirt.

Die Größen A, B, C und D sind also proportionirt, wenn

bei der Voraussetzung $mA \gtreqless nB$
zugleich auch ist $mC \gtreqless nD$.

Gewöhnlich giebt man die Erklärung: es ist das Verhältniß von A zu B mit dem von C zu D einerlei, wenn beide Verhältnisse denselben Exponenten haben. Diese Erklärung ist eine nothwendige Folge von der obigen; sie ist aber nicht so allgemein wie jene, da, wie bereits bemerkt worden ist, Fälle vorkommen, wo der Exponent sich nicht vollständig angeben läßt. Ein Mehreres hierüber, so wie über die 7te Erklärung, enthält die Beilage XXIV.

---

7) **Ein größeres Verhältniß** hat von den vier Größen **A**, **B**, **C**, **D** die Erste **A** zu der Zweiten **B**, als die Dritte **C** zu der vierten **D**: wenn, von den bei der 5ten Erklärung angegebenen Vielfachen, das der Ersten **A** wohl das Vielfache der Zweiten, dagegen nicht das Vielfache der Dritten das der Vierten übertrifft.

Erläuterung. Nimmt man das m fache von A und C, und das n fache von B und D, also

mA		mC	
	nB		nD

und es ist zwar $mA > nB$

aber nicht zugleich $mC > nD$

so ist das Verhältniß von A zu B größer, als das von C zu D. Dieses ist also immer der Fall, wenn, während $mA > nB$

zugleich ist $mC = nD$, oder $mC < nD$.

---

8) **Proportion** ist die Gleichheit der Verhältnisse.

9) Eine Proportion besteht zwischen drei Gliedern wenigstens.

Anmerkung. Sind die vier Größen A, B, C, D proportionirt, verhält sich also A zu B, wie C zu D: so bezeichnet man Dieses durch

$$A : B = C : D$$

(Seite 13. Nr. 15.), und es bilden diese Größen also eine Proportion. Die Größen, welche die Proportion bilden, sind die Glieder derselben, und es besteht also eine jede Proportion aus vier Gliedern. Von diesen Gliedern können jedoch zwei einander gleich seyn, und namentlich die beiden mittleren, also $C = B$, wo dann die Proportion ist

$$A : B = B : D$$

und Dieses ist „eine Proportion von drei Gliedern".

Eine solche Proportion wird **stetig** oder **zusammenhängend** genannt. Bei einer stetigen Proportion verhält sich also das erste Glied zu dem zweiten, wie das zweite zu dem dritten sich verhält.

Auch mehr als drei Glieder können in stetiger Proportion seyn; dieses ist der Fall, wenn je zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder dasselbe Verhältniß zu einander haben. Ist z. B.

$$A : B = B : C = C : D$$

so sind A, B, C, D vier stetige Proportionalgrößen.

---

10) Sind drei Größen A, B, C stetig proportionirt, so wird das Verhältniß der Ersten zur Dritten (A : C) das **Zweifache** des Verhältnisses der Ersten zur Zweiten (A : B) genannt. Es ist alsdann $A : C = 2(A : B)$. Man vergleiche hiermit Seite 13. Nr. 16. und 17.

11) Sind die vier Größen A, B, C, D stetig proportionirt: so wird das Verhältniß der Ersten zur Vierten (A : D) das **Dreifache** des Verhältnisses der Ersten zur Zweiten (A : B) genannt; und so nach einander immer um Eins mehr, so lange noch an einander hängende Proportionalgrößen vorhanden sind.

Anmerkung. Ist $A : B = B : C$

so folgt, nach der gegebenen Erklärung,

$$A : C = 2(A : B).$$

Aus A : B = B : C = C : D
folgt A : D = 3 (A : B)
und aus A : B = B : C = C : D = D : E
A : E = 4 (A : B)
u. s. f.

---

12) **Gleichnamig** sind Vorderglieder mit Vordergliedern und Hinterglieder mit Hintergliedern.

Anmerkung. Die beiden Glieder eines Verhältnisses müssen gleichartig (homogen) seyn, was nicht verwechselt werden darf mit gleichnamig (homolog), eine Benennung, welche den Gliedern beigelegt wird, die in den Verhältnissen eine gleiche Stellung haben, und es ist hiernach das erste Glied des einen Verhältnisses dem ersten Gliede des zweiten gleichnamig. Hat man z. B. die Proportion A : B = C : D
so sind A und C gleichnamig, und eben so B und D.
Ist A : B = C : D = E : F
so sind A, C, E gleichnamig; und eben so auch B, D und F ꝛc.

---

13) **Verwechselt** wird ein Verhältniß, wenn man in einer Proportion setzt das Vorderglied zu dem Vordergliede, wie das Hinterglied zu dem Hintergliede. So folgt
aus der Proportion A : B = C : D
durch Verwechselung A : C = B : D.

14) **Umgekehrt** wird ein Verhältniß, wenn man das Hinterglied zum Vordergliede und das Vorderglied zum Hintergliede macht.
Aus dem Verhältnisse A : B
wird durch Umkehrung B : A.

15) Die **Verbindung** eines Verhältnisses entsteht, wenn man setzt: das Vorderglied und das Hinterglied zusammen als Ein Glied zu demselben Hintergliede. Hiernach erhält man aus
A : B
durch Verbindung A + B : B.

16) Die **Trennung** eines Verhältnisses entsteht, wenn man setzt: der Ueberschuß, um welchen das Vorderglied das Hinterglied übertrifft, zu demselben Hintergliede.
Es giebt also das Verhältniß A : B
durch Trennung A — B : B

17) Die **Zurückkehrung** eines Verhältnisses entsteht, wenn

man setzt: das Vorderglied zu dem Ueberschusse, um welchen das Vorderglied das Hinterglied übertrifft.

Hiernach giebt das Verhältniß A : B

durch Zurückkehrung A : A — B

Anmerkungen. Die Verwechselung entsteht, wenn in einer Proportion die beiden mittleren Glieder ihre Stellen vertauschen, wenn also aus

A : B = C : D

gemacht wird A : C = B : D.

Ob man zu dieser Umformung wirklich berechtigt ist oder nicht, muß erst bewiesen werden; es hat Dieses aber auf die Erklärung, die als bloße Worterklärung dasteht, keinen Einfluß, wie aus dem in §. 5. der Einleitung (S. 6.) Gesagten hervorgeht.

Die Erklärungen 14., 15., 16. und 17. lassen sich kurz auf folgende Art übersehen:

Man erhält aus dem Verhältniß A : B
1) durch Umkehrung B : A
2) durch Verbindung A + B : B
3) durch Trennung A — B : B
4) durch Zurückkehrung A : A — B.

---

18) Aus dem Gleichen entsteht ein Verhältniß, wenn mehrere Größen A, B, C, D, E mit eben so vielen Anderen a, b, c, d, e je zwei von jenen mit je zwei von diesen proportionirt sind, und wenn nun mit Weglassung aller mittleren, die äußeren von jenen mit den äußeren von diesen ebenfalls proportionirt sind.

Ist z. B. bei den angegebenen Größen

A : B = a : b
B : C = b : c
C : D = c : d
und D : E = d : e

so folgt aus dem Gleichen A : E = a : e.

Anmerkung. Auch diese ist, wie die Erklärung 13., eine bloße Worterklärung; und es ist daher noch zu beweisen, „inwiefern man zu einer solchen Folgerung berechtigt ist".

---

19) In geordneter Proportion sind mehrere Größen

A, B, C, D, E,

mit eben so vielen Anderen

a, b, c, d, e

wenn die beiden ersten von jenen mit den beiden ersten von diesen proportionirt sind, und bei jenen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bei diesen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe sich verhält. Wenn die obigen Größen also in der Art von einander abhängen, daß

$$A : B = a : b$$
$$B : C = b : c$$
$$C : D = c : d$$
und $D : E = d : e$ ꝛc.

20) In zerstreuter Proportion sind mehrere Größen

A, B, C, D, E

mit eben so vielen anderen

a, b, c, d, e

wenn die beiden ersten von jenen mit den beiden letzten von diesen proportionirt sind, und bei jenen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bei diesen die nächstvorhergehende Größe zu dem Vordergliede sich verhält. Wenn also die obigen Größen in der Art von einander abhängen daß

$$A : B = d : e$$
$$B : C = c : d$$
$$C : D = b : c$$
und $D : E = a : b$

so sind A, B, C, D, E mit a, b, c, d, e in zerstreuter Proportion.

V. Satz 1. Lehrsatz.

Ist von mehreren Größen A, B, C und eben so vielen anderen a, b, c, jede der erstern von jeder der letztern, also A von a, B von b und C von c ein Gleichvielfaches: so sind auch die erstern zusammen von den letztern, $A + B + C$ von $a + b + c$, dasselbe Vielfache.

Beweis. A ist ein so Vielfaches von a, als B von b und C von c ist. So viele der a gleiche Größen A enthält, eben so viele der b gleiche Größen sind in B und der c gleiche Größen in C. Theilt man daher die Größe

A in ihre der a gleiche Theile a', a'', a''',
B „ „ „ b „ „ b', b'', b''',
C „ „ „ c „ „ c', c'', c''',

so ist die Menge der gleichen Theile bei Allen gleich.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Da nun } a' = a \\ b' = b \\ c' = c \end{array}\right\} \text{so ist } a' + b' + c' = a + b + c$$

und aus gleichen Gründen ist $a'' + b'' + c'' = a + b + c$

$$a''' + b''' + c''' = a + b + c.$$

So viele der a gleiche Größen folglich A enthält, eben so viele der $a + b + c$ gleiche Größen sind in $A + B + C$ enthalten; und es ist daher $A + B + C$ von $a + b + c$ dasselbe Vielfache, das A von a ist.

Erläuterung. Ist $A = 5a$
so ist $B = 5b$ (p. h.)
und $C = 5c$ „

folglich $A + B + C = 5a + 5b + 5c$;
und da $5a + 5b + 5c = 5(a + b + c)$

so folgt $A + B + C = 5(a + b + c)$.

Ist ferner ganz allgemein
$A = ma$
und daher $B = mb$ (p. h.)
und $C = mc$

so ist $A + B + C = ma + mb + mc$;
und da $ma + mb + mc = m(a + b + c)$

so folgt $A + B + C = m(a + b + c)$.

V. Satz 2. Lehrsatz.

Ist eine erste Größe A' von einer zweiten a, und eine dritte B' von einer vierten b ein Gleichvielfaches; ferner eine fünfte A'' von der zweiten, und eine sechste B'' von der vierten wieder ein Gleichvielfaches: so ist verbunden die erste und fünfte zusammen $(A' + A'')$ von der zweiten a, und die dritte und sechste zusammen $(B' + B'')$ von der vierten b auch ein Gleichvielfaches.

Beweis. A' ist ein so Vielfaches von a, wie B' von b. So viele der a gleiche Größen also in A', eben so viele der b gleiche Größen sind in B' enthalten. Aus gleichen Gründen sind eben so viele der a gleiche Größen in A'', als der b gleiche Größen in B'' enthalten. Folglich ist auch a in A' und A'' zusammen eben so viel Mal enthalten, als b in B' und B'' zusammen, und es ist daher $A' + A''$ ein eben so Vielfaches von a als $B' + B''$ von b. Folglich sind $A' + A''$ von a, und $B' + B''$ von b, Gleichvielfache.

Erläuterung. Ist $A' = 5\,a$, so ist $B' = 5\,b$ (p. h.)
und für $A'' = 3\,a$ ist $B'' = 3\,b$

folglich $A' + A'' = 8\,a$ und $B' + B'' = 8\,b$
also $A' + A''$ ein eben so Vielfaches von a, als $B' + B''$ von b.

Ist ganz allgemein
$A' = ma$, so ist $B' = mb$ (p. h.)
und wenn $A'' = na$ „ $B'' = nb$

also $A' + A'' = ma + na$ und $B' + B'' = mb + nb$
und da $ma + na = (m + n)\,a$ und $mb + nb = (m + n)\,b$

so ist $A' + A'' = (m + n)\,a$ und $B' + B'' = (m + n)\,b$.

V. Satz 3. Lehrsatz.

Ist eine erste Größe a von einer zweiten α, und eine dritte b von einer vierten β ein Gleichvielfaches; ferner eine fünfte **A** von der ersten a, und eine sechste **B** von der dritten b wiederum ein Gleichvielfaches: so ist aus dem Gleichen die fünfte **A** von der zweiten α und die sechste **B** von der vierten β auch ein Gleichvielfaches.

Beweis. **A** ist von a ein so Vielfaches wie **B** von b. So viele der a gleiche Größen **A** enthält, eben so viele der b gleiche Größen enthält **B**. Theilt man daher die Größe
A in ihre der a gleiche Theile a', a'', a''', und
B „ „ „ b „ „ b', b'', b''',
so ist die Menge der Theile in beiden gleich.

Da nun a von α und b von β ein Gleichvielfaches ist, aber
$a' = a$ und $b' = b$, so ist
a' von α und b' von β ein Gleichvielfaches
und eben so a'' „ α „ b'' „ β „
a''' „ α „ b''' „ β „
folglich ist auch verbunden
$a' + a'' + a'''$ von α, und $b' + b'' + b'''$ von β ein Gleichvielfaches (2.)

Es ist aber $a' + a'' + a''' = A$ und $b' + b'' + b''' = B$; also ist **A** von α und **B** von β ein Gleichvielfaches.

Erläuterungen. Für $a = 5\,\alpha$ ist $b = 5\,\beta$ (p. h.)
und für $A = 3\,a$ ist $B = 3\,b$ „

folglich ist $A = 3\,.\,(5\,\alpha)$ und $B = 3\,.\,(5\,\beta)$
und da $3\,.\,(5\,\alpha) = 15\,\alpha$ und $3\,.\,(5\,\beta) = 15\,\beta$

so ist auch $A = 15\,\alpha$ und $B = 15\,\beta$.

Es ist also A von α und B von β ein Gleichvielfaches.

Ist ganz allgemein $a = m\alpha$, so ist $b = m\beta$ (p. h.)
und für $A = n\alpha$ ist $B = n\beta$

also auch $A = n \,.\, (m\alpha)$ und $B = n \,.\, (m\beta)$
und da $n \,.\, (m\alpha) = nm \,.\, \alpha$ und $n \,.\, (m\beta) = nm \,.\, \beta$
so ist $A = nm \,.\, \alpha$ und $B = nm \,.\, \beta$.

V. Satz 4. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe α zu einer zweiten β, und eine dritte γ zu einer vierten δ einerlei Verhältniß (ist also $\alpha : \beta = \gamma : \delta$): so haben, bei beliebiger Vervielfältigung, die Gleichvielfachen der ersten und dritten a und c zu den Gleichvielfachen der zweiten und vierten, zu b und d nach der Ordnung genommen, auch **einerlei Verhältniß**, und es ist also auch $a : b = c : d$.

Beweis. Von a und c nimm die Gleichvielfachen A, C, und von b und d die Gleichvielfachen B und D.

Nun ist a von α und c von γ ein Gleichvielfaches (p. h.)
und A von a „ C „ c „ „ (p. c.)
folglich ist auch A von α und C von γ ein Gleichvielfaches (3.);
und aus eben denselben Gründen ist
B von β und D von δ ein Gleichvielfaches.

Da nun $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ (p. h.)
so folgt, wenn $A \gtreqless B$ auch $C \gtreqless D$ (E. 5.)

Nun sind aber A und C Gleichvielfache von a und c (p. c.)
und B und D „ „ b und d „
folglich ist $a : b = c : d$ (E. 5.)

Zusatz. Da nach dem Bewiesenen,
wenn $A \gtreqless B$, auch $C \gtreqless D$:
so ist nothwendig auch,
wenn $B \gtreqless A$, zugleich $D \gtreqless C$.

Da nun B und D Gleichvielfache von b und d
und A und C „ „ a und c
so folgt $b : a = d : c$. (E. 5.)

Aus $a : b = c : d$
folgt also auch $b : a = d : c$;

Vier proportionirte Größen sind also auch **umgekehrt** proportionirt.

V. Satz 5. Lehrsatz.

Ist von zwei Größen die Erste $A = A' + A''$ von der zweiten $a = a' + a''$, und ein Stück der ersten A' von einem Stück der zweiten a' ein Gleichvielfaches: so ist auch jener Rest $A - A' = A''$ von diesem Reste $a - a' = a''$ dasselbe Vielfache.

Beweis. Man nehme x, so daß

A' von a'

und A'' von x ein Gleichvielfaches ist:

so ist auch $A' + A''$ von $a' + x$ dasselbe Vielfache (1.)
welches A' von a' ist.
Aber auch $A' + A''$ von $a' + a''$ ist eben dieses Vielfache (p. h.)
folglich ist $A' + A''$ von $a' + x$ und von $a' + a''$ ein Gleichvielfaches; und es ist daher

$$a' + a'' = a' + x \quad (\text{S. } 6.)$$

und daher ist $a'' = x$ (S. 3.)

Da nun A' von a' und A'' von x ein Gleichvielfaches ist,
so ist auch A' „ a' „ A'' „ a'' ein Gleichvielfaches;
und es ist daher A'' dasselbe Vielfache von a'', welches A' von a', und also auch, welches A von a ist.

Erläuterung. Es ist $A = A' + A''$, also $A - A' = A''$
und $a = a'' + a''$ also $a - a' = a''$.

Ist nun $A = 5\,a$
und $A' = 5\,a'$

so folgt $A - A' = 5\,a - 5\,a'$
und da $5\,a - 5\,a' = 5\,(a - a')$

$A - A' = 5\,(a - a')$
und daher $A'' = 5\,a''$.

Ist allgemein $A = ma$
und $A' = ma'$

so folgt $A - A' = ma - ma' = m\,(a - a')$
also $A'' = m\,a''$.

Ist also A von a
und das Stück A' von dem Stücke a' dasselbe Vielfache

so ist der Rest $A - A'$ von dem Reste $a - a'$ eben dieses Vielfache.

V. Satz 6. Lehrsatz.

Sind zwei Größen $A = A' + A''$ und $B = B' + B''$ Gleichvielfache von zwei andern a und b, auch gewisse Stücke A'

und B' der Erstern Gleichvielfache von diesen Andern: so sind die Reste $A - A' = A''$ und $B - B' = B''$ entweder diesen Andern gleich, oder auch Gleichvielfache derselben.

Beweis. Erster Fall. Es sey der Rest $A'' = a$, so wird auch der Rest $B'' = b$ seyn. Es sey $x = b$.

Da nun $A'' = a$ und $x = b$
und A' von a und B' von b Gleichvielfache (p. h.)
so sind auch $A' + A''$ von a, und $B' + x$ von b, ebenfalls Gleichvielfache (2.)

Es ist aber auch $B' + B''$ dasselbe Vielfache von b, welches $A' + A''$ von a ist; also sind
$B' + x$ und $B' + B''$ Gleichvielfache von b
und daher $B' + x = B' + B''$.

Folglich ist $x = B''$
aber $x = b$ (p. c.)
also auch $B'' = b$.

Ist also $A'' = a$, so ist auch $B'' = b$.

Zweiter Fall. Ist A'' ein Vielfaches von a, so wird auf eine ähnliche Art, wie bei dem ersten Falle, bewiesen, „daß auch B'' ein eben so Vielfaches von b seyn muß".

Erläuterung. Ist $A = 8\,a$, also $B = 8\,b$
und $A' = 5\,a$ „ $B' = 5\,b$

so folgt $\underbrace{A - A'} = 3\,a$ und $\underbrace{B - B'} = 3\,b$
also $A'' = 3\,a$ und $B'' = 3\,b$

Wenn also A und B Gleichvielfache von a und b, und die Stücke
A' und B' „ „ „ „ „ sind:
so sind die Reste $A - A' = A''$ und $B - B' = B''$ ebenfalls Gleichvielfache von a und b.

V. Satz 7. Lehrsatz.

Gleiche Größen a und b haben zu einer und derselben Größe c, und eine und dieselbe Größe c hat zu gleichen Größen a und b einerlei Verhältnisse.

Beweis. Erster Theil. Jede der beiden gleichen Größen a und b hat zu c dasselbe Verhältniß.

Man nehme von a und b die Gleichvielfachen A und B, und von c ein anderes beliebiges Vielfache C.

Da $a = b$, so ist auch $A = B$.

und daher, wenn $A \gtreqless C$, auch $B \gtreqless C$
folglich $a : c = b : c$ (E. 5.)

Zweiter Theil. c hat zu jeder der beiden gleichen Größen a und b dasselbe Verhältniß. Denn
da nach dem Obigen $A = B$: so ist,
wenn $C \gtreqless A$, auch $C \gtreqless B$
und folglich $c : a = c : b$. (E. 5.)

V. Satz 8. Lehrsatz.

Von zwei ungleichen Größen A und B hat zu einer und derselben Größe D die Größere A ein größeres Verhältniß als die Kleinere B; und eine und dieselbe Größe D hat zu der Kleineren B ein größeres Verhältniß als zu der Größeren A.

Beweis. Da $A > B$, so kann man setzen $A = B' + a$ für $B' = B$; und es giebt nun ein Vielfaches des Kleineren der beiden Stücke B' und a, aus welchen A besteht, welches größer als D ist. Es ist aber entweder a oder B' das kleinere Stück von A.

Erster Fall. Es sey a das kleinere Stück, und irgend ein Vielfaches desselben, z. B. das mfache, $> D$. Man nehme das eben so Vielfache von B' und von B; von D nehme man das Zweifache, das Dreifache, und so nach der Ordnung immer weiter, bis zu einem Vielfachen, das zuerst größer ist als mB, so daß das vorhergehende Vielfache noch nicht größer ist als mB. Es sey hiernach das nfache von $D = nD$ noch nicht größer; wohl aber sey das $(n + 1)$fache, also $(n + 1)\,D = nD + D$ größer als mB.

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Da } A = B' + a \\
\hline
 & \text{so ist } mA = mB' + ma \quad (1.) \\
 & \text{und weil } B' = B \quad (\text{p. h.}) \\
 & \text{so ist auch } mA = mB + ma. \\
 & \text{Nun ist } mB \text{ nicht kleiner als } nD \\
 & \text{und } ma > D \quad (\text{p. c.}) \\
\hline
\text{Folglich ist} & \underbrace{mB + ma} > (n + 1)\,D \\
\text{also} & mA > (n + 1)\,D \\
\text{während} & mB < (n + 1)\,D \quad (\text{p. c.})
\end{array}
$$

Von den vier Größen	A,	D,	B,	D
ist also das mfache der 1sten und 3ten	mA		mB	
und das $(n + 1)$fache der 2ten und 4ten		$(n + 1)\,D$		$(n + 1)\,D$

so von einander abhängig, daß zugleich

$$mA > (n+1)\,D \text{ und } mB < (n+1)\,D.$$

Folglich ist $A : D > B : D$ (E. 7.)

und da sonach $(n+1)\,D > mB$, während $(n+1)\,D < mA$

so folgt $D : B > D : A$.

Die Richtigkeit des Lehrsatzes ist also für den Fall bewiesen, wenn für $A = B' + a$ das Stück a der kleinere Theil von A ist.

Zweiter Fall. Es sey für $A = B' + a$ das kleinere dieser beiden Stücke B'; und das $m$fache desselben größer als D. Man nehme das eben so Vielfache von a und von B. Von D nehme man das Zweifache, das Dreifache, und so nach der Ordnung immer weiter, bis zu einem Vielfachen, das zuerst größer ist als ma. Es sey hiernach das $n$fache von $D = nD$ noch nicht größer; wohl aber sey das $(n+1)$fache, also $nD + D = (n+1)D$ größer als ma.

Da $A = a + B'$

so ist $mA = ma + mB'$.

Nun ist ma nicht kleiner als nD

und $mB' > D$ (p. c.)

folglich ist $ma + mB' > (n+1)\,D$

also $mA > (n+1)\,D$.

Und da $ma < (n+1)\,D$

und $a > B$, so ist um so mehr

$$mB < (n+1)\,D.$$

Da nun sonach wieder ist

$$mA > (n+1)\,D$$

aber $mB < (n+1)\,D$

so folgt, wie bei dem ersten Falle

$$A : D > B : D$$

und $D : B > D : A$.

Erläuterung. Hängen die Größen A, B, C, D so von einander ab, daß von Gleichvielfachen der ersten und dritten mA, mC und Gleichvielfachen der zweiten und vierten nB, nD, zugleich ist

$$mA > nB, \text{ aber nicht } mC > nD$$

so ist nach der 7ten Erklärung $A : B > C : D$.

Sind nun von vier Größen die zweite und vierte einander gleich, aber die erste und dritte ungleich, so daß die erste größer, als die dritte ist: so giebt es immer ein Vielfaches der ersten und dritten von der Art, daß man ein Vielfaches der zweiten und vierten auffinden kann: so daß das

Vielfache der ersten zwar größer, als das der zweiten ist, aber nicht das der dritten größer, als das der vierten. Und hieraus folgt nach der Erklärung, daß für $A > C$ seyn muß $A : D > C : D$.

Hat man z. B. die Zahlen

17, 23, 14, 23

so muß seyn $17 : 23 > 14 : 23$.

Denn es ist $17 = 14 + 3$ und $8 . 3 > 23$,

ferner ist $8 . 14 = 112$

$4 . 23 = 92$ und $5 . 23 = 115$.

Hiernach ist $8 . 14 > 4 . 23$

und $8 . 3 > 1 . 23$

also $8 . 17 > 5 . 23$

während $8 . 14 < 5 . 23$

und es ist daher nach der 7ten Erklärung

$$17 : 23 > 14 : 23$$

V. Satz 9. Lehrsatz.

Haben zwei Größen A und B zu einer Dritten D dasselbe Verhältniß, oder hat eine Dritte D zu den beiden Größen A und B dasselbe Verhältniß: so sind diese Größen gleich groß.

Beweis. Wären A und B ungleich, so sey $A > B$

alsdann ist $A : D > B : D$ (8.)

und $D : B > D : A$

was der Voraussetzung widerspricht, wornach die Verhältnisse gleich seyn sollen. Folglich können A und B nicht ungleich seyn, und es ist daher $A = B$.

V. Satz 10. Lehrsatz.

Von zwei Größen A und B ist Die, welche zu einer und derselben dritten Größe D ein größeres Verhältniß hat, die größere; Die aber, zu welcher ein und dieselbe Größe D ein größeres Verhältniß hat, ist die kleinere.

Beweis. Erster Theil. Ist $A : D > B : D$, so muß seyn $A > B$. Denn wäre dieses nicht, so würde seyn entweder

$A = B$, folglich $A : D = B : D$ (7.)

oder $A < B$ „ $A : D < B : D$ (8.)

was Beides der Voraussetzung widerspricht.

Es ist also weder $A = B$ noch $A < B$, und daher $A > B$.

Zweiter Theil. Ist $D : B > D : A$, so muß seyn $B < A$. Denn wäre Dieses nicht, so würde seyn

entweder $B = A$, folglich $B : D = A : D$ (7.)

oder $B > A$ „ $D : B < D : A$ (8.)

wo ebenfalls Beides der Voraussetzung widerspricht; und es ist daher weder $B = A$ noch $B > A$, folglich muß seyn $B < A$.

V. Satz 11. Lehrsatz.

Sind zwei Verhältnisse $A : B$ und $a : b$ einem dritten Verhältnisse $C : D$ gleich, so sind sie selbst einander gleich.

Beweis. Nimm beliebig Gleichvielfache der Vorderglieder A, C und a, und beliebig Gleichvielfache der Hinterglieder B, D und b,

also mA mC ma

und nB nD nb.

Da nun $A : B = C : D$, so ist, wenn $mA \gtreqless nB$, auch $mC \gtreqless nD$

und da $C : D = a : b$ „ „ „ $mC \gtreqless nD$ „ $ma \gtreqless nb$

wenn also $mA \gtreqless nB$, so ist auch $ma \gtreqless nb$

und daher $A : B = a : b$ (E. 5.).

V. Satz 12. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen A', B', A'', B'', A''', B''' proportionirt ($A' : B' = A'' : B'' = A''' : B'''$): so verhalten sich alle Vorderglieder zusammen $A' + A'' + A'''$ zu allen Hintergliedern zusammen $B' + B'' + B'''$, wie ein Vorderglied A' zu seinem Hintergliede B'.

Beweis. Nimm beliebig Gleichvielfache der Vorderglieder A', A'', A''' und beliebig Gleichvielfache der Hinterglieder B', B'', B'''; also

mA' mA'' mA'''

und nB' nB'' nB'''

so ist $mA' + mA'' + mA''' = m(A' + A'' + A''')$ das eben so Vielfache von $A' + A'' + A'''$ als mA' von A' (1.); und $nB' + nB'' + nB''' = n(B' + B'' + B''')$ ist das so Vielfache von $B' + B'' + B'''$ wie nB' von B' (1.).

Da nun $A' : B' = A'' : B'' = A''' : B'''$ (p. h.).

so ist, wenn $mA' \gtreqless nB'$
auch $mA'' \gtreqless nB''$
und $mA''' \gtreqless nB'''$

Also ist auch $mA' + mA'' + mA''' \gtreqless nB' + nB'' + nB'''$
wenn $mA' \gtreqless nB'$
nämlich $m(A' + A'' + A''') \gtreqless n(B' + B'' + B''')$
wenn $mA' \gtreqless nB'$.
Folglich ist $(A' + A'' + A''') : (B' + B'' + B''') = A' : B'$ (E. 5.).

V. Satz 13 Lehrsatz.

Hat eine erste Größe A zu einer zweiten B dasselbe Verhältniß, wie eine dritte a zu einer vierten b; aber die dritte zu der vierten ein größeres Verhältniß, als eine fünfte C zu einer sechsten D: so hat auch die Erste zu der Zweiten ein größeres Verhältniß, als die Fünfte zu der Sechsten.

Beweis. Da $a : b > C : D$
so giebt es Zahlen m und n von der Art, daß
zwar $ma > nb$, aber nicht $mC > nD$.

Nimmt man nun auch von A das mfache und von B das nfache: so ist, da
$$a : b = A : B$$
wenn $ma > nb$ auch $mA > nB$.
Da nun für $ma > nb$ nicht ist $mC > nD$
so ist auch für $mA > nB$ nicht $mC > nD$
und hieraus folgt
$$A : B > C : D \quad (E.\ 7.).$$

V. Satz 14. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe A zu einer zweiten B dasselbe Verhältniß, wie eine Dritte C zu einer Vierten D; und ist die Erste entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als die Dritte: so ist auch die Zweite im ersten Falle größer, im zweiten eben so groß, und in dem dritten Falle kleiner als die Vierte.

Beweis. Ist $A > C$
so ist $A : B > C : B$ (8.)
Da nun $A : B = C : D$ (p. h.)
so ist auch $C : D > C : B$ (13.)
folglich ist $D < B$ (10.).

Ist also $A > C$, so folgt $B > D$.

Auf gleiche Art wird erwiesen

„daß, wenn $A = C$, auch $B = D$;

und wenn $A < C$ „ $B < D$ seyn muß".

V. Satz 15. Lehrsatz.

Theile a und b sind mit ihren Gleichvielfachen A, B, in einerlei Verhältniß.

Beweis. Man zerlege A in seine der a gleiche Theile $a' = a'' = a'''$ und B in die der b gleiche Theile $b' = b'' = b'''$: so hat A eben so viele gleiche Theile $= a$, als B gleiche Theile $= b$ hat; und es ist nun

$$a' : b' = a'' : b'' = a''' : b''' \quad (7.)$$

folglich auch $a' : b' = (a' + a'' + a''') : (b' + b'' + b''')$ (12.)

Nun ist $a' + a'' + a''' = A$ und $b' + b'' + b''' = B$

es ist also auch $a' : b' = A : B$

und weil $a' = a$ und $b' = b$

so ist $a : b = A : B$.

V. Satz 16. Lehrsatz.

Sind vier Größen proportionirt, so sind sie auch verwechselt proportionirt. Wenn also $A : B = C : D$, so ist auch $A : C = B : D$. (E. 13.)

Beweis. Von A und B nimm die Gleichvielfachen mA, mB, und von C und D die Gleichvielfachen nC, nD: so ist

$$A : B = mA : mB \quad (15.)$$

aber $A : B = C : D$

also $C : D = mA : mB$ (11.)

Nun ist $C : D = nC : nD$ (15.)

folglich ist $mA : mB = nC : nD$.

Ist daher $mA \gtreqless nC$, so ist auch $mB \gtreqless nD$. (14.)

Die vier Größen A, C, B, D

hängen also in der Art von einander ab, daß, wenn von den Gleichvielfachen mA mB

und den Gleichvielfachen nC nD

$mA \gtreqless nC$, auch $mB \gtreqless nD$ ist;

folglich ist $A : C = B : D$. (E. 5.)

V. Satz 17. Lehrsatz.

Sind verbundene Größen $(A + B)$, B, $(C + D)$, D proportionirt: so sind die getrennten A, B, C, D, ebenfalls proportionirt.

Beweis. Nimm von A, B, C und D die Gleichvielfachen mA, mB, mC, mD; deßgleichen von B und D die beliebigen Gleichvielfachen nB, nD: so ist
$mA + mB = m(A + B)$ von $A + B$ ein eben so Vielfaches, als $mC + mD = m(C + D)$ von $C + D$.

Ferner ist $mB + nB = (m + n)B$ ein eben so Vielfaches von B, also $mD + nD = (m + n)D$ von D.

Nun ist $A + B : B = C + D : D$.
Folglich ist, wenn
$m(A + B) \gtreqless (m + n)B$, auch $m(C + D) \gtreqless (m + n)D$;
nämlich es ist, wenn
$mA + mB \gtreqless mB + nB$, auch $mC + mD \gtreqless mD + nD$;
und da $mB = mB$ und $mD = mD$
so ist, wenn $mA \gtreqless nB$, auch $mC \gtreqless nD$;
und hieraus folgt

$$A : B = C : D.$$

V. Satz 18. Lehrsatz.

Sind getrennte Größen A, B, C, D, proportionirt: so sind auch die verbundenen $(A + B)$, B, $(C + D)$, D, proportionirt.

Beweis. Verhält sich nicht $A + B$ zu B wie $C + D$ zu D, sondern wie $C + D$ zu einer andern Größe X, so müßte dieses X entweder kleiner oder größer seyn als D.

Es sey erstens $X < D$ und

$A + B : B = C + D : X$

so ist auch $A : B = C + D - X : X$. (17.)

Nun ist aber $A : B = C : D$ (p. h.)

also $C : D = C + D - X : X$. (11.)

Nun ist nach der Annahme $D > X$

folglich auch $C > C + D - X$ (14.)

und da $X = X$

so ist $C + X > C + D$

also $X > D$

was der Voraussetzung $X < D$ widerspricht. Demnach kann nicht seyn $X < C$.

Es sey zweitens $X > D$, so folgt auf gleiche Art, „daß auch Dieses unmöglich sey".

Da sonach weder $X < D$ noch $X > D$ seyn kann, so ist $X = D$; und da nun

$$A + B : B = C + D : X$$

so ist auch $A + B : B = C + D : D$.

V. Satz 19. Lehrsatz.

Verhalten sich Ganze $(A + B)$ und $(C + D)$ wie die Stücke A und C derselben, so verhalten sich auch die Reste B und D wie die Ganzen.

Beweis. Da $A + B : C + D = A : C$

so ist verwechselt $A + B : A = C + D : C$ (16.)

folglich getrennt $B : A = D : C$ (17.)

also verwechselt $B : D = A : C$

Da nun $A : C = A + B : C + D$ (p. h.)

so folgt $B : D = A + B : C + D$ (11.)

es verhalten sich also die Reste wie die Ganzen.

Zusatz. Es ist bewiesen worden,

„daß, wenn $A + B : C + D = A : C$

auch $A + B : C + D = B : D$ sey";

daher ist verwechselt $A + B : B = C + D : D$

es sind also verbundene Größen proportionirt.

Es ist aber auch $A + B : A = C + D : C$

nämlich $(A + B) : (A + B) - B = (C + D) : (C + D) - D$

also sind die Größen auch zurückkehrend proportionirt (E. 17.)

Hieraus folgt: daß, wenn Größen verbunden proportionirt sind, sie zurückkehrend ebenfalls proportionirt sind.

V. Satz 20. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen A, B, C, mit eben so vielen anderen a, b, c, in geordneter Proportion (E. 19.); und ist von jenen die Erste A entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als die Letzte C: so ist auch von diesen die Erste a im ersten Falle größer, im zweiten eben so groß, und im dritten kleiner, als die Letzte c.

Beweis. Erster Fall. Es sey $A > C$

so ist $A : B > C : B$ (8.)

aber $A : B = a : b$ (S. 19.)

also $a : b > C : B$ (13.)

Nun ist $C : B = c : b$ (4. Zus.)

folglich auch $a : b > c : b$ (13.)

und daher $a > c$ (10.)

Ist also $A > C$, so ist auch $a > c$.

Zweiter und dritter Fall. Auf dieselbe Art wird bewiesen, „daß, wenn $A = C$ auch $a = c$, und daß, wenn $A < C$ auch $a < c$ seyn muß".

Anmerkung. Der hier gegebene Beweis bezieht sich zunächst bloß auf den Fall: wenn Drei Größen mit eben so viel anderen in geordneter Proportion sind. Daß der Lehrsatz aber auch für mehr als drei Größen seine Gültigkeit behält, ergiebt sich auf folgende Art:

Sind die Größen A, B, C, D, E

mit a, b, c, d, e in geordneter Proportion

so ist $A : B = a : b$, also auch $A : a = B : b$ (16.)

$B : C = b : c$ „ „ $B : b = C : c$ „

daher $A : a = C : c$ (11.)

Ferner $C : D = c : d$, also auch $C : c = D : d$ (16.)

folglich $A : a = D : d$ (11.)

Und $D : E = d : e$, also auch $D : d = E : e$ (16.)

und daher $A : a = E : e$ (11.)

Ist nun $A > E$, so ist auch $a > e$ (14.)

für $A = E$ ist „ $a = e$ „

und für $A < E$ „ „ $a < e$ „

V. Satz 21. Lehrsatz.

Sind drei Größen A, B, C, mit eben so vielen anderen a, b, c in zerstreuter Proportion; und ist von jenen die Erste A entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als die Letzte C: so ist auch von diesen die Erste a im ersten Falle größer, im zweiten eben so groß, und in dem dritten Falle kleiner als die Letzte c.

Beweis. Erster Fall. Es sey $A > C$, so ist

$A : B > C : B$ (8.)

und da $A : B = b : c$ (p. h.)

so ist auch $b : c > C : B$ (13.).

Nun ist $B : C = a : b$ (p. h.)
also $C : B = b : a$ (4. Zus.)
folglich ist $b : c > b : a$ (13.)
und daher $c < a$ (10.)

Ist also $A > C$, so ist auch $a > c$.

Zweiter und dritter Fall. Auf eben die Art wird bewiesen, „daß, wenn $A = C$, auch $a = c$,
und wenn $A < C$ „ $a < c$ seyn muß".

V. Satz 22. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen A, B, C, D, E, mit eben so vielen Anderen, geordnet, proportionirt, so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Beweis. Man nehme

von A und a in beliebigen Gleichvielfachen αA und αa
„ B „ b „ „ „ βB „ βb
„ C „ c „ „ „ γC „ γc
„ D „ d „ „ „ δD „ δd
„ E „ e „ „ „ εE „ εe.

Nun ist nach der Voraussetzung

$A : B = a : b$, also auch $\alpha A : \beta B = \alpha a : \beta b$ (4.)
$B : C = b : c$ „ „ $\beta B : \gamma C = \beta b : \gamma c$ „
$C : D = c : d$ „ „ $\gamma C : \delta D = \gamma c : \delta d$ „
$D : E = d : e$ „ „ $\delta D : \varepsilon E = \delta d : \varepsilon e$ „

und es sind daher $\alpha A, \beta B, \gamma C, \delta D, \varepsilon E$
mit $\alpha a, \beta b, \gamma c, \delta d, \varepsilon e$
geordnet proportionirt (E. 19.). Folglich ist,
wenn $\alpha A \gtreqless \varepsilon E$, auch $\alpha a \gtreqless \varepsilon e$ (20.)
und daher $A : E = a : e$ (E. 5.).

Sind also mehrere Größen mit eben so vielen Anderen, geordnet, proportionirt: so verhält sich von jenen die Erste zu der Letzten, wie von diesen die Erste zu der Letzten sich verhält. Sie sind also aus dem Gleichen proportionirt (E. 18.).

V. Satz 23. Lehrsatz.

Sind drei Größen A, B, C, mit eben so vielen Anderen a, b, c zerstreut proportionirt, so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Beweis. Von A, B und a nehme man die beliebigen Gleichvielfachen mA, mB, ma; und von C, b und c die beliebigen Gleichvielfachen nC, nb, nc: so ist

$$A : B = mA : mB \quad (15.)$$
$$\text{und} \quad A : B = b : c \quad (\text{p. h.})$$
$$\text{also} \quad mA : mB = b : c \quad (11.)$$
$$\text{und} \quad b : c = nb : nc \quad (15.)$$
$$\text{folglich} \quad mA : mB = nb : nc.$$

Da ferner $B : C = a : b$ (p. h.)
so ist auch $mB : nC = ma : nb$. (4.)
Hiernach ist $mA : mB = nb : nc$
und $mB : nC = ma : nb$
und es sind daher mA, mB, nC
mit ma, nb, nc
zerstreut proportionirt. Folglich ist,
wenn $mA \gtreqless nC$, auch $ma \gtreqless nc$ (21.)
und es ist daher $A : C = a : c$. (E. 5.)

Sind also Drei Größen mit eben so vielen anderen zerstreut proportionirt: so verhält sich von jenen die Erste zu der Letzten, wie von diesen die Erste zu der Letzten sich verhält; sie sind also aus dem Gleichen proportionirt. (E. 18.)

V. Satz 24. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe A zu einer Zweiten B dasselbe Verhältniß, wie eine Dritte C zu einer Vierten D; und eine Fünfte a zur Zweiten dasselbe Verhältniß, wie eine Sechste c zu der Vierten: so hat auch verbunden die Erste und Fünfte $A + a$ zu der Zweiten B dasselbe Verhältniß, wie die Dritte und Sechste $C + c$ zu der Vierten.

Beweis. Es ist $A : B = C : D$
und $a : B = c : D$, also $B : a = D : c$ (4. Zus.).
Daher sind A, B, a
mit C, D, c geordnet, proportionirt;
und es ist daher
aus dem Gleichen $A : a = C : c$ (22.)
folglich verbunden $A + a : a = C + c : c$ (18.)
Und da $a : B = c : D$. (p. h.)

so sind auch $A + a,\ a,\ B$
mit $C + c,\ c,\ D$ geordnet, proportionirt;
und daher ist aus dem Gleichen

$$A + a : B = C + c : D \quad (22.)$$

V. Satz 25. **Lehrsatz.**

Sind **Vier Größen** A, B, C, D, proportionirt: so sind die Größte A und die Kleinste D zusammen größer, als die beiden übrigen B und C zusammen.

Beweis. Erster Theil. Wenn $A : B = C : D$, und es ist A die größte von diesen vier Größen: so muß D die kleinste seyn. Denn. es ist

$A > D$ nach der Voraussetzung;
und weil $A : B = C : D$
und $A > C$, so ist auch $B > D$ (14.)
Es ist aber auch $A : C = B : D$ (4. Zus.)
und $A > B$, folglich $C > D$.

Da also aus der Voraussetzung, „daß A die größte ist" folgt $A > D$, $B > D$ und auch $C > D$: so ist D die kleinste.

Zweiter Theil. Ist $A : B = C : D$ und A die größte von diesen vier Größen: so ist $A + D > B + C$.

Da $A > C$, so ist $B > D$ (14.).
Man kann also setzen

$$A = C + c \text{ und } B = D + d.$$

Da nun $A : B = C : D$
so ist auch $A : B = c : d$ (19.)
Da nun $A > B$, und auch $A > c$, so ist auch $c > d$.

$$\begin{array}{l} \text{Nun ist } C + D = D + C \\ \text{und } c \quad > d \\ \hline \text{folglich } \underbrace{C + c} + D > \underbrace{D + d} + C \\ \text{also } \quad A \quad + D > \quad B \quad + C. \end{array}$$

Ist also $A : B = C : D$
und A die Größte: so ist D die Kleinste, und es ist $A + D$ größer als $B + C$.

Beilagen zu dem fünften Buche.

XXIII. Das Wesen des fünften Buches der Elemente.

Das erste Hülfsmittel, welches die Geometrie braucht, um die verschiedenen Eigenschaften der Raumgrößen auf eine einfache und zugleich allgemeine Art ableiten zu können, sind „die analytischen Gleichungen“; sie bilden den Gegenstand des zweiten Buches, und werden dort auf eine geometrische Art entwickelt. (Beilage **IX.** Seite 197. u. f.) Außer den analytischen Gleichungen nun ist wesentlich nothwendig, um in der Geometrie weiter vorschreiten zu können, „die Lehre von den Verhältnissen“; welche auf eine dem Geiste der Geometrie entsprechende Art in dem fünften Buche abgehandelt wird.

Bei einem geometrischen Verhältnisse hat man zwar immer die Absicht, zu bestimmen „ein Wievielfaches die eine der beiden Verhältnißgrößen von der andern ist“; Dieses läßt sich aber nur in den wenigsten Fällen wirklich angeben, weil ein Verhältniß zwischen je zwei gleichartigen Größen statt findet, ohne daß es hierbei nothwendig ist, „daß die eine dieser Größen wirklich ein Vielfaches der andern sey“. Es wird hierdurch aber die Lehre von den Verhältnissen keinesweges beschränkt; da nie ein Verhältniß an und für sich betrachtet wird, sondern immer mit einem andern zugleich, das hierbei als gegeben angesehen wird. Ist z. B. eine Linie **A** drei Mal so groß, als eine andere **a**: so ist das Verhalten der Linien **A** und **a**, dadurch bestimmt, daß man sagt, „sie verhalten sich zu einander wie 3 zu 1“; wobei also das Verhältniß 3 : 1 als das gegebene angesehen wird. Ist **A** $3\frac{1}{2}$ Mal so groß als **a**, so verhält sich **A** zu **a** wie 7 : 2. Ist **A** die Hypotenuse und **a** die Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks: so verhält sich **A** zu **a**, wie die Diagonale zu der Seite eines Quadrates ꝛc.

Da hiernach immer Zwei Verhältnisse zugleich betrachtet werden, von welchen das eine dadurch bestimmt wird, daß man es mit dem anderen, welches das gegebene ist, verbindet: so kömmt es vor allen Dingen darauf an, festzustellen, „unter welchen Bedingungen zwei Verhältnisse gleich, und unter welchen Bedingungen sie verschieden sind“. Nun ist zwar immer das Verhältniß von **A** : **B** dem von **C** : **D** gleich, wenn **A** ein eben so Vielfaches von **B** als **C** von **D** ist; diese Erklärung ist aber nicht ausreichend,

weil auch Größen in Verhältniß sind, die gar kein gemeinschaftliches Maaß haben; wie Dieses bei der Diagonale und der Seite eines Quadrates der Fall ist. Die Erklärung der gleichen und ungleichen Verhältnisse muß daher allgemeiner gegeben werden, so daß sie auch auf Größen, wie die zuletzt angeführten, sich anwenden läßt; und Dieses ist der Fall bei den unter Nr. 5. und 7, in der Einleitung zu dem fünften Buche von Euklid, gegebenen Erklärungen.

Hat man vier Größen A, B, C, D, und werden beliebige Vielfache genommen von der Ersten und Dritten A und C, und beliebige Vielfache der Zweiten und Vierten B und D; nimmt man also von A und C das m fache mA mC

„ B und D das n fache nB nD

und läßt sich nachweisen, „daß, welche Zahlen man auch für m und n nehmen mag, doch immer seyn muß,

wenn $mA > nB$, auch $mC > nD$

„ $mA = nB$ „ $mC = nD$

und „ $mA < nB$ „ $mC < nD$"

so ist das Verhältniß A : B dem Verhältnisse von C : D gleich. Es ist also das Verhältniß von A : B dem von C : D gleich, wenn für beliebige Werthe von m und n immer ist,

wenn $mA \gtreqless nB$, auch $mC \gtreqless nD$.

Können aber für m und n solche Werthe angegeben werden,

daß, während $mA > nB$ nicht ist $mC > nD$,

ist also $mA > nB$

und dabei entweder $mC = nD$ oder $mC < nD$:

so sind die Verhältnisse A : B und C : D ungleich, und es wird von diesen Verhältnissen, unter der angegebenen Voraussetzung, das Verhältniß von A : B das größere genannt; es ist also das Verhältniß A : B größer, als das von C : D.

Als nähere Bestimmung kömmt nun zu diesen Erklärungen noch hinzu:

Ein Verhältniß können nur Größen zu einander haben, die vervielfältigt einander übertreffen können (E. 4.); weil sich sonst gar nicht ermitteln läßt, „ob $mA \gtreqless nB$"; und es ist daher nothwendig, daß die beiden Größen eines Verhältnisses gleichartig seyen (E. 3.).

Größen, die in einerlei Verhältniß sind, heißen proportionirt (E. 6.), und die Gleichheit der Verhältnisse wird eine Proportion genannt.

Durch die hier abgeleiteten Erklärungen sind nun die Gegenstände vollkommen bestimmt, die in dem fünften Buche abgehandelt werden müssen. Diese betreffen:

1) Sätze „von den Gleichvielfachen", als die Grundlage der Lehre von den Verhältnissen;

2) die Sätze „von zwei gleichen Verhältnissen", also von den proportionirten Größen;

3) die Sätze „von ungleichen Verhältnissen", und

4) die Sätze „von mehr als zwei Verhältnissen".

1. Von den Gleichvielfachen.

Gleichvielfache verschiedener Größen können entweder in eine Summe vereinigt, oder von einander hinweggenommen werden; in beiden Fällen erhält man dasselbe Vielfache entweder von der Summe oder von der Differenz jener Größen, je nachdem man sie entweder vereinigt oder von einander hinweggenommen hat; wie in den Sätzen 1. und 5. bewiesen wird.

Werden zwei verschiedene Vielfache einer ersten Größe und dieselben Vielfachen einer zweiten genommen: so sind die Summe oder Differenz jener Vielfachen von der ersten Größe, und dieser von der zweiten, Gleichvielfache; dieses sind die Sätze 2. und 6.

Nimmt man endlich Gleichvielfache von einer ersten und von einer zweiter Größe, und werden von diesen Vielfachen wieder Gleichvielfache genommen: so sind Diese ebenfalls Gleichvielfache der ersten und der zweiten Größe, und dieses ist Satz 3.

Die Lehre „von den Gleichvielfachen" besteht also aus den folgenden fünf Sätzen:

Ist für irgend eine ganze Zahl $= m$

$$A = ma$$
$$\text{und } B = mb$$

so ist auch 1) $A + B = m(a + b)$ nach Satz 1.
und 2) $A - B = m(a - b)$ „ „ 5.

Ist für beliebige ganze Zahlen m und n

$$A' = ma \qquad \text{und} \qquad B' = mb$$
$$A'' = na \qquad \text{„} \qquad B'' = nb$$

so ist 3) $A' + A'' = (m + n)a$ und $B' + B'' = (m + n)b$ nach Satz 2.
und 4) $A' - A'' = (m - n)a$ und $B' - B'' = (m - n)b$ „ „ 6.
Es sind also $A' + A''$ von a und $B' + B''$ von b Gleichvielfache
und $A' - A''$ „ „ „ $B' - B''$ „ „ „

Ist endlich $a = m\alpha$ und $b = m\beta$
$A = na$ „ $B = nb$

so ist $A = n \,.\, m\alpha$ und $B = n \,.\, m\beta$.
also 5) $A = nm \,.\, \alpha$ und $B = nm \,.\, \beta$.

Sind sonach a von α und b von β Gleichvielfache, ferner A von a und B von b: so sind auch A von α, und B von β, ebenfalls Gleichvielfache.

2. Von Vier proportionirten Größen.

In der Lehre „von vier proportionirten Größen" sind die Fragen zu beantworten:

1) Welche Verhältnisse sind **gleich**, und können daher zu einer Proportion verbunden werden?

2) Wie hängen die einzelnen Glieder einer Proportion von einander ab? und

3) welche Umformungen können mit einer Proportion vorgenommen werden, ohne daß dieselbe dadurch aufgehoben wird? oder wie lassen sich aus einer gegebenen Proportion andere ableiten?

Die **erste Frage** führt zu den Resultaten:

Gleiche Größen haben zu einer und derselben Größe einerlei Verhältniß, Satz 7.

Es ist also für $A = C$
$A : B = C : B$.

Zwei Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind unter sich gleich; Satz 11.

Ist also $A : B = C : D$
und auch $a : b = C : D$

so folgt $A : B = a : b$

und, Größen stehen mit ihren Gleichvielfachen in einerlei Verhältniß; Satz 15. Daher ist für jede ganze Zahl $= m$

$$A : B = mA : mB.$$

Die **zweite Frage** führt zu den Sätzen:

Zwei Größen, die zu einer und derselben Größe einerlei Verhältniß haben, oder zu welchen ein und dieselbe Größe einerlei Verhältniß hat, sind einander gleich; Satz 9.

Ist also $A : B = C : B$
oder $B : A = B : C$
so ist $A = C$

Ist von Vier proportionirten Größen die erste größer, gleich oder kleiner als die dritte: so ist auch die zweite in dem ersten Falle größer, in dem zweiten gleich, und in dem dritten kleiner als die vierte; Satz 14.

Wenn also $A : B = C : D$

und es ist $A > C$, so ist auch $B > D$

$A = C$ „ „ „ $B = D$

$A < C$ „ „ „ $B < D$.

Ist endlich von Vier proportionirten Größen die erste die größte, so ist die vierte die kleinste; und es ist alsdann die größte und kleinste zusammen größer, als die beiden übrigen zusammen; Satz 25. Hat man also

$$A : B = C : D$$

und ist A größer als B, C, D, jede für sich: so ist D kleiner als A, B, C, jede für sich, und es ist $A + D > B + C$.

Die dritte Frage wird durch die Sätze 4., 16., 17, 18. und 19. beantwortet; und es folgt aus der Proportion

$$A : B = C : D$$

daß auch $mA : nB = mC : nD$ Satz 4.

ferner verwechselt $A : C = B : D$ Satz 16.

getrennt $A - B : B = C - D : D$ Satz 17.

verbunden $A + B : B = C + D : D$ Satz 18.

Endlich, wenn $A = a + \alpha$ und $B = b + \beta$

und es ist $A : B = a : b$

so ist auch $\alpha : \beta = A : B$; Satz 19.

3. Von ungleichen Verhältnissen.

Die Verhältnisse $A : B$ und $C : D$ sind ungleich, wenn für beliebige Werthe von m und n zwar $mA > nB$, aber nicht zugleich $mC > nD$ ist (E. 6.); und es hat bei dieser Voraussetzung A zu B ein größeres Verhältniß, als $C : D$.

Diese Erklärung führt zu den Sätzen:

Ist $A > C$, so folgt

$$A : B > C : B$$

und $B : A < B : C$; Satz 8.

und wenn umgekehrt ist

$A : B > C : B$, so folgt $A > C$

und für $B : A < B : C$, ist $A > C$; Satz 10.

Ist endlich $A : B = a : b$
aber $a : b > C : D$

so ist auch $A : B > C : D$. (Satz 13.)

4. Die Sätze von mehreren Verhältnissen.

Sind zwei Reihen Größen gegeben

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E$$
$$a,\ b,\ c,\ d,\ e$$

und es ist der Ordnung nach jedes Glied der ersten Reihe zu demselben Gliede der zweiten Reihe in demselben Verhältnisse; ist also

$$A : a = B : b = C : c = D : d = E : e$$

so bilden diese Größen mehrere gleiche Verhältnisse; aus welchen man folgern kann, „daß auch die Summe aller Glieder der ersten Reihe, also die Summe aller Vorderglieder der einzelnen Verhältnisse, zu der Summe aller Glieder der zweiten Reihe, also zu der Summe aller Hinterglieder in eben diesem Verhaltnisse seyn muß; Satz 12. Es folgt also aus den obigen gleichen Verhältnissen: daß auch ist

$$(A + B + C + D + E) : (a + b + c + d + e) = A : a = B : b = C : c \text{ rc.}$$

Werden je zwei auf einander folgende von den obigen Verhältnissen, „als eine Proportion für sich" genommen, und verwechselt man in jeder die mittleren Glieder mit einander (16.): so erhält man die Proportionen

$$A : B = a : b$$
$$B : C = b : c$$
$$C : D = c : d$$
$$D : E = d : e$$

und man sagt von den Größen $A,\ B,\ C,\ D,\ E$
und $a,\ b,\ c,\ d,\ e$

„daß sie mit einander in geordneter Proportion (E. 19.) sind". Aus dieser „Abhängigkeit zweier Reihen Größen von einander" aber folgt: daß, wenn in der ersten Reihe die erste Größe A größer, gleich oder kleiner ist, als die letzte E, auch in der zweiten Reihe die erste a im ersten Falle größer, im zweiten eben so groß, und im dritten kleiner als die letzte e seyn muß; Satz 20. Es ist also für $A \gtreqless E$ zugleich auch $a \gtreqless e$;
und es folgt hieraus unmittelbar, „daß, bei dieser Voraussetzung, auch in der ersten Reihe die erste Größe A zu der letzten E sich

verhalten muß, wie in der zweiten Reihe die Erste a zu der Letzten e sich verhält; Satz 22. Es ist also

$$A : E = a : e.$$

Da übrigens die beiden Reihen bei jedem Gliede angefangen und abgebrochen werden können: so folgt, „daß je zwei Glieder der ersten Reihe mit den Gliedern der zweiten Reihe, welche dieselben Stellen einnehmen, einerlei Verhältniß haben müssen". Sind also die Größen

$$A, B, C, D, E, F, G$$

mit a, b, c, d, e, f, g

in geordneter Proportion: so folgt nicht nur (wie in dem 22sten Satze bewiesen wird),

$$A : G = a : g$$

sondern es ist auch

$$A : F = a : f, \quad A : E = a : e \quad \text{etc.}$$

ferner $B : F = b : f, \quad B : D = b : d$ etc.

Hängen die Größen A, B, C, D, E

mit a, b, c, d, e

so zusammen, daß die Proportionen statt finden

$$A : B = d : e$$
$$B : C = c : d$$
$$C : D = b : c$$

und $D : E = a : b$

so sagt man, „sie sind in zerstreuter Proportion" (E. 20.); und es folgt nun hieraus auch,

daß, wenn $A \gtrless E$, zugleich seyn muß $a \gtrless e$ Satz 21.

und es ist $A : E = a : e$ Satz 23.

Diese Sätze sind zwar nur für Drei Größen, die mit eben so vielen Anderen in zerstreuter Proportion sind, in 21. und 23. bewiesen; sie behalten aber „für mehr als Drei Größen" ebenfalls ihre Gültigkeit.

Als eine unmittelbare Anwendung hieraus folgt: daß, wenn

$$A : B = C : D$$

und $a : B = c : D$

---

auch seyn muß $A + a : B = C + c : D$; Satz 24.

XXIV. Von der Proportion der Größen überhaupt.

§. 1. **Erklärung.** Hängen die Größen **A**, **B**, **C** und **D** so von einander ab, daß **B** aus **A** und **D** aus **C** durch Multiplication mit derselben Größe erhalten wird: so ist **A** zu **B** mit **C** zu **D** in einerlei Verhältniß, und es bilden diese Größen eine Proportion; es ist also

$$A : B = C : D.$$

Diese Proportion findet demnach statt: wenn für jede ganze oder gebrochene, oder auch für eine irrationale Zahl = q, zugleich ist

$$B = qA \text{ und } D = qC;$$

und es ist daher immer

$$A : qA = C : qC.$$

Die Größe q wird „der Verhältnißname, oder auch der Exponent des Verhältnisses" genannt.

Anmerkung. „Daß auch, nach der von Euklid gegebenen Erklärung (E. 5.), A zu qA mit C zu qC in einerlei Verhältniß ist, und diese Größen daher in Proportion stehen", ergiebt sich auf folgende Art:

Es ist $a : c = a : c$

und daher auch $a : a = c : c$

folglich ist $ma : na = mc : nc$. (4.)

Setzt man hier $ma = A$, $na = B$, $mc = C$ und $nc = D$

so ist $A : B = C : D$

und es ist nun $B = na$ $\quad D = nc$

und $\frac{A}{m} = a$ $\quad \frac{C}{m} = c$

daher auch $B = n \cdot \frac{A}{m}$ und $D = n \cdot \frac{C}{m}$

und $B = \frac{n}{m} \cdot A$ und $D = \frac{n}{m} \cdot C$.

Wird also $\frac{n}{m} = q$ gesetzt, so ist für $A : B = C : D$

$B = qA$ und $D = qC$.

---

§. 2. **Lehrsatz.** Sind vier Zahlengrößen in Proportion, so ist „das Produkt der beiden äußeren Glieder" dem Produkte der beiden mittleren gleich. Für **A : B = C : D** ist also **A × D = B × C.**

Beweis. Man kann setzen

$$B = Aq, \text{ und es ist alsdann } D = Cq.$$

Folglich ist $C \times B = C \times Aq$

und $A \times D = A \times Cq$

Da nun $C \times Aq = A \times Cq = ACq$

so ist auch $C \times B = A \times D$.

§. 3. Aufgabe. Zu drei gegebenen Zahlengrößen soll die vierte Proportionale gefunden werden.

Auflösung. Sind der Ordnung nach die drei gegebenen Größen A, B, C, und wird die gesuchte vierte Größe = X gesetzt: so soll seyn

$$A : B = C : X$$

und es ist daher nach Nr. 2. $A \times X = B \times C$.

Folglich ist $X = \frac{B \times C}{A}$.

Das vierte Glied einer Proportion wird also gefunden: wenn man das zweite Glied mit dem dritten multiplicirt, und das Produkt durch das erste Glied theilt.

§. 4. Lehrsatz. Hängen vier Größen A, B, C, D so von einander ab, daß das Produkt der beiden mittleren $B \times C$ dem Produkte der beiden äußeren $A \times D$ gleich ist: so sind sie der Ordnung nach proportionirt, und es ist also

$$A : B = C : D.$$

Beweis. Man suche zu den drei Größen A, B, C die vierte Proportionale X (§. 3.), daß also wird

$$A : B = C : X$$

so ist $B \times C = A \times X$ (nach §. 2.).

Nun soll aber auch seyn $B \times C = A \times D$ (p. h.)

folglich ist $A \times X = A \times D$

und daher $X = D$.

Da nun $A : B = C : X$ (p. c.)

so ist auch $A : B = C : D$ „

§. 5. Folgerungen. Sind vier Größen proportionirt, und ändert man die Ordnung, in welcher dieselben auf einander folgen, so daß hierbei noch immer das Produkt der beiden mittleren Glieder dem Produkte der äußeren gleich bleibt: so sind sie auch in dieser neuen Ordnung proportionirt.

Aus der Proportion $A : B = C : D$

folgt daher auch $A : C = B : D$

welches der 16te Satz des fünften Buches ist;

und $B : A = D : C$
und Dieses ist der Zusatz zu dem 4ten Satze des fünften Buches.

In dem ersten dieser beiden abgeleiteten Fälle bleiben die Produkte der beiden äußeren und der beiden mittleren Glieder dieselben; und in dem zweiten Falle wird das Produkt der mittleren das der äußeren, und umgekehrt.

§. 6. Zusatz. Ist $A : B = C : D$
so ist auch $mA : mB = C : D$
und $mA : B = mC : D$.

Denn da $A : B = C : D$, so ist $A \times D = B \times C$
und daher auch $mA \times D = mB \times C$
$= B \times mC$
und folglich nach §. 4. $mA : mB = C : D$
und $mA : B = mC : D$.

Stehen also Vier Größen in Proportion: so kann man ein äußeres und ein mittleres Glied mit demselben Factor multipliciren, ohne daß dadurch die Proportion aufgehoben wird.

Eben so folgt umgekehrt:
wenn $mA : mB = C : D$
so ist auch $A : B = C : D$
welchen Werth auch m haben mag.

§. 7. Lehrsatz. Sind Vier Größen proportionirt: so verhält sich auch das erste Glied zu der Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder, wie das dritte Glied zu der Summe oder Differenz der beiden Letzten sich verhält. Ist
$A : B = C : D$, so folgt $A : A + B = C : C + D$
und $A : A - B = C : C - D$.

Beweis. Man suche zu A, A + B und C die vierte Proportionale X, so ist

$$A : A + B = C : X$$

und daher $A \times X = (A + B) \times C$.
Nun ist aber $A \times D = B \times C$ (p. h.)
und $A \times C = A \times C$

folglich $A \times C + A \times D = A \times C + B \times C$
also $A \times (C + D) = (A + B) \times C$.
Da nun auch $A \times X = (A + B) \times C$

so ist $A \times (C + D) = A \times X$
und daher $C + D = X$.

Da nun $A : A + B = C : X$
so ist auch $A : A + B = C : C + D$.
Auf gleiche Art wird auch bewiesen, daß
$$A : A - B = C : C - D.$$

§. 8. Zusatz. Da aus der Proportion $A : B = C : D$
folgt $A : A + B = C : C + D$
so ist auch $A : C = A + B : C + D$ (§. 5.)
Es ist aber auch $A : C = B : D$
und daher $A + B : C + D = B : D$
folglich ist auch $A + B : B = C + D : D$.
Und eben so folgt
$$A - B : B = C - D : D;$$
welches die Sätze 17. und 18. des fünften Buches sind.

§. 9. Zusatz 2. Wenn $A : B = C : D$
so ist auch $A : C = B : D$
und daher $A - C : C = B - D : D$; nach §. 8.
folglich auch $A - C : B - D = C : D$;
und Dieses ist der 19te Satz des fünften Buches.

§. 10. Lehrsatz. Sind zwei Proportionen gegeben, und man multiplicirt der Ordnung nach von diesen Proportionen das erste Glied mit dem ersten, das zweite mit dem zweiten, das dritte Glied mit dem dritten und das vierte mit dem vierten: so stehen die hierdurch erhaltenen Produkte ebenfalls in Proportion. Ist also
$$a : b = c : d$$
und $\alpha : \beta = \gamma : \delta$
so ist auch $a\alpha : b\beta = c\gamma : d\delta$.

Beweis. Zu den drei Größen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ suche man die vierte Proportionale X: so ist
$a\alpha : b\beta = c\gamma : X$, und daher $a\alpha \times X = b\beta c\gamma$.
Da aber $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$
$\alpha : \beta = \gamma : \delta$ $\alpha\delta = \beta\gamma$
folglich $ad \times \alpha\delta = bc\beta\gamma$
und daher auch $a\alpha \times d\delta = b\beta c\gamma$.
Es ist also $a\alpha \times X = b\beta c\gamma$
und auch $a\alpha \times d\delta = b\beta c\gamma$
folglich $a\alpha \times X = a\alpha \times d\delta$
und daher $X = d\delta$.
Da nun $a\alpha : b\beta = c\gamma : X$
so ist auch $a\alpha : b\beta = c\gamma : d\delta$.

§. 11. Zusatz. Es sey $a : b = c : d$
also $a : b = c : d$

folglich ist auch $aa : bb = cc : dd$
oder $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

Sind also Vier Größen proportionirt, so sind die Quadrate dieser Größen ebenfalls proportionirt. Eben so folgt: daß, wenn Vier Größen proportionirt sind, auch die dritten Potenzen dieser Größen, und überhaupt gleichnamige Potenzen derselben ebenfalls in Proportion stehen.

§. 12. Lehrsatz. Sind Vier Größen proportionirt, so sind die Quadratwurzeln aus diesen Größen ebenfalls proportionirt.

Beweis. Es sey $A : B = C : D$, so ist $A \times D = B \times C$.

Setzt man nun $\sqrt{A} : \sqrt{B} = \sqrt{C} : X$

so ist auch $(\sqrt{A})^2 : (\sqrt{B})^2 = (\sqrt{C})^2 : X^2$ (§. 11.)

also $A : B = C : X^2$
und es ist daher $A \times X^2 = B \times C$

Folglich ist $A \times X^2 = A \times D$

also $X^2 = D$
und $X = \sqrt{D}$.

Da nun $\sqrt{A} : \sqrt{B} = \sqrt{C} : X$ (p. c.)
so ist auch $\sqrt{A} : \sqrt{B} = \sqrt{C} : \sqrt{D}$.

§. 13. Anmerkung. Auf gleiche Art läßt sich auch beweisen: daß, wenn Vier Größen proportionirt sind, die Kubikwurzeln dieser Größen, und überhaupt gleichnamige Wurzeln derselben, ebenfalls proportionirt seyn müssen.

§. 14. Lehrsatz. Sind mehrere gleiche Verhältnisse gegeben: so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zu der Summe aller Hinterglieder dieser Verhältnisse, wie Ein Vorderglied zu seinem Hintergliede sich verhält.

Ist also $A' : B' = A'' : B'' = A''' : B'''$, so ist auch
$(A' + A'' + A''') : (B' + B'' + B''') = A''' : B'''$.

Beweis. Da $A' : B' = A'' : B''$

so ist auch $A' : A'' = B' : B''$ (§. 5.)

und daher $A' : A' + A'' = B' : B' + B''$ (§. 7.)

Es ist also auch $A' : B' = A' + A'' : B' + B''$.

Da nun $A' : B' = A''' : B'''$

so folgt $A''' : B''' = A' + A'' : B' + B''$
und $A''' : A' + A'' = B''' : B' + B''$.

Hieraus folgt aber nun wieder

$A''' : A' + A'' + A''' = B''' : B' + B'' + B'''$ (§. 7.)

Folglich ist auch

$$A''' : B''' = (A' + A'' + A''') : (B' + B'' + B''')$$

was bewiesen werden sollte.

§. 15. Zusatz. Auf gleiche Art wird auch bewiesen: daß, wenn mehrere gleiche Verhältnisse gegeben sind, und man einige Vorderglieder addirt und die übrigen abzieht, und der Ordnung nach auch die entsprechenden Hinterglieder addirt und abgezogen werden, beide Resultate zu einander sich ebenfalls wie Ein Vorderglied zu seinem Hintergliede verhalten müssen.

Ist also $A' : B' = A'' : B'' = A''' : B'''$

so folgt, daß auch seyn muß

$$(A' - A'' + A''') : (B' - B'' + B''') = A''' : B'''$$

und eben so

$$(A' + A'' - A''') : B' + B'' - B''') = A''' : B''' \text{ ꝛc.}$$

§. 16. Lehrsatz. Sind mehrere Größen A, B, C, D, E, mit eben so vielen anderen a, b, c, d, e in geordneter Proportion; verhält sich also jedes Glied der ersten Reihe zu dem nächstfolgenden, wie in der zweiten Reihe das entsprechende Glied zu dem folgenden sich verhält: so verhält sich auch in der ersten Reihe das erste Glied zu dem letzten, wie in der zweiten Reihe das erste Glied zu dem letzten sich verhält.

Beweis. Da

$A : B = a : b$,	so ist auch	$A : a = B : b$
$B : C = b : c$	„ „	$B : b = C : c$
	also	$A : a = C : c$
$C : D = c : d$	„ „	$C : c = D : d$
	folglich	$A : a = D : d$
$D : E = d : e$	„ „	$D : d = E : e$
	und daher	$A : a = E : e.$

Eben so folgt: daß, wenn mehrere Größen mit eben so vielen anderen in geordneter Proportion sind, je zwei Glieder der ersten Reihe mit denselben Gliedern der zweiten Reihe ebenfalls proportionirt seyn müssen.

Anmerkung. Die Richtigkeit des obigen Satzes läßt sich auch auf folgende Art beweisen:

Es ist $A : B = a : b$
$B : C = b : c$
$C : D = c : d$
$D : E = d : e$

folglich ist $ABCD : BCDE = abcd : bcde$ (§. 10.)
und daher $ABCD \times bcde = BCDE \times abcd$ (§. 2.)

Also ist auch $A \times e = E \times a$
und folglich $A : E = a : e$ (§. 4.)

§. 17. **Lehrsatz.** Sind mehrere Größen A, B, C, D, E, mit eben so vielen andern a, b, c, d, e in **zerstreuter Proportion**; so daß sich von jenen die erste Größe zu der zweiten verhält, wie von diesen die vorletzte zu der letzten, und bei jenen nun ferner das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bei diesen die vorhergehende Größe zu dem Vordergliede u. s. w.: so sind diese Größen **aus dem Gleichen** proportionirt; es verhält sich nämlich von Jenen die erste Größe zu der letzten, wie von Diesen die Erste zu der Letzten sich verhält.

Beweis. Es ist nach der Voraussetzung
$A : B = d : e$
$B : C = c : d$
$C : D = b : c$
$D : E = a : b$

folglich ist auch $ABCD : BCDE = abcd : bcde$ (10.)
und daher $ABCD \times bcde = BCDE \times abcd$ (§. 2.)

folglich ist $A \times e = E \times a$
Und hieraus folgt $A : E = a : e$ (§. 4.)

§. 18. **Erklärung.** Drei Größen A, B, C, sind „**stetig proportionirt**": wenn die erste zu der zweiten, wie diese zu der dritten sich verhält, wenn also ist

$$A : B = B : C$$

und es wird in diesem Falle die zweite Größe B „**die mittlere Proportionale**" genannt.

Mehrere Größen sind „stetig proportionirt", wenn der Ordnung nach jede zu der nächstfolgenden dasselbe Verhältniß hat. Ist also

$$A : B = B : C = C : D$$

so sind A, B, C, D „vier stetige Proportionalen";
und für $A : B = B : C = C : D = D : E$
sind A, B, C, D, E „fünf stetige Proportionalen" rc.

§. 19. Sind drei Zahlengrößen stetig proportionirt, so ist das Produkt der beiden äußeren dem Quadrate der mittleren gleich.

Beweis. Da $A : B = B : C$

so folgt $A \times C = B \times B$. (§. 2.)

Da nun $B \times B = B^2$

so ist auch $A \times C = A^2$.

§. 20. Lehrsatz. Sind drei Größen stetig proportionirt: so verhält sich die Erste zu der Dritten, wie das Quadrat der Ersten zu dem Quadrate der Zweiten sich verhält.

Beweis: Es ist $A : B = B : C$

und $A : B = A : B$

folglich $A^2 : B^2 = AB : CB$. (§. 10.)

Da nun $AB : CB = A : C$

so ist auch $A : C = A^2 : B^2$.

Anmerkung. Nach der 10ten Erklärung des fünften Buches wird, wenn drei Größen A, B, C stetig proportionirt sind, das Verhältniß der ersten zur dritten ($A : C$) „das Zweifache des Verhältnisses der Ersten zur Zweiten" genannt; was dadurch bezeichnet wird, daß man setzt $A : C = 2\,(A : B)$.

Da nun, wenn $A : B = B : C$

hieraus folgt $A : C = A^2 : B^2$

so folgt, daß $2\,(A : B) = A^2 : B^2$.

Sind also zwei Größen M und N in dem zweifachen Verhältnisse zweier gegebenen Größen A und B, so verhalten sie sich wie die Quadrate dieser Größen.

Daher ist $M : N = 2\,(A : B)$

eben so viel als $M : N = A^2 : B^2$.

---

§. 21. Sind vier Größen stetig proportionirt: so verhält sich die Erste zu der Vierten, wie die dritte Potenz der Ersten zu der dritten Potenz der Zweiten sich verhält.

Beweis. Es ist $A : B = B : C = C : D$

also $A : B = A : B$

$A : B = B : C$

$A : B = C : D$

folglich auch $A^3 : B^3 = ABC : BCD$. (§. 10.)

Da nun $ABC : BCD = A : D$

so ist $A : D = A^3 : B^3$.

Anmerkung. Wenn $A : B = B : C = C : D$
so ist, nach der 11ten Erklärung des fünften Buches,

$$A : D = 3\,(A : B)$$

Da nun $A : D = A^3 : B^3$

so folgt $3\,(A : B) = A^3 : B^3$.

Sind also zwei Größen M und N in dem dreifachen Verhältnisse zweier gegebenen Größen A und B, so verhalten sie sich wie die dritten Potenzen dieser Größen. Daher ist $M : N = 3\,(A : B)$
eben so viel als $M : N = A^3 : B^3$.

---

§. 22. **Erklärung.** Die Größe A hat zu B ein größeres Verhältniß, als die Größe C zu D hat, wenn der Exponent des ersten Verhältnisses kleiner ist als der des zweiten. Es ist also
für $B = qA$ und $D = pC$, wenn $q < p$,

$$A : B > C : D.$$

Anmerkung. „Daß diese Erklärung eine nothwendige Folge ist von der 7ten Erklärung des fünften Buches, wornach

$$A : B > C : D$$

wenn zwei Zahlen m und n von der Art angegeben werden können, daß zwar $mA > nB$, aber nicht $mC > nD$"
ergiebt sich, wie folgt:

Da $q < p$, so kann man setzen $q + 2\,\delta = p$
und es ist bei dieser Voraussetzung

$$q + \delta > q \quad \text{und} \quad q + \delta < p$$

folglich auch $(q + \delta)\,A > qA$ und $(q + \delta)\,C < pC$.

Da nun $qA = B$ und $pC = D$

so ist $(q + \delta)\,A > B$ und $(q + \delta)\,C < D$.

Da sonach die vier Größen A, B, C, D in der Art von einander abhängen, daß, wenn man die Erste und Dritte mit $(q + \delta)$ und die Zweite und Vierte mit 1 multiplicirt, zwar ist

$(q + \delta)\,A > B$, aber nicht $(q + \delta)\,C > D$:

so folgt, nach der 7ten Erklärung des fünften Buches,

$$A : B > C : D.$$

Es ist also $A : B > C : D$, wenn für $B = qA$ und $D = pC$ ist $q < p$.

---

§. 23. **Folgerung.** Von zwei ungleichen Größen A und B hat zu Einer und derselben Größe, C, die größere A ein größeres Verhältniß, als die kleinere B; und Eine und dieselbe

Größe D hat zu der kleineren B ein größeres Verhältniß als zu der größeren A.

Beweis. Da $A > B$

so ist auch $qA > qB$.

Ist also $qA = D$

so ist $D > qB$

und daher für $pB = D$

auch $pB > qB$, also $p > q$.

Folglich ist, wenn $A > B$

für $D = qA$ und $D = pB$

$q < p$

und daher $A : D > B : D$ (§. 22.)

welches das Erste war.

Es sey ferner $A = mD$ und $B = nD$

so ist, wenn $A > B$

auch $mD > nD$

also $m > n$.

Da nun $mD = A$ und $nD = B$

so ist $D : A < D : B$

und Dieses war das zweite zu Beweisende.

XXV. Lehrsätze von den Proportionen.

Lehrsatz 183. Wenn da ist $A : B = C : D$

und $A : B = E : F$

so ist auch $C : D = E : F$.

Beweis (11.).

Lehrsatz 184. Ist $A : B = C : D$

und $A : E = C : F$

so folgt $B : E = D : F$.

Beweis (16.) und (11.).

Lehrsatz 185. Ist $A : B = C : D$

und $A : E = F : D$

so folgt $B : E = F : C$.

Beweis (§. 2.) und (§. 4.).

Anmerkung. „Daß, wenn zwei Proportionen die äußeren Glieder gleich haben, so daß das erste dem ersten und das vierte Glied dem vierten gleich

ist, die mittleren Glieder der einen Proportion die mittleren, und die äußeren die äußeren Glieder einer neuen Proportion bilden", läßt sich auf folgende Art beweisen:

Es ist, nach der Voraussetzung,

$A : B = C : D$, daher ist $B : A = D : C$

und ebenfalls nach der Voraussetzung $A : E = F : D$.

Folglich sind die Größen B, A, E

mit F, D, C

in zerstreuter Proportion (E. 20.)

und es ist daher $B : E = F : C$. (24.)

Lehrsatz 186. Wenn $A : B = C : D$

so ist auch $A + B : A - B = C + D : C - D$.

Beweis (17.), (18.) und (11.).

Lehrsatz 187. Wenn $A : B' = C : D'$

und $A : B'' = C : D''$

so ist auch $A : (B' + B'') = C : (D' + D'')$.

Beweis (16.), (17.) und (18.).

Lehrsatz 188. Ist $A : B' = C : D'$

und $A : B'' = C : D''$

so folgt auch $A : (B' - B'') = C : (D' - D'')$.

Beweis (16.), (11.) und (17.).

Lehrsatz 189. Wenn $A : B' = C : D'$

und $A : B'' = C : D''$

so folgt $A : (mB' + nB'') = C : (mD' + nD'')$.

Beweis (15.) und (Lhrs. 187.).

Lehrsatz 190. Ist $A : B' = C : D'$

und $A : B'' = C : D''$

so ist auch $A : (mB' - nD'') = C : (mD' - nD'')$.

Beweis (15.) und (Lhrs. 188.).

Lehrsatz 191. Ist $A : B = C' : D'$

$A : B = C'' : D''$

$A : B = C''' : D'''$

so ist auch $A : B = (C' + C'' + C''') : (D' + D'' + D''')$.

Beweis (22.) und (11.).

Lehrsatz 192. Wenn die Proportion statt findet

$A : mB = C : D$

so ist auch $A : B = mC : D$.

Beweis (§ 4.).

Lehrsatz 193. Ist $A : B = C : D$

so ist auch $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = C : D$

und eben so $\frac{A}{m} : B = \frac{C}{m} : D$

Beweis (§. 4.)

Lehrsatz 194. Ist $A' : B = C' : D$
und auch $A'' : B = C'' : D$
und es ist $A'' > A'$, so ist auch $C'' > C'$
für $A'' = A'$ ist auch $C'' = C'$
und für $A'' < A'$ " " $C'' < C'$.
Beweis (8.), (13.) und (10.).

Lehrsatz 195. Wenn in der Proportion $A : B = C : D$ die drei Glieder A, B und C verschiedene Werthe haben, so daß Keines derselben dem Anderen gleich ist: so kann der Werth des vierten Gliedes weder dem von B noch dem von C gleich seyn.

Beweis folgt indirect aus (9.).

Lehrsatz 196. Sind in der Proportion $A : B = C : D$ drei Glieder ihrem Werthe nach verschieden, so daß keins dem andern gleich ist, so kann nicht seyn

$$A + D = B + C.$$

Beweis (25.).

Lehrsatz 197. Ist $A : B = C : D$, und ist A verschieden von B und C, so kann weder seyn

$A + B = C + D$, noch $A + C = B + D$.

Beweis (14.).

Lehrsatz 198. Wenn $A : B = C : D$, und es ist
$A > C$, so ist auch $A \times B > C \times D$
$A = C$ " " $A \times B = C \times D$
$A < C$ " " $A \times B < C \times D$.
Beweis. (14.).

Lehrsatz. 199. Sind die vier Größen A, B, C, D ihrem Werthe nach verschieden, und ist die Summe zweier derselben der Summe der beiden Uebrigen gleich, so können diese Größen keine Proportion bilden.

Beweis (Lhrs. 196.) und (Lhrs. 197.).

Lehrsatz. 200. Sind drei Größen stetig proportionirt, ist also $A : B = B : C$, so ist die Summe der beiden äußeren Glieder größer als das zweifache mittlere Glied; es ist also

$$A + C > 2B.$$

Beweis (25.).

XXVI. Fortsetzung der Aufgaben.

§. 29.

Aufgaben von den Proportionen.

Aufgabe 469. Das Verhältniß von $A : B$, und auch das von $A : C$ ist in Zahlen gegeben; es soll hieraus bestimmt werden, wie B zu C sich verhält.

Auflösung. Ist $A : B = m : n$ und $A : C = p : q$, so hat man $B : A = n : m$

und $A : C = p : q$

daher $AB : AC = np : mq$ (§. 10.)

Da nun $AB : AC = B : C$

so ist auch $B : C = np : mq$.

Beispiel. Wenn $A : B = 3 : 5$

und $A : C = 4 : 7$

so folgt $B : C = 5 . 4 : 3 . 7$

also $B : C = 20 : 21$.

Aufgabe 470. Das Verhältniß von $A : B$ und auch das von $C : B$ ist gegeben; es soll hieraus gefunden werden, wie A zu C sich verhält.

Auflösung. Ist $A : B = m : n$

und $C : B = p : q$

so folgt hieraus $A : C = mq : np$.

Aufgabe 471. Man kennt das Verhältniß von $A : B$ und auch das von $B : C$; es soll hieraus bestimmt werden, wie A zu C sich verhält.

Auflösung. Ist $A : B = m : n$

und $B : C = p : q$

so folgt $A : C = mp : nq$

Beispiel. Ist $A : B = 4 : 5$
und $B : C = 2 : 3$

so folgt $A : C = 8 : 15.$

Aufgabe 472. Es ist in Zahlen gegeben, „wie die Größen A und B, und wie B und C sich zu einander verhalten“; man soll drei Zahlen finden, die mit A, B, C in geordneter Proportion sind.

Analysis. Es sey $A : B = m : n$
und $B : C = p : q$

so ist auch $A : B = mp : np$ (15.)
und $B : C = np : nq$

und es ist daher $A : B : C$
$= mp : np : nq$

folglich sind die Zahlen mp, np und nq
mit A, B, C

in geordneter Proportion.

Beispiel. Es sey $A : B = 3 : 4$
und $B : C = 5 : 6$

so folgt $A : B : C$
$= 3 . 5 : 4 . 5 : 4 . 6$
$= 15 : 20 : 24.$

Aufgabe 473. Es ist in Zahlen das Verhältniß gegeben von $A : B$, das von $B : C$, von $C : D$ und von $D : E$; es sollen aus diesen Verhältnissen Zahlen abgeleitet werden, die mit den Größen A, B, C, D, E in geordneter Proportion sind.

Analysis. Es sey $A : B = a' : b$
$B : C = b' : c$
$C : D = c' : d$
und $D : E = d' : e$

so ist auch

$A : B = a' . b'c'd' : b . b'c'd'$ (15.)
$B : C = b' . bc'd' : c . bc'd'$ „
$C : D = c' . bcd' : d . bcd'$ „
und $D : E = d' . bcd : e . bcd$ „

Da nun hier das Hinterglied eines jeden Verhältnisses dem Vordergliede des folgenden gleich ist, also

$b . b'c'd' = b' . bc'd = bb'c'd'$
$c . bc'd' = c' . bcd' = bcc'd'$
$d . bcd' = d' . bcd = bcdd'$

so folgt, daß auch ist

$$a'b'c'd' : bb'c'd' : bcc'd' : bcdd' : bcde$$
$$= A : B : C : D : E.$$

es sind also die gefundenen Zahlen, mit den gegebenen Größen geordnet, proportionirt.

Auflösung. Ist die Abhängigkeit der Größen A, B, C, D, E in der Art gegeben, daß man das Verhältniß einer jeden zu einer der folgenden kennt: so lassen sich hieraus Zahlen, die mit diesen Größen in geordneter Proportion sind, dadurch finden, „daß man das Produkt aller Vorderglieder der in Zahlen gegebenen Verhältnisse als die der A homologe Zahl annimmt". Wird hierauf in diesem Produkte das Vorderglied des Verhältnisses A : B mit dem Hintergliede dieses Verhältnisses vertauscht: so erhält man die der B homologe Zahl, aus welcher nun die der C homologe Zahl auf gleiche Weise abgeleitet werden kann u. s. f.

Beispiel. Es sey $A : B = 4 : 5$
$B : C = 3 : 5$
$C : D = 4 : 3$
und $D : E = 7 : 5.$

Nimmt man nun
als der A homolog die Zahl $4 . 3 . 4 . 7 =$
so ist B " " " $5 . 3 . 4 . 7 = 5 . 3 . 4 . 7$
C " " " $5 . 5 . 4 . 7 = 5 . 5 . 4 . 7$
D " " " $5 . 5 . 3 . 7 = 5 . 5 . 3 . 7$
E " " " $5 . 5 . 3 . 5.$

Folglich ist $A : B : C : D : E$
$= (4 . 3 . 4 . 7) : (5 . 3 . 4 . 7) : (5 . 5 . 4 . 7) : (5 . 5 . 3 . 7) : (5 . 5 . 3 . 5)$
$= 336 : 420 : 700 : 525 : 375.$

Zusatz. Sind mehrere Größen A, B, C, D, E mit eben so vielen Anderen a, b, c, d, e in geordneter Proportion: so stehen je zwei Größen der ersten Reihe mit denselben Größen der zweiten Reihe in gleichem Verhältniß (§. 16.), und es ist also, wenn $A : B = a : b$
$B : C = b : c$
$C : D = c : d$
$D : E = d : e$

auch $A : C = a : c$ $\quad B : D = b : d$
$A : D = a : d$ $\quad B : E = b : e$
$A : E = a : e$ $\quad D : E = d : e.$

Ist also die Abhängigkeit mehrerer Größen von einander dadurch bestimmt, daß man das Verhältniß von jeder zu irgend einer der folgenden kennt: so lassen sich hieraus die gemeinschaftlichen Verhältnißzahlen dieser Größen ableiten, durch welche bestimmt ist, wie jede derselben zu jeder der übrigen sich verhält.

Einige Anwendungen hiervon enthalten die nächstfolgenden Aufgaben.

Aufgabe 474. Eine Summe soll unter vier Personen vertheilt werden, so daß, wenn **A** erhält 3 Thlr., **B** deren 4 bekömmt; so oft **B** 5 Thlr. erhält, soll **C** deren 3 bekommen; und wenn **C** 5 Thlr. bekömmt, erhält **D** deren 7. Wie verhält sich daher der Antheil eines Jeden zu dem Antheile jedes der Uebrigen?

Auflösung. Da $A : B = 3 : 4$
$B : C = 5 : 3$
$C : D = 5 : 7$

so ist, wenn man nimmt

die der **A** homologe Zahl $= 3 . 5 . 5$
B " " $= 4 . 5 . 5 = 4 . 5 . 5$
C " " $= 4 . 3 . 5 = 4 . 3 . 5$
D " " $= 4 . 3 . 7$

und es ist daher $A : B : C : D$
$= (3 . 5 . 5) : (4 . 5 . 5) : (4 . 3 . 5) : (4 . 3 . 7)$
$= 75 : 100 : 60 : 84$

So oft also **A** 75 Thlr. erhält, ist der Antheil von $B = 100$ Thlr., von $C = 60$ Thlr., und von $D = 84$ Thlr.

Aufgabe 475. Ein Grundstück soll in fünf Theile **A**, **B**, **C**, **D**, **E** getheilt werden, so daß sich verhält der Theil

$A : B = 2 : 3$
$B : C = 4 : 5$
$C : D = 3 : 2$
und $D : E = 5 : 3$

Nach welchem Verhältnisse ist dasselbe daher zu theilen?

Auflösung. Wird angenommen

die der **A** homologe Zahl $= 2 . 4 . 3 . 5$
so ist die der **B** " " $= 3 . 4 . 3 . 5 = 3 . 4 . 3 . 5$
" " " " **C** " " $= 3 . 5 . 3 . 5 = 3 . 5 . 3 . 5$
" " " " **D** " " $= 3 . 5 . 2 . 5 = 3 . 5 . 2 . 5$
" " " " **E** " " $= 3 . 5 . 2 . 3$

und daher ist

$$A : B : C : D : E$$
$$= (2.4.3.5) : (3.4.3.5) : (3.5.3.5) : (3.5.2.5) : (3.5.2.3)$$
$$= 120 : 180 : 225 : 150 : 90$$

und es ist daher auch, wenn man den gemeinschaftlichen Factor aller dieser Verhältnißzahlen = 15 aushebt

$$A : B : C : D : E$$
$$= 15.8 : 15.12 : 15.15 : 15.10 : 15.6$$
$$= 8 : 12 : 15 : 10 : 6.$$

Aufgabe 476. Eine Linie soll in 6 Theile getheilt werden, so daß sich verhält der 1ste Theil zu dem 2ten, wie 4 : 3, der 2te zu dem 3ten, wie 5 : 6, der 3te zu dem 4ten, wie 8 : 5, der 4te zu dem 5ten, wie 9 : 7, und der 5te zu dem 6ten, wie 6 : 7. Nach welchem Verhältnisse muß daher die Linie getheilt werden?

Auflösung. Es muß sich verhalten

der Theil I : II : III : IV : V : VI
wie 480 : 360 : 432 : 270 : 210 : 245.

Aufgabe 477. Eine Zahl soll in 5 Theile A, B, C, D, E getheilt werden, daß sich verhält

$$A : B = 3 : 4$$
$$B : C = 5 : 6$$
$$A : D = 8 : 3$$
$$B : E = 4 : 5.$$

Nach welchem Verhältniß muß diese Zahl getheilt werden?

Auflösung. Wenn gleich hier nicht, wie bei der vorigen Aufgabe, das Verhältniß eines jeden Theiles zu dem nächstfolgenden gegeben ist, sondern nur das Verhältniß eines Theiles zu irgend einem der folgenden, z. B. von A : D statt C : D, und von B : E statt von D : E: so lassen sich doch die gemeinschaftlichen Verhältnißzahlen nach denselben Regeln, wie bei den vorigen Aufgaben ableiten. Es ist also

für $A = 3.5.8.4 : B = 4.5.8.4$
„ $B = 4.5.8.4 : C = 4.6.8.4$
„ $A = 3.5.8.4 : D = 3.5.3.4$
„ $B = 4.5.8.4 : E = 4.5.8.5$

und hieraus folgt

$$A : B : C : D : E$$
$$= (3.5.8.4) : (4.5.8.4) : (4.6.8.4) : (3.5.3.4) : (4.5.8.5)$$
$$= 4.120 : 4.160 : 4.192 : 4.45 : 4.200$$
$$= 120 : 160 : 192 : 45 : 200.$$

Aufgabe 478. Eine Summe soll unter 6 Personen so vertheilt werden, daß sich verhält der Antheil von

$$A : B = 5 : 6$$
$$B : C = 8 : 5$$
$$A : D = 4 : 3$$
$$B : E = 9 : 5$$
und $$D : F = 5 : 6.$$

Nach welchem gemeinschaftlichen Verhältniß muß diese Summe daher getheilt werden?

Auflösung. Es muß die Summe so getheilt werden, daß sich verhält

$$A : B : C : D : E : F$$
$$= 60 : 72 : 45 : 45 : 40 : 54.$$

Anmerkung. Mehrere hierher gehörige Aufgaben findet man in Unger's arithmetischen Unterhaltungen, Erfurt 1832, Seite 92 u. f. w.

Aufgabe 479. Das Verhältniß zweier Zahlen ist durch Brüche ausgedrückt; man soll ein gleiches Verhältniß in möglichst kleinen ganzen Zahlen angeben.

Auflösung. Da $A : B = mA : mB$. (15.)
so wird das Verhältniß nicht geändert, wenn man beide Glieder desselben mit einem und demselben Factor multiplicirt. Wählt man nun die Zahl m, so daß sie die Nenner der beiden Größen A und B als Factoren enthält: so werden mA und mB ganze Zahlen, und es lassen sich hieraus die möglich kleinsten ganzen Zahlen ableiten, wenn man sie durch ihren größten gemeinschaftlichen Factor theilt.

Z. B. Es soll das Verhältniß von $9\frac{3}{8}$ zu $15\frac{5}{6}$ in möglichst kleinen ganzen Zahlen angegeben werden.

Es ist $9\frac{3}{8} : 15\frac{5}{6} = \frac{75}{8} : \frac{95}{6}$.

und da 8 und 6 Factoren der 24 sind, so setzt man

$$9\tfrac{3}{8} : 15\tfrac{5}{6} = 24 \cdot \frac{75}{8} : 24 \cdot \frac{95}{6}$$
$$= 3 \cdot 75 : 4 \cdot 95$$
$$= 3 \cdot 5 \cdot 15 : 4 \cdot 5 \cdot 19$$

also $9\frac{3}{8} : 15\frac{5}{6} = 5 \cdot 45 : 5 \cdot 76$

und weil $5 \cdot 45 : 5 \cdot 76 = 45 : 76$

---

so ist $9\frac{3}{8} : 15\frac{5}{6} = 45 : 76.$

Aufgabe 480. Zu drei gegebenen Zahlengrößen soll die vierte Proportionale gefunden werden.

Auflösung. Sind der Ordnung nach die drei gegebenen Glieder a, b, c, und setzt man das gesuchte vierte Glied $= x$, so ist für

$$\frac{a : b = c : x}{ax = bc \text{ nach Nr. 2.}}$$

$$\text{und } x = \frac{bc}{a}.$$

Z. B. Soll zu den drei Zahlen $5\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{3}$ und 27 die 4te Proportionale gefunden werden, so ist für

$$5\tfrac{1}{4} : 8\tfrac{1}{3} = 27 : x$$

$$x = \frac{8\frac{1}{3} \times 27}{5\frac{1}{4}} = \frac{300}{7} = 42\tfrac{6}{7}.$$

Aufgabe 481. Zu zwei gegebenen Zahlen soll die dritte Proportionale gefunden werden.

Auflösung. Sind a und b die gegebenen Zahlen, und ist x die gesuchte, und soll seyn

$$\frac{a : b = b : x}{\text{so ist } ax = b^2 \quad (\S.\ 2.)}$$

$$\text{und daher } x = \frac{b^2}{a}.$$

Die dritte Proportionale wird also gefunden, wenn man das Quadrat des mittleren Gliedes durch das erste Glied theilt.

Z. B. wenn das erste Glied $= 5$ und das mittlere Glied $= 8$ ist, so wird die dritte Proportionale

$$x = \frac{8^2}{5} = \frac{64}{5} = 12\tfrac{4}{5}.$$

Aufgabe 482. Zwischen zwei gegebenen Zahlen soll die mittlere Proportionale gefunden werden.

Auflösung. Sind a und c die gegebenen Zahlen, und soll x die mittlere Proportionale zwischen Beiden seyn: so ist

$$\frac{a : x = x : c}{\text{also } x^2 = ac \quad (\S.\ 2.)}$$

$$\text{und daher } x = \sqrt{ac}.$$

Die mittlere Proportionale ist also die Quadratwurzel aus dem Produkte der gegebenen äußeren Glieder.

3. B. Soll die mittlere Proportionale x gefunden werden zwischen den Zahlen 8 und 18, so findet man

$$x = \sqrt{8 \,.\, 18} = \sqrt{144} = 12.$$

Zusatz. Die mittlere Proportionale läßt sich nur in dem Falle arithmetisch genau angeben, wenn das Produkt der gegebenen äußeren Glieder ein Quadrat ist. Ist dieses Produkt kein Quadrat, so kann man für die mittlere Proportionale nur einen Näherungswerth dadurch finden, daß man die Quadratwurzel auf einige Decimalstellen genau aufsucht. So ist z. B. die mittlere Proportionale zwischen 12 und $18 = \sqrt{12 \,.\, 18} = \sqrt{216} = 14{,}697$.

Aufgabe 483. Das Verhältniß zweier Größen ist gegeben und die Summe derselben; man soll hieraus die Größen selbst finden.

Analysis. Sollen die gesuchten Größen x und y sich verhalten wie m : n, so ist

$$m : n = x : y$$

$$\text{und daher } m + n : n = x + y : y \quad (18.)$$

Da nun m und n, also auch m + n gegeben ist, und außerdem auch die Summe x + y der gesuchten Größen, so sind von der Proportion

$$m + n : n = x + y : y$$

die drei ersten Glieder gegeben; und es kann also das 4te Glied gefunden werden, welches die eine der beiden unbekannten Größen ist, durch welche alsdann auch die andere sich finden läßt.

Auflösung. Zu der Summe der zwei gegebenen Verhältnißzahlen, der zweiten dieser Zahlen und der gegebenen Summe der unbekannten Zahlen, suche man die vierte Proportionale, so ist diese die zweite der beiden unbekannten Größen; und zieht man diese von der Summe Beider ab, so wird die Erste erhalten.

Beispiel. Zwei Zahlen, deren Summe = 20 ist, verhalten sich zu einander wie 3 : 5; wie groß ist jede dieser Zahlen?

Hier soll seyn $3 : 5 = x : y$

und daher $3 + 5 : 5 = x + y : y$

also $8 : 5 = 20 : y$

folglich ist $y = \dfrac{5 \,.\, 20}{8} = 12\tfrac{1}{2}$

und daher $x = 20 - 12\tfrac{1}{2} = 7\tfrac{1}{2}$.

Die gesuchten Zahlen sind also $7\tfrac{1}{2}$ und $12\tfrac{1}{2}$.

Aufgabe 484. Das Verhältniß zweier Größen ist gegeben und die Differenz derselben; man soll hieraus diese Größen finden.

Analysis. Sollen die gesuchten Größen x und y wie m zu n sich verhalten, so ist

$$m : n = x : y$$

und daher $m - n : n = x - y : y$.

Da nun die Differenz $x - y$ gegeben ist, und auch m und n, so kann y gefunden werden, und hierdurch auch x.

Auflösung. Zu der Differenz der gegebenen Verhältnißzahlen, der zweiten dieser Zahlen und der gegebenen Differenz der beiden unbekannten Größen, suche man die vierte Proportionale, so ist diese die zweite unbekannte Größe; und es wird hieraus die erste gefunden, wenn man zu derselben die Differenz Beider addirt.

Beispiel. Zwei Zahlen, deren Differenz 15 beträgt, verhalten sich zu einander, wie 5 zu 3; wie groß ist jede dieser Zahlen?

Hier soll seyn $5 : 3 = x : y$

und daher $5 - 3 : 3 = x - y : y$

also $2 : 3 = 15 : y$

folglich ist $y = \frac{3 \,.\, 15}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$

und daher $x = 22\frac{1}{2} + 15 = 37\frac{1}{2}$.

Anmerkung. Bei dieser Auflösung wird die größte der beiden gegebenen Verhältnißzahlen als das erste Glied des Verhältnisses angenommen.

Aufgabe 485. Die Summe dreier Größen ist gegeben, und drei Zahlen, mit denen sie geordnet proportionirt sind; es sollen die Größen gefunden werden.

Analysis. Sind die drei gesuchten Größen α, β, γ, ihre gegebene Summe also $\alpha + \beta + \gamma$; und sind die gegebenen Verhältnißzahlen a, b, c, so ist

da a, b, c

mit α, β, γ geordnet proportionirt seyn sollen

$a : b = \alpha : \beta$, also auch $a : \alpha = b : \beta$

$b : c = \beta : \gamma$ $\quad b : \beta = c : \gamma$

und daher $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$

folglich ist auch $(a + b + c) : (\alpha + \beta + \gamma) = a : \alpha$
$$= b : \beta$$
$$= c : \gamma \quad (12.)$$

Nun sind a, b, c, also auch $(a + b + c)$ und die Summe $(\alpha + \beta + \gamma)$ gegeben, folglich können die Größen α, β und γ gefunden werden.

Auflösung. Die Summe der drei gegebenen Verhältnißzahlen verhält sich zu der gegebenen Summe der drei gesuchten Größen, wie jede der gegebenen Verhältnißzahlen, besonders, zu der ihr homologen unbekannten Größe sich verhält.

Beispiel. Man soll die Zahl 160 in 3 Theile theilen, die sich verhalten wie 7, 8 und 10; wie groß ist jeder Theil?

Da $7 + 8 + 10 = 25$, so ist

$$25 : 160 = \begin{cases} 7 : \alpha \\ 8 : \beta \\ 10 : \gamma \end{cases}$$

und weil $25 : 160 = 5 : 32$, so ist auch

$$5 : 32 = \begin{cases} 7 : \alpha \\ 8 : \beta \\ 10 : \gamma \end{cases}$$

und es ist daher $\alpha = \frac{32 . 7}{5} = 44\frac{4}{5}$

$$\beta = \frac{32 . 8}{5} = 51\frac{1}{5}$$

$$\gamma = \frac{32 . 10}{5} = 64$$

und $(\alpha + \beta + \gamma) \qquad = 160$

wie es seyn muß.

Zusatz. Durch ein gleiches Verfahren kann eine gegebene Zahl auch in mehr als drei Theile „nach gegebenen Verhältnissen" getheilt werden.

Aufgabe 486. Die Zahl 240 soll in 5 Theile getheilt werden, die sich zu einander verhalten wie die Zahlen 8, 9, 13, 20 und 25.

Auflösung. Da $8 + 9 + 13 + 20 + 25 = 75$ und $75 : 240 = 15 . 5 : 15 . 16 = 5 : 16$, so ist

$$5 : 16 = \begin{cases} 8 : \alpha \\ 9 : \beta \\ 13 : \gamma \\ 20 : \delta \\ 25 : \varepsilon \end{cases}$$

und es ist daher $\alpha = \frac{16.8}{5} = 25\frac{3}{5}$

$\beta = \frac{16.9}{5} = 28\frac{4}{5}$

$\gamma = \frac{16.13}{5} = 41\frac{3}{5}$

$\delta = \frac{16.20}{5} = 64$

$\varepsilon = \frac{16.25}{5} = 80$

und $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 240$; wie es seyn muß.

Anmerkung. Mehrere Anwendungen hiervon findet man in dem 3ten Abschnitte von Unger's arithmetischen Unterhaltungen, Erfurt 1832.

Aufgabe 487. Von einer geometrischen Proportion ist gegeben die Summe des ersten und zweiten Gliedes, die Summe des ersten und dritten, und die Summe des dritten und vierten Gliedes; es sollen hieraus die einzelnen Glieder gefunden werden.

Analysis. Sind a, b, c und d die gesuchten 4 Größen, so ist gegeben a + b, a + c und c + d, und es soll seyn

$$a : b = c : d$$

$$\text{daher } a : a + b = c : c + d \quad (\S.\ 7.)$$

$$\text{also auch } a : c = a + b : c + d \quad (16.)$$

Nun sind a + b und c + d gegeben, also auch das Verhältniß derselben, und daher auch das Verhältniß von a : c; und da nun a + c ebenfalls gegeben ist, so können a und c gefunden werden (Aufg. 483.), und hierdurch auch b und d.

Beispiel. Von einer geometrischen Proportion ist die Summe des ersten und zweiten Gliedes a + b = 22
„ „ „ „ dritten „ a + c = 28
„ „ dritten und vierten „ c + d = 55.
Wie groß ist jedes dieser Glieder?

$$\begin{aligned} \text{Da } a : c &= a + b : c + d \\ \text{so ist } a : c &= 22 : 55 \\ &= 2 : 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{daher } a : a + c &= 2 : 7 \\ \text{und weil } a + c &= 28 \end{aligned}$$

$$a : 28 = 2 : 7$$

folglich ist $a = \frac{28 . 2}{7} = 8.$

$$\begin{aligned} \text{Da nun } a + b &= 22, \text{ so ist } b = 22 - 8 = 14 \\ a + c &= 28 \quad \text{„} \quad c = 28 - 8 = 20 \\ c + d &= 55 \quad \text{„} \quad d = 55 - 20 = 35 \end{aligned}$$

die vier gesuchten Größen sind also 8, 14, 20 und 35:

Aufgabe 488. Von einer geometrischen Proportion $a : b = c : d$ kennt man die Summe des ersten und zweiten Gliedes, die Summe des dritten und vierten Gliedes, und die Differenz des ersten und dritten; es sollen die Glieder dieser Proportion gefunden werden.

Gegeben $a + b$, $c + d$, und $a - c$.

Aufgabe 489. Von einer geometrischen Proportion ist gegeben die Summe des ersten und zweiten Gliedes, die Summe des zweiten und dritten, und die des dritten und vierten; es sollen die einzelnen Glieder gefunden werden.

Gegeben $a + b$, $b + c$ und $c + d$.

Analysis. Es ist $a : b = c : d$

$$\text{daher } a : a + b = c : c + d$$

$$\text{und } a : c = a + b : c + d$$

folglich ist das Verhältniß von $a : c$ gegeben. Nun ist aber auch gegeben $a + b$ und $b + c$, also die Differenz beider $= a + b - (b + c) = a - c$; es können also a und c gefunden werden (Aufg. 484.), und hierdurch auch b und d.

Beispiel. Von einer geometrischen Proportion ist die Summe des ersten und zweiten Gliedes $a + b = 28$
„ „ zweiten „ dritten „ $b + c = 18$
„ „ dritten „ vierten „ $c + d = 12.$

Wie groß ist jedes Glied dieser Proportion?

$$\begin{aligned} \text{Da } a + b &= 28 \\ \text{und } b + c &= 18 \end{aligned}$$

$$\text{so ist } a - c = 10.$$

Nun ist $a : c = a + b : c + d$
$= 28 \quad : 12 = 7 : 3$

folglich ist $a : a - c = 7 : 4$
also $a : 10 \quad = 7 : 4$

und daher $a = \frac{10 . 7}{4} = 17\frac{1}{2}$.

Da nun $a + b = 28$, so ist $b = 28 - 17\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$
$b + c = 18 \qquad c = 18 - 10\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$
$c + d = 12 \qquad d = 12 - 7\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

die vier gesuchten Größen sind also $17\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, und $4\frac{1}{2}$.

Aufgabe 490. Von den vier Größen einer geometrischen Proportion ist gegeben die Summe des ersten und zweiten Gliedes, die Differenz des zweiten und dritten, und die Summe des dritten und vierten; es sollen hieraus die Glieder der Proportion gefunden werden.

Gegeben $a + b$, $b - c$ und $c + d$.

Aufgabe 491. Das Produkt zweier Größen und ihre Summe ist gegeben; man soll die Größen hieraus berechnen.

Analysis. Sind die beiden Größen x und y, so kennt man $x + y$, und daher auch das Quadrat der Summe $= (x + y)^2$; und da das Produkt xy gegeben ist, so ist auch das vierfache Produkt gegeben $= 4\,xy$, folglich kennt man $(x + y)^2 - 4\,xy$. Nun ist aber

$$(x + y)^2 - 4\,xy = (x - y)^2 \quad \text{(II. 8.)}$$

also ist $(x - y)^2$ und also auch $x - y$ gegeben, aber auch $x + y$ ist gegeben, folglich kennt man von den beiden Größen ihre Summe und ihre Differenz, wodurch die Größen selbst bestimmt sind. (Seite 198.)

Auflösung. Von dem Quadrate der Summe beider Größen ziehe man ihr vierfaches Produkt ab, und ziehe aus dem Reste die Quadratwurzel, so giebt diese die Differenz der beiden Größen. Addirt man diese Differenz zu ihrer Summe und nimmt hiervon die Hälfte, so erhält man die größere; und wird die Differenz von der Summe abgezogen und die Hälfte genommen, so bekömmt man die kleinere der beiden gesuchten Größen.

Beispiel. Die Summe zweier Größen ist 32 und ihr Produkt 240; es sollen diese Größen gefunden werden.

Werden die beiden Größen mit x und y bezeichnet, so ist

$$x + y = 32, \text{ also } (x + y)^2 = 32^2 = 1024$$
$$xy = 240 \quad \text{"} \quad 4xy = 4 . 240 = 960.$$

Es ist also $x^2 + 2xy + y^2 = 1024$
und $4xy \qquad 960$

abgezogen bleibt $x^2 - 2xy + y^2 = 64$

nämlich es ist $(x - y)^2 = 64$

und daher $x - y = 8.$

Hiernach ist nun

$$x + y = 32 \qquad\qquad x + y = 32$$
$$\text{und } x - y = 8 \qquad\qquad x - y = 8$$

addirt $2x = 40$ abgezogen $2y = 24$
folglich ist $x = 20$ und $y = 12.$

Aufgabe 492. Die Differenz zweier Größen und ihr Produkt ist gegeben; man soll die Größen hieraus berechnen.

Auflösung. Addirt man zu dem Quadrate der Differenz das vierfache Produkt der Größen, so erhält man das Quadrat ihrer Summe, wodurch also die Summe der Größen gegeben ist, und da nun auch ihre Differenz gegeben ist, so sind die Größen selbst gegeben.

Aufgabe 493. Von einer geometrischen Proportion ist jedes der beiden äußeren Glieder und die Summe der beiden mittleren Glieder gegeben; man soll hieraus die einzelnen Glieder der Proportion berechnen.

Gegeben a, d und b + c.

Analysis. Die Proportion ist

$$a : b = c : d$$

und daher $bc = ad.$

Da nun a und d gegeben sind, so ist ad gegeben, und folglich auch bc; aber auch b + c ist gegeben, folglich kennt man die Summe der beiden mittleren Glieder = b + c, und ihr Produkt bc = ad, wodurch b und c nach der Anleitung Aufgabe 491. gefunden werden.

Beispiel. Die beiden äußeren Glieder einer geometrischen Proportion sind 7 und 20, und die Summe der mittleren ist $25\frac{1}{2}$; es soll die Proportion angegeben werden.

Sind die beiden mittleren Glieder b und c, so ist $b + c = 25\frac{1}{2}$

und $7 : b = c : 20$

und daher $bc = 7 \cdot 20 = 140$.

Da sonach $b + c = 25\frac{1}{2}$, so ist $(b + c)^2 = \left(\frac{51}{2}\right)^2$

$$\text{also } b^2 + 2bc + c^2 = 650\tfrac{1}{4}$$
$$4bc = 560$$
$$\text{also abgezogen } b^2 - 2bc + c^2 = 90\tfrac{1}{4}$$

$$\text{Und daher ist } (b - c)^2 = \frac{361}{4}$$

$$\text{folglich } b - c = \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2} = 9\tfrac{1}{2}.$$

Es ist also $b + c = 25\frac{1}{2}$
und $b - c = 9\frac{1}{2}$

daher $2b = 35$ also $b = 17\frac{1}{2}$
und $2c = 16$ „ $c = 8$

Die gesuchte Proportion ist folglich

$$7 : 17\tfrac{1}{2} = 8 : 20.$$

Aufgabe 494. Von einer geometrischen Proportion ist jedes der beiden äußeren und die Differenz der mittleren Glieder gegeben; es soll hieraus die Proportion gefunden werden.

Gegeben a, d und $b - c$.

Auflösung. Diese hängt eben so von der Aufg. 492. ab, wie die Auflösung der vorigen Aufgabe von der Aufg. 491.

Aufgabe 495. Von einer geometrischen Proportion ist gegeben die Summe des ersten und zweiten, die Summe des ersten und dritten, und die Summe des ersten und vierten Gliedes; es sollen die Glieder dieser Proportion hieraus gefunden werden.

Gegeben $a + b$, $a + c$, $a + d$.

Analysis. Da $a : b = c : d$

so ist auch $a + b : a - b = c + d : c - d \ldots A$

Da nun gegeben ist $a + c$
und $a + d$

so ist auch gegeben $(a + c) - (a + d) = c - d$

Aber auch $a + b$ ist gegeben; folglich kennt man von der Proportion A die äußeren Glieder $a + b$ und $c - d$.

Ferner ist gegeben $a + d$
und $a + b$

also auch $(a + d) - (a + b) = d - b$.
Es ist aber auch gegeben $a + c$

also $a + c + d - b$
$= (a - b) + (c + d)$

und dieses ist die Summe der mittleren Glieder von der Proportion A. Hierdurch können nun die Glieder dieser Proportion gefunden werden (Aufg. 493.), wodurch alsdann auch die Größen a, b, c und d bestimmt sind.

Beispiel. Von einer Proportion ist

die Summe des ersten und zweiten Gliedes $a + b = 32$
„ „ „ dritten „ $a + c = 45$
„ „ „ vierten „ $a + d = 35$

es sollen die Glieder dieser Proportion gefunden werden.

Da $a + c = 45$ $a + d = 35$
$a + d = 35$ $a + b = 32$
so ist $c - d = 10$ $d - b = 3$
und $a + c = 45$

also $(a - b) + (c + d) = 48$.

Nun ist $a + b : a - b = c + d : c - d$
also auch $32 : a - b = c + d : 10$.

Folglich ist von dieser Proportion

das Produkt der mittleren Glieder $32 \cdot 10 = 320$
und ihre Summe $= (a - b) + (c + d) = 48$
Das Quadrat der Summe ist daher $48^2 = 2304$
und das vierfache Produkt $= 4 \cdot 320 = 1280$
daher das Quadrat der Differenz $= 1024$
die Differenz der Glieder ist daher $= \sqrt{1024} = 32$
Da sonach die Summe der mittleren Glieder $= 48$
und ihre Differenz $= 32$

so ist das größere Glied $c + d = \frac{48 + 32}{2} = 40$

und das kleinere $a - b = \frac{48 - 32}{2} = 8$

Es ist also $a + b = 32$ $c + d = 40$
$a - b = 8$ $c - d = 10$

daher $2a = 40$ $2c = 50$
$2b = 24$ $2d = 30$

folglich $a = 20$ und $c = 25$
und $b = 12$ $d = 15$
und daher ist die gesuchte Proportion

$$20 : 12 = 25 : 15.$$

Aufgabe 496. Von einer geometrischen Proportion weiß man „um wieviel jedes der drei übrigen Glieder derselben größer als das erste ist"; es sollen die Glieder der Proportion hieraus gefunden werden.

Gegeben $b - a$; $c - a$ und $d - a$.

Analysis. Da $a : b = c : d$

so ist $a : b - a = c : d - c$

und daher $a : c = b - a : d - c$.

Nun ist $b - a$ gegeben; und auch $d - c$, welches erhalten wird, wenn man $c - a$ von $d - a$ abzieht; folglich kennt man das Verhältniß von $a : c$. Aber auch die Differenz dieser Glieder ist gegeben $= c - a$, und daher die Größen a und c (Aufgabe 484.); und hierdurch sind auch die beiden übrigen Glieder b und d bestimmt.

Beispiel. Es ist $b - a = 7\frac{1}{2}$, $c - a = 3$, und $d - a = 15$.

Da, wenn man a von d abzieht, 15
" " " " " c " 3 bleibt,
so ist d um $15 - 3 = 12$ größer als c, und es ist also $d - c = 12$.

Aus $a : b = c : d$

folgt $a : b - a = c : d - c$

also auch $a : c = b - a : d - c$

und es ist also $a : c = 7\frac{1}{2} : 12$

$= 15 : 24$

oder $a : c = 5 : 8$.

Daher ist $a : c - a = 5 : 3$

also $a : 3 = 5 : 3$

folglich ist $a = \frac{3 \cdot 5}{3} = 5$.

Da nun $b - a = 7\frac{1}{2}$, so ist $b = 7\frac{1}{2} + 5 = 12\frac{1}{2}$
$c - a = 3$ " " $c = 3 + 5 = 8$
$d - a = 15$ " " $d = 15 + 5 = 20$

und die gesuchte Proportion ist daher

$$5 : 12\tfrac{1}{2} = 8 : 20.$$

Aufgabe 497. Man kennt von einer geometrischen Proportion die Summe des ersten und zweiten, und die Summe des ersten und dritten Gliedes, und es ist außerdem das vierte Glied gegeben; man soll die drei übrigen Glieder finden.

Gegeben $a + b$, $a + c$ und d.

Analysis. $a : b = c : d$

also auch $a + b : b = c + d : d.$

Von dieser Proportion sind die äußeren Glieder $a + b$ und d gegeben. Da nun $c + a$ und $b + a$ gegeben ist, so kennt man auch die Differenz dieser Summen $= (c + a) - (b + a) = c - b$.

Aber auch d ist gegeben
folglich $c + d - b$

welches die Differenz der mittleren Glieder der gefundenen Proportion ist; und es können diese Glieder daher gefunden werden (Aufgabe 494.), wodurch die gesuchten Größen bestimmt sind.

Beispiel. Es ist $a + b = 20$, $a + c = 27$ und $d = 49$.

Da $a : b = c : d$

so ist $a + b : b = c + d : d$
also $20 : b = c + d : 49.$

Von dieser Proportion ist daher das Produkt der mittleren Glieder $= 20 \,.\, 49 = 980$.

Da $a + c = 27$
und $a + b = 20$

so ist $c - b = 7$
und $d = 49$

folglich $(c + d) - b = 56.$

Die Differenz der mittleren Glieder der gefundenen Proportion ist also 56.

Daher ist das Quadrat der Differenz $= 56^2 = 3136$
und das vierfache Produkt $= 4 \,.\, 980 = 3920$

folglich ist das Quadrat der Summe $= 7056.$

Die Summe der mittleren Glieder ist daher $= \sqrt{7056} = 84.$

$$\begin{aligned}
\text{Hiernach ist}\quad (c + d) + b &= 84 \\
\text{und}\quad (c + d) - b &= 56 \\
\hline
\text{also}\quad 2\,(c + d) \qquad &= 140 \\
2\,b &= 28
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Folglich} & c + d = 70 & \text{und} & b = 14 \\
& \text{aber}\ d = 49 & \text{und} & a + b = 20. \\
\hline
\text{Daher ist} & c \qquad = 21 & & a \qquad = 6
\end{array}$$

und die gesuchte Proportion

$$6 : 14 = 21 : 49.$$

Aufgabe 498. Von einer geometrischen Proportion ist gegeben die Differenz des ersten und zweiten Gliedes, die Differenz des ersten und dritten, und außerdem auch das vierte Glied; es sollen die einzelnen Glieder dieser Proportion gefunden werden.

Gegeben $a - b$, $a - c$ und d.

Auflösung. Diese ist nicht wesentlich verschieden von der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 499. Von einer geometrischen Proportion kennt man das Verhältniß des ersten Gliedes zu dem zweiten, und es ist außerdem sowohl die Summe der äußeren, als die der mittleren Glieder gegeben; man soll hieraus die einzelnen Glieder der Proportion finden.

Gegeben $a : b$, $a + d$ und $b + c$.

Analysis. Ist das Verhältniß der beiden ersten Glieder, und also auch das der beiden letzten $= m : n$, so hat

$$\begin{aligned}
a : b &= m : n \\
\text{und}\quad c : d &= m : n. \\
\hline
\text{Folglich ist}\quad a : m &= b : n \quad (16.) \\
\text{und}\quad c : m &= d : n \\
\hline
\text{und daher}\quad a + c : m &= b + d : n \quad (24.)
\end{aligned}$$

also auch $a + c : b + d = m : n$.
Und hieraus folgt

$$(a + c) : (a + c + b + d) = m : m + n.$$

Nun ist $a + d$ und $c + b$ gegeben, also auch ihre Summe $= a + c + b + d$; und auch m und n sind gegeben, folglich kennt man von der letzteren Proportion die drei Glieder $(a + c + b + d)$, m und $m + n$, und daher auch $a + c$. Aus

dieser Summe nun, und aus den gegebenen Summen $a + d$ und $b + c$, lassen sich die einzelnen Glieder finden.

Beispiel. Von einer Proportion ist die Summe der äußeren Glieder $28\frac{5}{6}$, der mittleren Glieder $= 26$; und das erste Glied verhält sich zu dem zweiten, wie $3 : 4$.

Es ist $a + c : b + d = m : n$
$= 3 : 4$

folglich $a + c : a + c + b + d = 3 : 7$.

Da nun $a + d = 28\frac{5}{6}$
und $b + c = 26$

so ist $a + c + b + d = 54\frac{5}{6}$
und daher $a + c : 54\frac{5}{6} = 3 : 7$.

Es ist also $a + c = \frac{3 \,.\, 54\frac{5}{6}}{7} = 23\frac{1}{2}$.

Nun ist $b + c = 26$
und $a + c = 23\frac{1}{2}$

daher abgezogen $b - a = 2\frac{1}{2}$.
Da nun $a : b = 3 : 4$

so ist $a : b - a = 3 : 1$.
Und weil $b - a = 2\frac{1}{2}$, so ist
$a : 2\frac{1}{2} = 3 : 1$

folglich ist $a = 3 \,.\, 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Und da $b - a = 2\frac{1}{2}$, so ist $b = 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 10$
$b + c = 26$ „ „ $c = 26 - 10 = 16$
$a + d = 28\frac{5}{6}$ „ „ $d = 28\frac{5}{6} - 7\frac{1}{2} = 21\frac{1}{3}$.

Die Proportion ist also

$$7\tfrac{1}{2} : 10 = 16 : 21\tfrac{1}{3}.$$

Aufgabe 500. Von einer Proportion kennt man die Differenz der äußeren und die Differenz der mittleren Glieder, und es ist außerdem das Verhältniß des ersten Gliedes zu dem zweiten gegeben; es sollen die einzelnen Glieder dieser Proportion gefunden werden.

Gegeben $a - d$, $b - c$ und $a : b$.

Analysis. Setzt man das gegebene Verhältniß $= m : n$, so ist, wie bei der vorigen Aufgabe,

$$a : m = b : n$$
$$c : m = d : n$$

daher $a - c : m = b - d : n$

also $a - c : b - d = m : n.$

Und hieraus folgt

$$(a - c) : (a - c) + (b - d) = m : m + n.$$

Da nun $(a - c) + (b - d) = (a - d) + (b - c)$ und sowohl $a - d$ als $b - c$ gegeben sind: so kennt man von dieser Proportion das zweite, dritte und vierte Glied, und kann daher das erste Glied $a - c$ finden; woraus alsdann die einzelnen Glieder, wie bei der vorigen Aufgabe, sich berechnen lassen.

Das sechste Buch der Elemente.

Erklärungen.

1. „Aehnliche geradlinige Figuren" sind: in welchen die Winkel einzeln genommen gleich, und die um gleiche Winkel liegenden Seiten proportionirt sind.

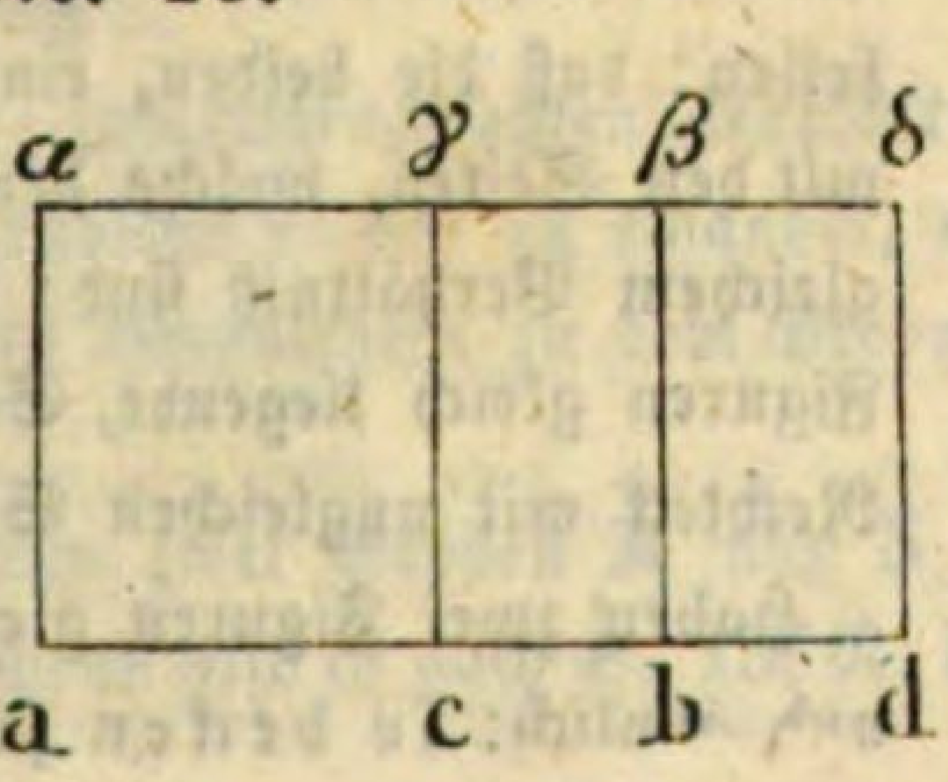
2. „Wiederkehrende geradlinige Figuren" sind: wenn in der einen die mittleren, in der anderen aber die äußeren Glieder der Proportion enthalten sind.

3. „Nach stetiger Proportion, oder nach dem äußeren und mittleren Verhältniß" ist eine gerade Linie geschnitten: wenn sich die ganze Linie zu dem größeren Abschnitte, wie Dieser zu dem kleineren Abschnitte verhält.

4. „Die Höhe einer Figur" ist die von der Spitze derselben auf die Grundlinie gefällte Normale.

5. Sind drei oder mehrere Größen A, B, C, D aneinander hängend in den Verhältnissen, jede zu der nächst folgenden, also A : B, B : C und C : D: so heißt das Verhältniß der ersten zu der letzten „aus allen diesen Verhältnissen zusammengesetzt". Es ist also nach Seite 13, Nr. 16.

$$A : D = \left\{ \begin{array}{c} A : B \\ B : C \\ C : D. \end{array} \right\}$$



6. Ein Parallelogramm ist an einer geraden Linie ab entworfen: wenn dasselbe entweder

wie $a\beta$ auf der Linie ab selbst, oder wie $a\gamma$ auf einem Abschnitte ac der Linie, oder wie $a\delta$ auf der verlängerten Linie ad beschrieben ist.

Zieht man in den beiden letzteren Fällen durch den Endpunkt b der ab mit $c\gamma$ oder $d\delta$ die $b\beta$ parallel, welche von $a\delta$ in β geschnitten wird: so erhält man ein Parallelogramm $a\beta$ auf der Linie ab, in Beziehung zu welchem das Parallelogramm $b\gamma$ auf dem Abschnitte bc „die Ergänzung" des Parallelogramms $a\gamma$, das Parallelogramm $b\delta$ auf dem Abschnitte bd aber „der Ueberschuß" des Parallelogramms $a\delta$ genannt wird.

Erläuterung. 1. Bei einer Figur kann man, außer dem Orte, wo sie sich befindet, noch die Größe, und die Form oder Gestalt derselben unterscheiden, die beide von einander unabhängig sind. Die Größe einer Figur bezieht sich bloß auf ihren Inhalt, und die Form auf die Art und Weise, wie der Inhalt begrenzt wird.

Zwei Figuren sind gleich, wenn sie einen gleich großen Inhalt haben; wenn sie also ihrer Größe nach nicht verschieden sind. Hierauf hat die Form keinen Einfluß; so kann ein Dreieck einem Parallelogramme gleich seyn (I. 42.), und irgend eine geradlinige Figur einem Quadrate (II. 14.).

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn sie gleiche Formen haben; und es hat hierauf der Inhalt oder die Größe keinen Einfluß. Figuren aber haben gleiche Form: wenn sie, sobald man den Ort, wo sie sich befinden, und ihre Größe unbeachtet läßt, durch nichts von einander sich unterscheiden.

Ebene geradlinige Figuren unterscheiden sich zunächst durch die Zahl der Linien, von welchen sie begrenzt werden; und diese Zahl muß daher gleich groß seyn, wenn die Figuren gleiche Form haben sollen. So kann z. B. kein Dreieck einem Viereck ähnlich seyn. Das Zweite, wodurch Figuren sich unterscheiden, wenn auch die Zahl der Seiten in beiden gleich groß ist, sind die Winkel ihrer Größe nach; und es ist daher erforderlich, wenn zwei Figuren ähnlich seyn sollen, „daß die Winkel der einen einzeln, der Ordnung nach, den Winkeln der andern gleich sind". Sollen z. B. zwei Dreiecke ähnlich seyn, so kann nicht das eine ein rechtwinkliges und das andere ein stumpfwinkliges seyn. Das Dritte endlich, wodurch zwei Figuren von einander sich unterscheiden, ist „das Verhältniß zwischen gleichliegenden Seiten derselben". Daher ist erforderlich, wenn zwei Figuren ähnlich seyn sollen: daß die beiden, einen Winkel der einen Figur einschließenden Seiten, mit den Seiten, welche denselben Winkel in der andern Figur einschließen, in gleichem Verhältniß sind; und es müssen daher je zwei Paar, in beiden Figuren gleich liegende, Seiten proportionirt seyn. So kann z. B. nie ein Rechteck mit ungleichen Seiten einem Quadrate ähnlich seyn.

Haben zwei Figuren gleiche Größe und gleiche Form, sind sie also gleich und ähnlich: so decken sie sich, sie sind congruent.

2. Zwei Paar Größen sind wiederkehrend proportionirt: wenn das eine Paar die mittleren und das andere Paar die äußeren Glieder einer Proportion sind; und es läßt sich dieser Begriff immer bei solchen Größen anwenden, die, arithmetisch betrachtet, in einem indirecten Verhältnisse von einander abhängen.

Sind zwei Produkte gleich: so hängen nach §. 4. Seite 459 die Factoren derselben so von einander ab daß die Factoren des einen Produktes die mittleren, und die des anderen die äußeren Glieder einer Proportion bilden; also sind die Factoren gleicher Produkte wiederkehrend proportionirt. Nun sind Dreiecke gleich, wenn das Produkt aus der Grundlinie und Höhe bei dem einen eben so groß, als bei dem andern ist; folglich sind bei gleichen Dreiecken ihre Grundlinien mit ihren Höhen wiederkehrend proportionirt; oder, was hier dasselbe sagen will, von gleichen Dreiecken verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie ihre Höhen.

3. Der Begriff von einem zusammengesetzten Verhältniß läßt sich arithmetisch durch folgende Aufgabe erläutern:

Aufgabe. Man kennt von mehreren Größen A, B, C, D, E das Verhältniß einer jeden zu der nächstfolgenden; es soll hieraus das Verhältniß der ersten dieser Größen zu der letzten bestimmt werden.

Auflösung. Es sey für gegebene Zahlen α, β, γ, δ und b, c, d, e

$$A : B = \alpha : \beta$$
$$B : C = b : c$$
$$C : D = \gamma : \delta$$
$$\text{und}\quad D : E = d : e$$

so ist $ABCD : BCDE = \alpha b \gamma d : \beta c \delta e$ nach §. 10. Seite 461.

Da nun $ABCD : BCDE = A \,.\, BCD : BCD \,.\, E$

$$= A : E$$

so folgt $A : E = \alpha b \gamma d : \beta c \delta e$.

Sind also die zwei Größen A und E in dem zusammengesetzten Verhältniß von

$$(\alpha : \beta),\ (b : c),\ (\gamma : \delta),\ (d : e)$$

oder ist nach Seite 13. Nr. 16.

$$A : E = \left\{ \begin{matrix} \alpha : \beta \\ b : c \\ \gamma : \delta \\ d : e \end{matrix} \right\}$$

so ist auch

$$A : E = \alpha b \gamma d : \beta c \delta e.$$

Sind also zwei Größen A und E im zusammengesetzten Verhältniß mehrerer gegebenen Zahlenverhältnisse: so verhalten sie sich zu einander, wie das Produkt aller Vorderglieder der gegebenen Verhältnisse zu dem Produkte aller Hinterglieder derselben sich verhält.

Hieraus folgt nun zugleich auch: daß, wenn zwei Größen M und N in dem zweifachen Verhältniß von m : n sind, wenn also ist nach S. 13. N. 17.

$$M : N = 2\,(m : n)$$

$$\text{also } M : N = \left\{ \begin{matrix} m : n \\ m : n \end{matrix} \right\}$$

so ist auch $M : N = m^2 : n^2$.

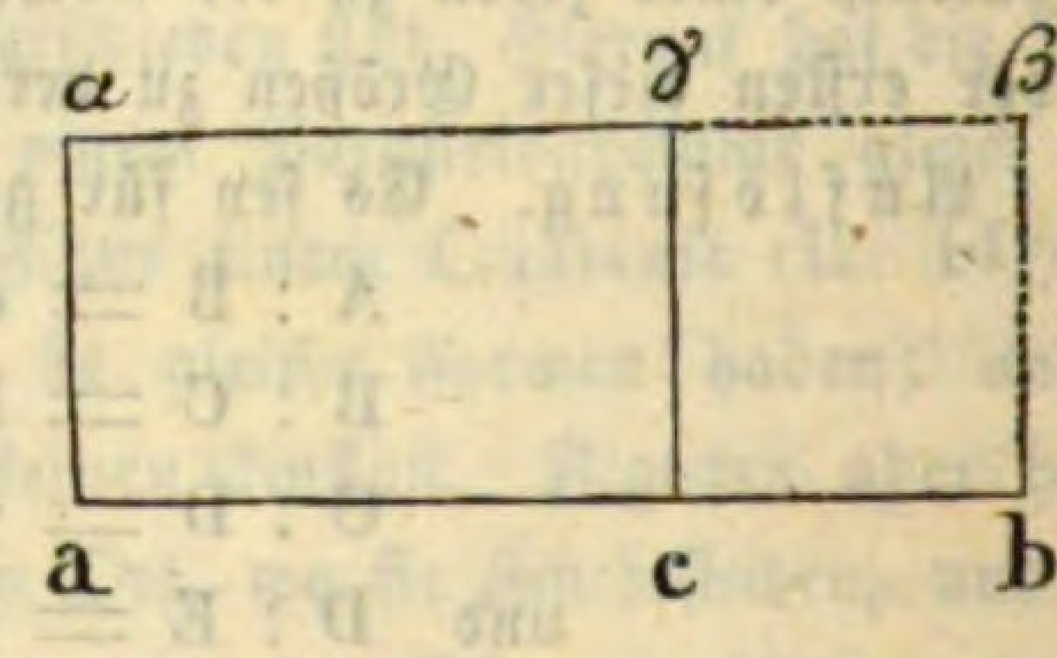
Sind also zwei Größen M und N in dem zweifachen Verhältnisse von m zu n, so verhalten sie sich wie die Quadrate dieser Größen. Eben so folgt: daß, wenn M zu N in dem dreifachen Verhältnisse ist von m zu n, sie sich wie die dritten Potenzen dieser Größen verhalten. Für

$$M : N = 3\,(m : n)$$

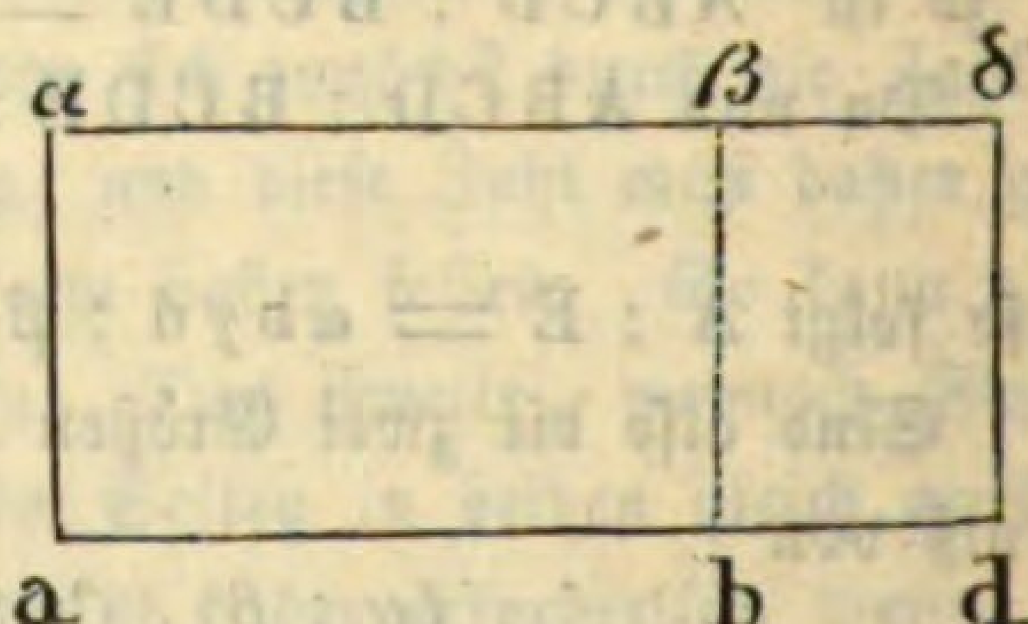
$$\text{also für } M : N = \left\{ \begin{matrix} m : n \\ m : n \\ m : n \end{matrix} \right\}$$

ist daher $M : N = m^3 : n^3$.

4. Jedes auf einer gegebenen Linie beschriebene Parallelogramm (so daß die Grundlinie desselben mit dieser Linie zusammenfällt und den einen Endpunkt mit ihr gemein hat, es mag die Grundlinie dieser Linie gleich, oder kleiner oder größer als dieselbe seyn) heißt, „an dieser Linie entworfen“.



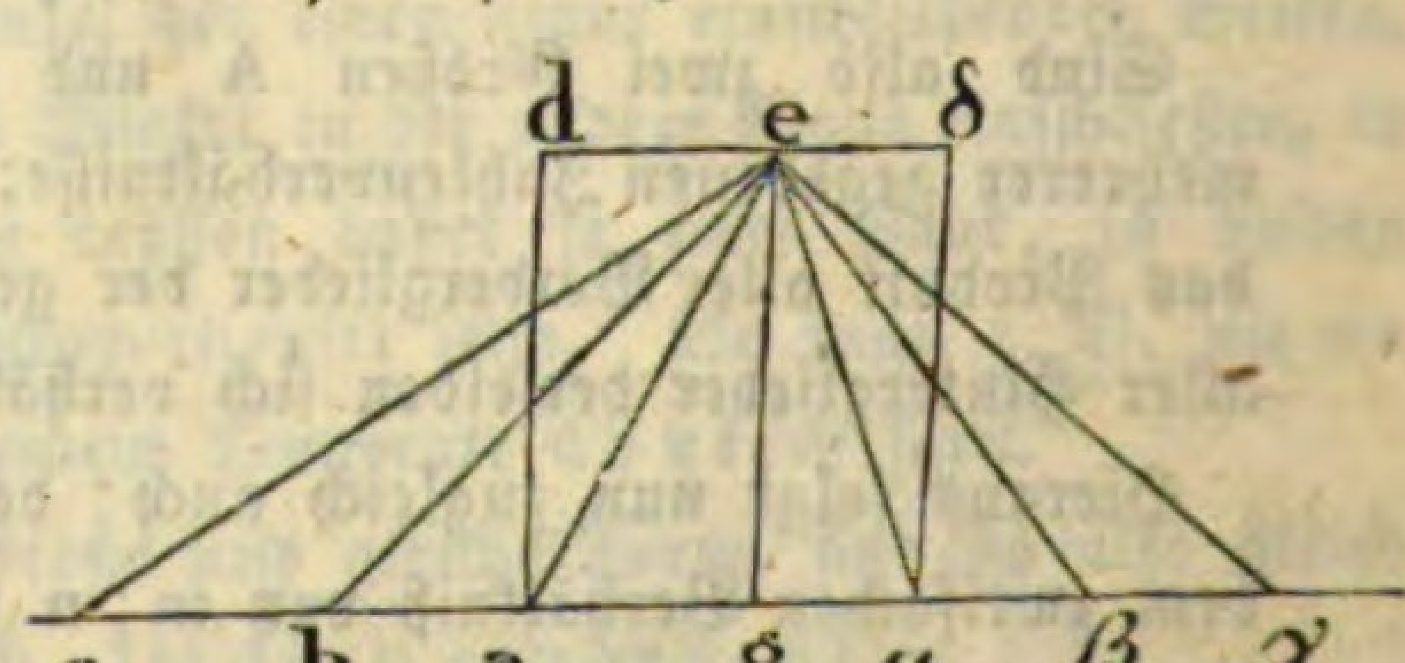
Ist die Grundlinie ac des an ab entworfenen Parallelogrammes $ac\gamma\alpha$ kleiner als ab, und man zieht durch b die $b\beta$ parallel $c\gamma$, bis sie die verlängerte $\alpha\gamma$ in β schneidet: so ist das hierdurch bestimmte Parallelogramm $cb\beta\gamma$ die Ergänzung von dem Parallelogramme $ac\gamma\alpha$.



Ist aber die Grundlinie ad des an ab entworfenen Parallelogrammes $ad\delta\alpha$ größer als ab, und man zieht durch b die $b\beta$ parallel $d\delta$: so ist das hierdurch bestimmte Parallelogramm $bd\delta\beta$ der Ueberschuß von dem Parallelogramme $ad\delta\alpha$.

VI. Satz 1. Lehrsatz.

Dreiecke ega und $eg\alpha$, auch Parallelogramme gd, $g\delta$ von einerlei Höhe, verhalten sich, „wie ihre Grundlinien“.



Beweis. Verlängere

aα zu beiden Seiten nach c und γ; nimm in beliebiger Anzahl der ga gleich die ab, bc, und in beliebiger Anzahl der gα gleich die $\alpha\beta$, $\beta\gamma$; und ziehe von e, an die Theilpunkte, die Linien eb, ec, eβ, eγ.

Erster Theil. Da ga = ab = bc, so ist auch

$$\triangle gea = \triangle aeb = \triangle bec. \quad (I.\ 38.)$$

Folglich ist $\triangle$gec von $\triangle$gea ein eben so Vielfaches als gc von ga.

Aus gleichen Gründen ist $\triangle$geγ von $\triangle$geα ein eben so Vielfaches als gγ von gα.

Man hat also von den zwei Paar Größen

	ga	gα	$\triangle$gea	$\triangle$geα
die Gleichvielfachen der 1sten und 3ten	gc		$\triangle$gec	
und die Gleichvielfachen der 2ten und 4ten		gγ		$\triangle$geγ

und es ist, wenn gc $\gtreqless$ gγ, auch $\triangle$gec $\gtreqless$ $\triangle$geγ. (I. 38.)

Folglich ist (V. E. 5.)

$$ga : g\alpha = \triangle gea : \triangle ge\alpha.$$

Die Dreiecke gea und geα, welche einerlei Höhe haben, verhalten sich also, wie ihre Grundlinien ga und gα zu einander.

Zweiter Theil. Da Prllgr. gd = 2 . $\triangle$gea (I. 41.)
und Prllgr. gδ = 2 . $\triangle$geα „

so ist gd : gδ = $\triangle$gea : $\triangle$geα. (V. 15.)

Und da nun $\triangle$gea : $\triangle$geα = ga : gα

so folgt gd : gδ = ga : gα (V. 11.)

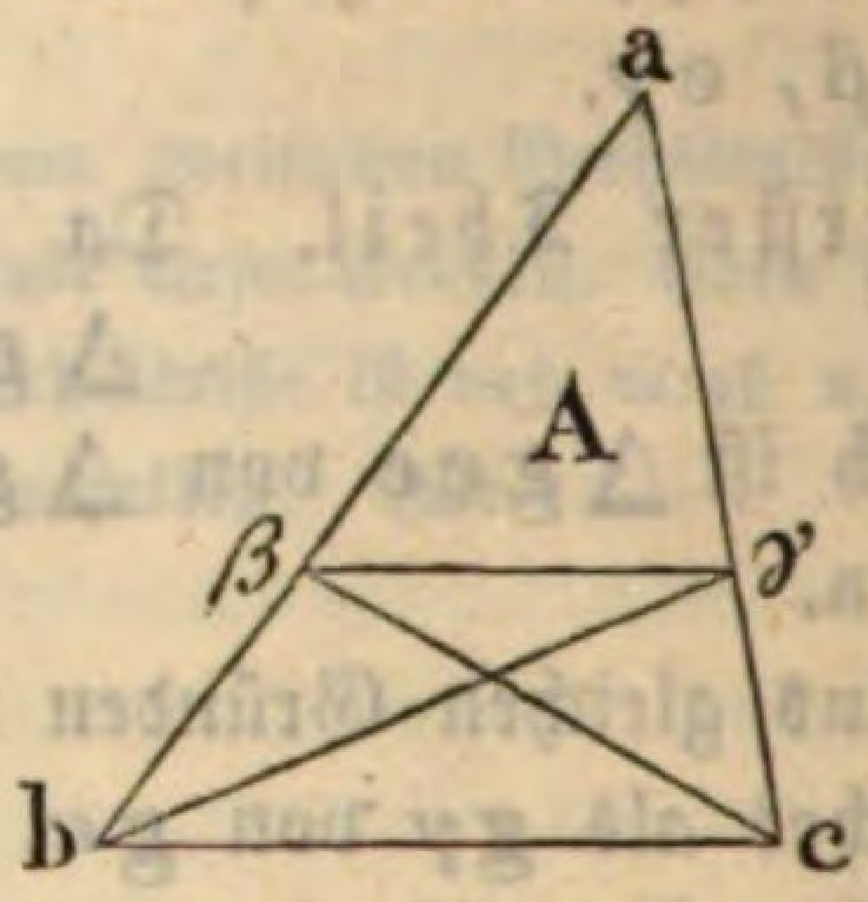
Die Parallelogramme gd und gδ von einerlei Höhe verhalten sich also wie ihre Grundlinien.

Anmerkung. Auf gleiche Weise folgt auch: daß Dreiecke von einerlei Grundlinie „wie ihre Höhen“ sich verhalten.

IV. Satz 2. Lehrsatz.

Zieht man mit einer Seite bc eines Dreiecks abc eine Linie $\beta\gamma$ parallel, so werden die beiden übrigen Seiten ab und ac des Dreiecks durch diese Parallele proportionirt geschnitten. Und werden die beiden Seiten ab und ac in β und γ proportionirt

geschnitten, so ist die Linie $\beta\gamma$, welche die Theilpunkte verbindet, der dritten Seite bc parallel.



Beweis. Erster Theil. Es sey $\beta\gamma$ der bc parallel; man ziehe $c\beta$ und $b\gamma$, so ist $\Delta\beta\gamma c = \Delta\beta\gamma b$ (I. 38.) und daher für $\Delta a\beta\gamma = A$

$A : \Delta\beta\gamma b = A : \Delta\beta\gamma c$ (V. 7.)

Nun ist aber

$A : \Delta\beta\gamma b = a\beta : \beta b$ (1.)

und $A : \Delta\beta\gamma c = a\gamma : \gamma c$ „

Folglich ist $a\beta : \beta b = a\gamma : \gamma c$ (V. 11.)

Ist also $\beta\gamma$ parallel der bc, so werden ab in β und ac in γ nach demselben Verhältniß geschnitten.

Zweiter Theil. Es sey $a\beta : \beta b = a\gamma : \gamma c$.

Nun ist aber $a\beta : \beta b = A : \Delta\beta\gamma b$ (1.)

und $a\gamma : \gamma c = A : \Delta\beta\gamma c$ „

folglich ist auch $A : \Delta\beta\gamma b = A : \Delta\beta\gamma c$ (V. 11.)

und daher $\Delta\beta\gamma b = \Delta\beta\gamma c$ (V. 9.)

Da nun diese beiden Dreiecke die Grundlinie $\beta\gamma$ gemein haben: so ist bc parallel $\beta\gamma$. (I. 39.)

Werden also ab in β und ac in γ proportionirt geschnitten, und man zieht $\beta\gamma$: so ist diese Linie der dritten Seite bc parallel.

Zusatz. Da, wenn $\beta\gamma$ parallel bc ist, die Proportion statt findet

$$a\beta : \beta b = a\gamma : \gamma c$$

so ist auch $\underbrace{a\beta + \beta b}_{\text{also } ab} : a\beta = \underbrace{a\gamma + \gamma c}_{ac} : a\gamma$ (V. 18.)

also $ab : a\beta = ac : a\gamma$.

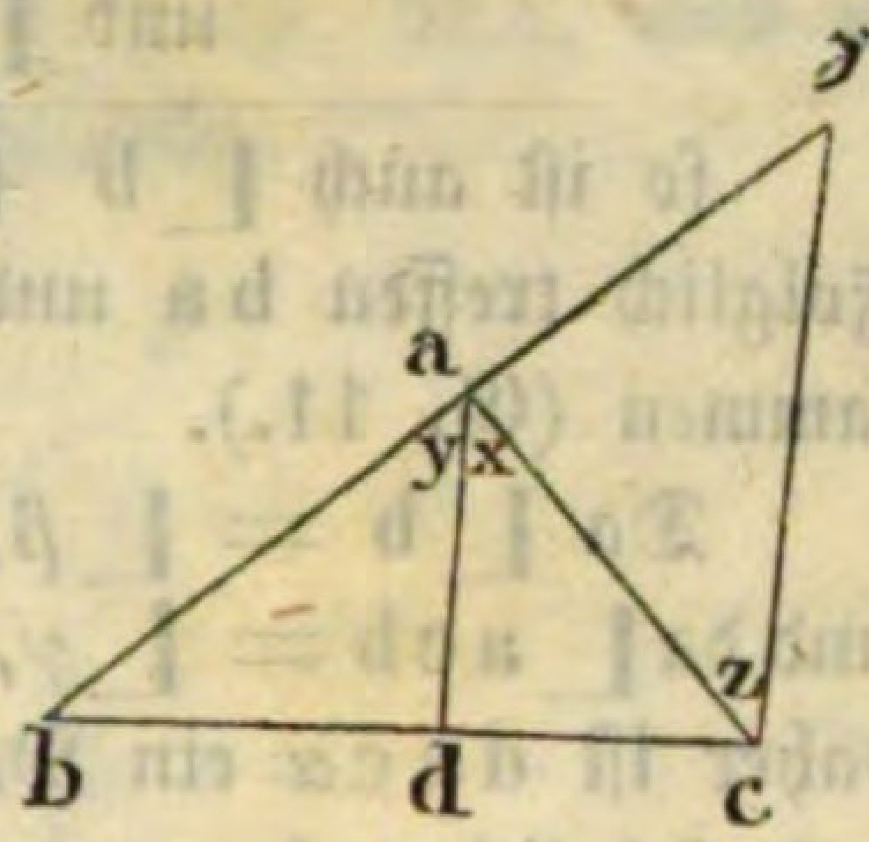
Ist in Δ abc die $\beta\gamma$ parallel bc, so sind die beiden übrigen Seiten, den an der Spitze anliegenden Abschnitten derselben proportionirt; und eben so folgt auch; „daß sie den an der Grundlinie anliegenden Abschnitten proportionirt sind“, und es ist also auch

$$ab : \beta b = ac : \gamma c.$$

VI. Satz 3. Lehrsatz.

Wird ein Winkel a eines Dreiecks bac durch die gerade Linie ad halbirt, so schneidet diese Halbirungslinie, genugsam verlängert, die dem halbirten Winkel a gegenüber liegende Seite bc, den beiden anderen Seiten ab und ac des Dreiecks proportionirt.

Und ist Eine Seite bc eines Dreiecks in d den beiden anderen Seiten ab und ac proportionirt geschnitten: so wird der, der bc gegenüber liegende Winkel a von der geraden Linie, welche a mit d verbindet, halbirt.



Beweis. Erster Theil. Es sey $\angle$ cab durch ad halbirt. Durch c ziehe cγ parallel ad und verlängere ba, bis sie die cγ in γ trifft; so ist

$\angle z = \angle x$ (I. 29.)
$\angle \gamma = \angle y$ „
und $\angle x = \angle y$ (p. h.)

also auch $\angle z = \angle \gamma$ und daher $a\gamma = ac$ (I. 6.)

Da nun ist ad parallel cγ, so folgt

$bd : dc = ba : a\gamma$ (2.)
und da $a\gamma = ac$

so ist $bd : dc = ba : ac$.

Zweiter Theil. Es sey $bd : dc = ba : ac$

Da cγ parallel ad, so ist $bd : dc = ba : a\gamma$

also $ba : ac = ba : a\gamma$ (V. 11.)
folglich $ac = a\gamma$ (V. 9.)
und daher $z = \gamma$ (I. 5.)

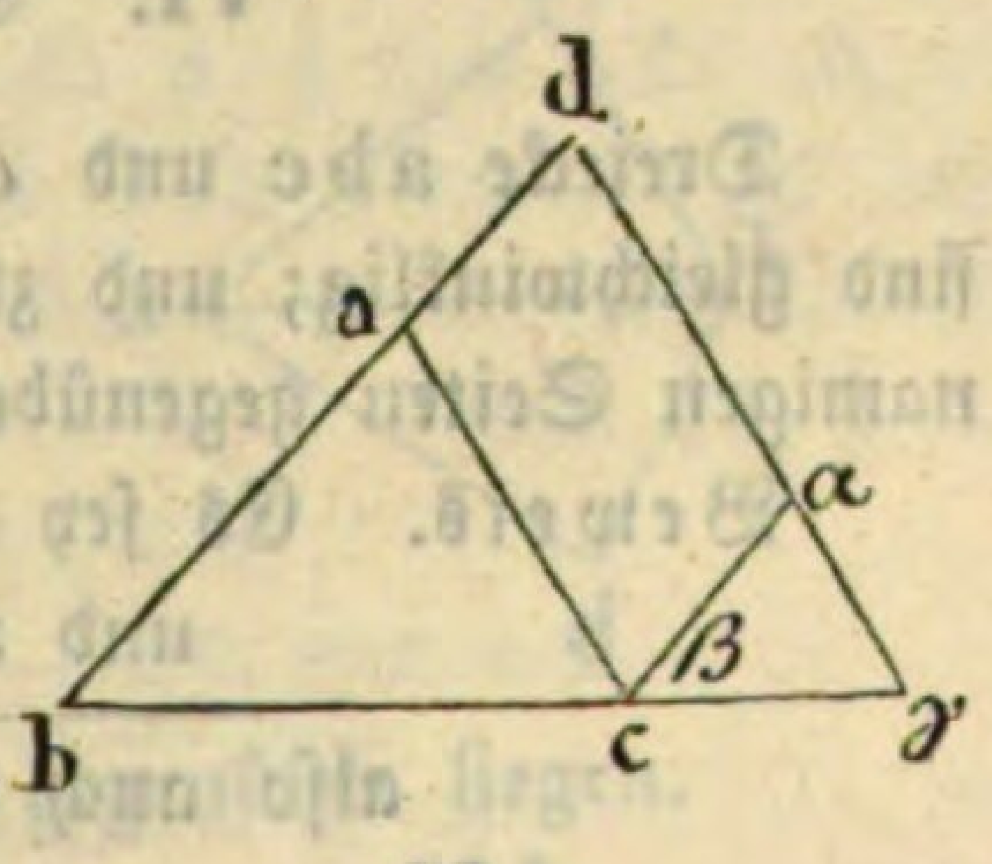
Es ist aber $z = x$ und $\gamma = y$ (I. 29.)

folglich ist $x = y$.

Der Winkel bad ist also durch ad halbirt.

VI. Satz 7. Lehrsatz.

In gleichwinkligen Dreiecken abc und c$\alpha\gamma$ sind die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportionirt; und es sind die Seiten gleichnamig, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen.



Beweis. Es sey $\angle b = \angle \beta$ und $\angle acb = \angle \gamma$, also auch $\angle bac = \angle c\alpha\gamma$, und es sey die c$\gamma$ der bc in gerader Linie angesetzt.

Da $\angle b + \angle acb < 2R$ (I. 17.)
und $\angle acb = \angle \gamma$

so ist auch $\angle b + \angle \gamma < 2R$

Folglich treffen ba und $\gamma\alpha$ verlängert auf dieser Seite in d zusammen (G. 11.).

Da $\angle b = \angle \beta$, so ist bd der $c\alpha$ parallel;
und da $\angle acb = \angle \gamma$, so ist auch ca der γd parallel;
daher ist $dac\alpha$ ein Parallelogramm
und folglich $ad = c\alpha$ und $ac = d\alpha$ (I. 34.)

Da in $\triangle bd\gamma$ ist ac parallel $d\gamma$,
so folgt $ba : ad = bc : c\gamma$ (2.)
und weil $ad = c\alpha$

auch $ba : c\alpha = bc : c\gamma$
und folglich $ba : bc = c\alpha : c\gamma$ (V. 16.)

Da in $\triangle \gamma bd$ ist bd parallel $c\alpha$
so folgt $bc : c\gamma = d\alpha : \alpha\gamma$ (2.)
und weil $d\alpha = ca$

$bc : c\gamma = ca : \alpha\gamma$
und daher $bc : ca = c\gamma : \gamma\alpha$ (V. 16.)

Hiernach ist in den beiden Dreiecken abc und $\alpha c\gamma$
1. $ba : bc = c\alpha : c\gamma$
2. $bb : ca = c\gamma : \gamma\alpha$
folglich ist aus dem Gleichen auch
3. $ba : ca = c\alpha : \gamma\alpha$ (V. 22.)

Anmerkung. Wenn die Winkel eines Dreiecks einzeln den Winkeln eines andern Dreiecks gleich sind: so sind die Seiten des einen Dreiecks den Seiten des andern proportionirt, und es sind hierbei gleichliegende Seiten beider Dreiecke gleichnamig. Hieraus folgt: zwei Dreiecke, welche die Winkel gleich haben, sind ähnlich.

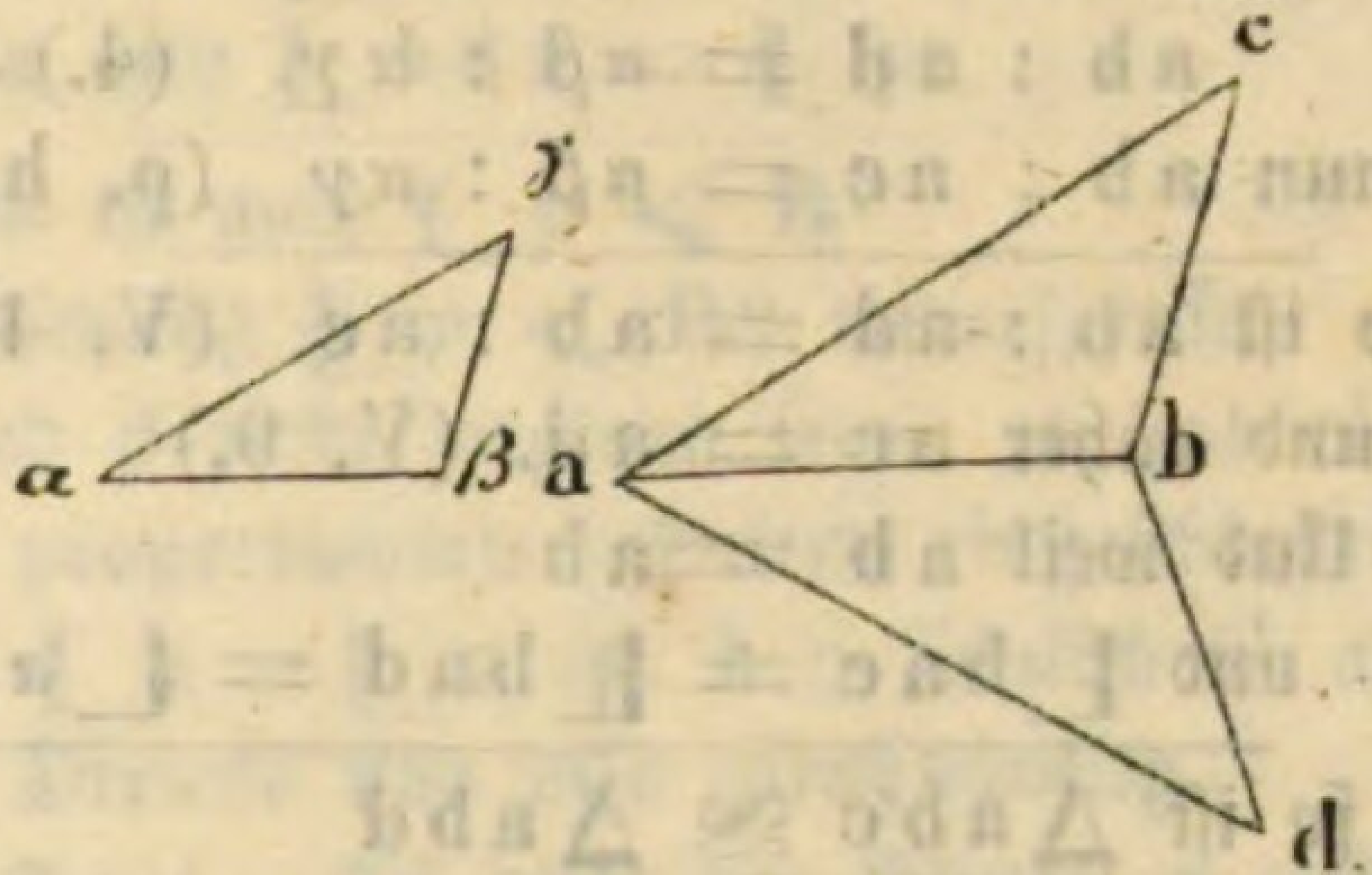
VI. Satz 5. Lehrsatz.

Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$, welche proportionirte Seiten haben, sind gleichwinklig; und zwar sind die Seiten gleich, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen.

Beweis. Es sey $ab : ac = \alpha\beta : \alpha\gamma$
und $ab : bc = \alpha\beta : \beta\gamma$

also auch $ac : bc = \alpha\gamma : \beta\gamma$.

An die Endpunkte der Seite **ab** lege man $\angle abd = \angle\beta$ und $\angle bad = \alpha$: so ist auch $\angle adb = \angle\gamma$ (I. 32.), und es sind also die Dreiecke **abd** und $\alpha\beta\gamma$ gleichwinklig.



Folglich ist $\alpha\beta : \alpha\gamma = ab : ad$ und $\alpha\beta : \beta\gamma = ab : bd$ (4.)
Da nun $\alpha\beta : \alpha\gamma = ab : ac$ „ $\alpha\beta : \beta\gamma = ab : bc$ (p. h.)

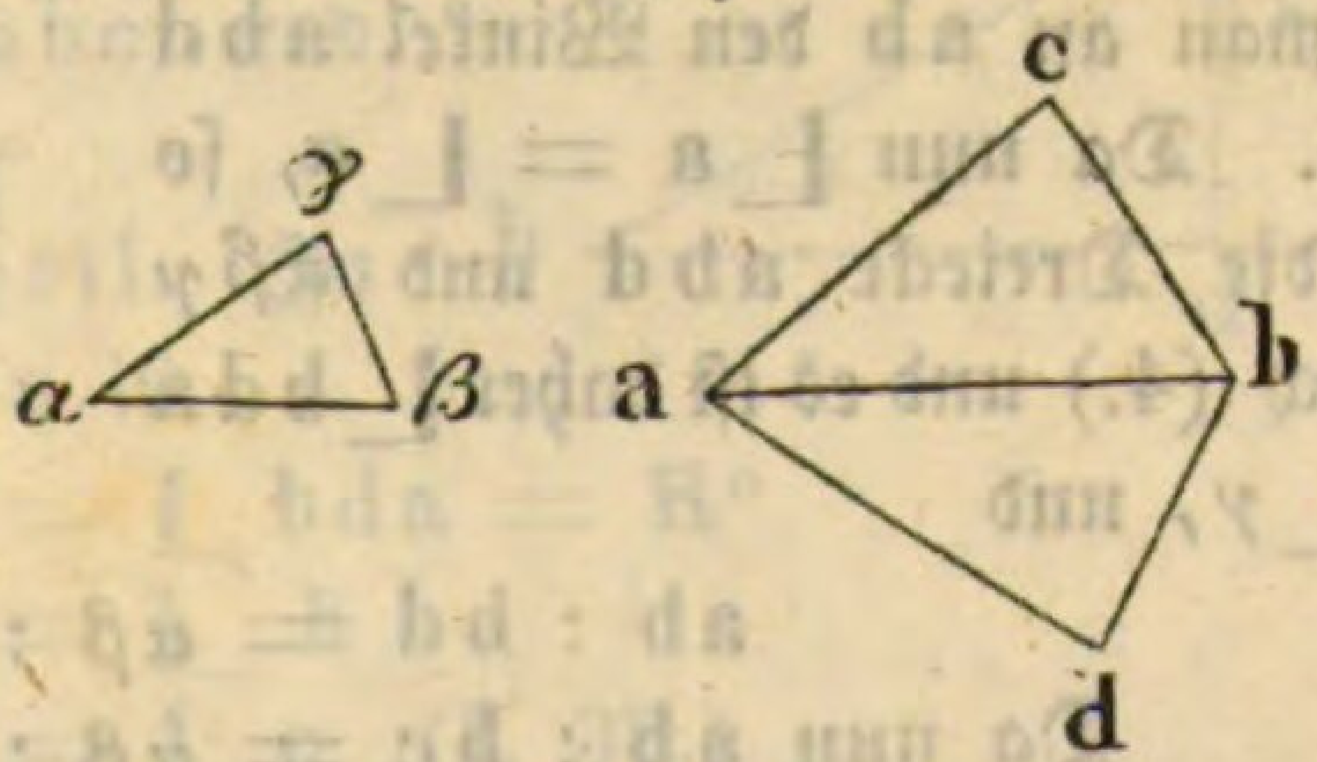
so ist $ab : ad = ab : ac$ $\quad ab : bd = ab : bc$ (V. 11.)
und daher $ad = ac$ $\quad$ und $bd = bc$ (V. 9.)
Da nun auch $ab = ab$
so ist $\Delta abd \cong \Delta abc$
und daher $\angle bad = \angle bac = \angle\alpha$
$\angle abd = \angle abc = \angle\beta$
$\angle adb = \angle acb = \angle\gamma$

Demnach sind, in den Dreiecken **abc** und $\alpha\beta\gamma$, die den gleichnamigen Seiten gegenüber liegenden Winkel gleich groß.

Anmerkung. Da Dreiecke, welche proportionirte Seiten haben, gleichwinklig sind (so daß die Winkel beider Dreiecke gleiche Größe haben, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen) so folgt: Haben zwei Dreiecke proportionirte Seiten, so sind sie ähnlich.

VI. Satz 6. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken **abc** und $\alpha\beta\gamma$ ein Winkel **bac** einem Winkel α gleich ist, die Seiten aber, welche diese Winkel einschließen, proportionirt sind $ab : ac = \alpha\beta : \alpha\gamma$, so sind die Dreiecke gleichwinklig; und es sind die Winkel gleich groß, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen.



Beweis. Legt man, an die Endpunkte der ab, die Winkel bad $= \angle \alpha$ und $\angle$ abd $= \angle \beta$, daß also auch $\angle$ adb $= \angle \gamma$ (I. 32.): so sind die Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$ gleichwinklig, und es ist daher

ab : ad $= \alpha\beta : \alpha\gamma$. (4.)

Da nun ab : ac $= \alpha\beta : \alpha\gamma$ (p. h.)

so ist ab : ad = ab : ac (V. 11.)

und daher ac = ad. (V. 9.)

Und weil ab = ab

und $\angle$ bac $= \angle$ bad $= \angle \alpha$ (p. h.)

so ist Δabc $\cong \Delta$abd

und daher auch $\angle$ abc $= \angle$ abd $= \angle \beta$

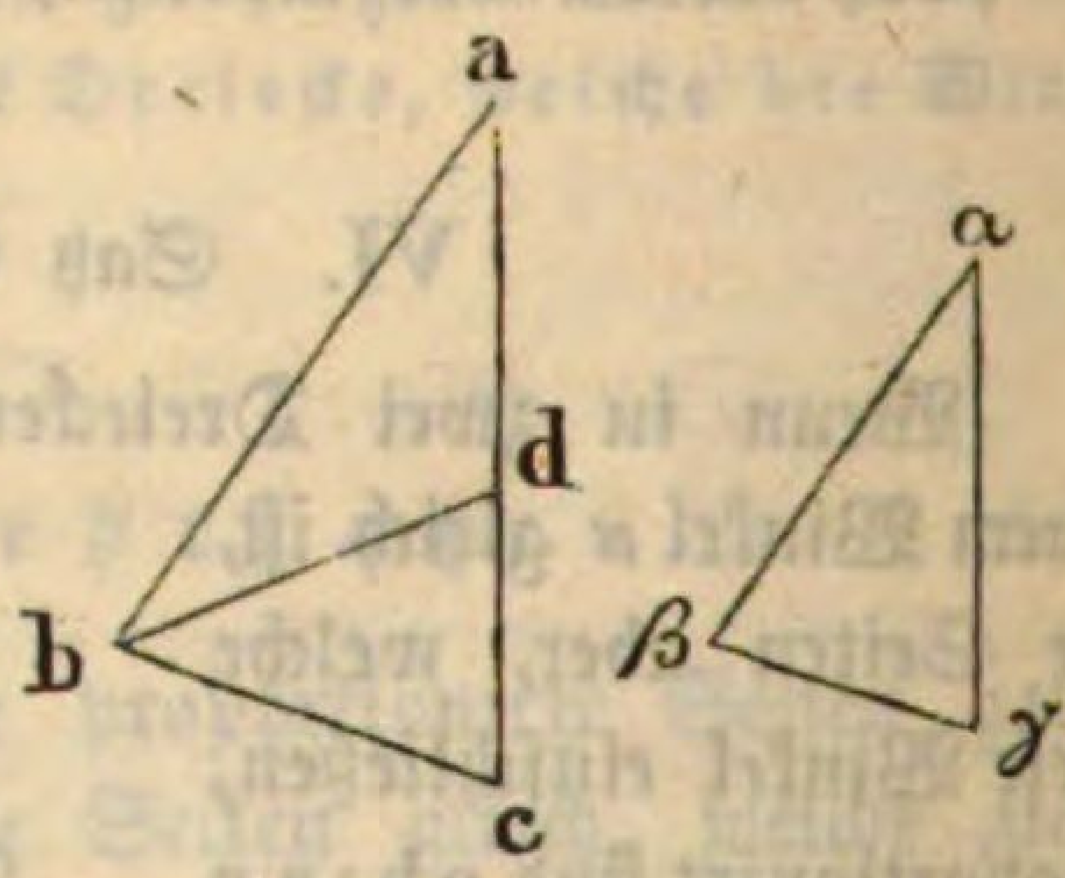
und $\angle$ acb $= \angle$ adb $= \angle \gamma$.

Es sind also „die den gleichnamigen Seiten gegenüber liegenden Winkel" der beiden Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$ gleich groß.

Anmerkung. Hieraus folgt: Wenn zwei Dreiecke einen Winkel gleich haben, und die diesen Winkel einschließenden Seiten sind proportionirt, so sind die Dreiecke ähnlich.

VI. Satz 7. Lehrsatz.

Haben zwei Dreiecke abc und $\alpha\beta\gamma$ Einen Winkel gleich, $\angle$ a $= \angle \alpha$; und sind die Seiten, welche um andere Winkel b und β liegen, proportionirt; und ist von den übrigen Winkeln c und γ jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner als ein rechter: so sind die Dreiecke gleichwinklig, und es sind die Winkel b und β gleich, welche von den proportionirten Seiten eingeschlossen werden.



Beweis. Erster Fall. Es sey jeder der Winkel c und γ kleiner als ein rechter. Wären nun die Winkel abc und β ungleich, so setze man an ab den Winkel abd $= \beta$. Da nun $\angle$ a $= \angle \alpha$, so sind die Dreiecke abd und $\alpha\beta\gamma$ ähnlich (4.) und es ist daher $\angle$ bda $= \angle \gamma$, und

ab : bd $= \alpha\beta : \beta\gamma$ (4.)

Da nun ab : bc $= \alpha\beta : \beta\gamma$ (p. h.)

so ist ab : bd = ab : bc (V. 11.)

und daher $bd = bc$ (V. 9.)

Folglich ist $\angle bdc = \angle c$;

und da $\angle c < R^o$ (p. h.), so ist auch $\angle bdc < R^o$

und daher $\angle bda > R^o$ (I. 13.)

Da nun $\angle bda = \angle \gamma$

so ist auch $\angle \gamma < R^o$

was der Voraussetzung $\angle \gamma < R^o$ widerspricht. Also können die Winkel **abc** und β nicht ungleich seyn; es sind also diese Winkel, welche von den proportionirten Seiten eingeschlossen werden, gleich groß, aber auch $\angle a = \angle \alpha$ (p. h.); folglich ist auch $\angle c = \angle \gamma$ (I. 22.). Die Dreiecke sind also gleichwinklig.

Zweiter Fall. Ist jeder der Winkel c und γ nicht kleiner als ein rechter: so wird, wenn man $\angle abc$ und $\angle \beta$ als ungleich annimmt, wie in dem ersten Falle bewiesen, „daß $\angle bdc = \angle c$, daher nach der Voraussetzung $\angle bdc$ nicht kleiner als R^o". Und es sind daher in Δbdc

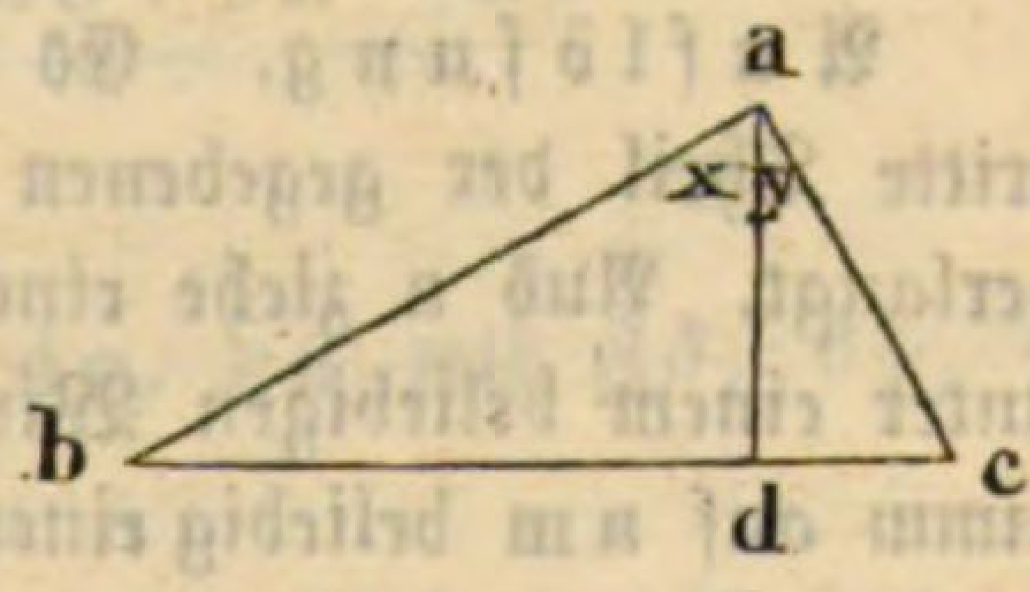
$\angle bdc + \angle c$ nicht $< 2R^o$

was nicht seyn kann (I. 17.). Folglich können auch in diesem Falle die Winkel **abc** und β nicht verschieden seyn; und hieraus folgt alles Uebrige, wie bei dem ersten Falle.

Anmerkung. Haben zwei Dreiecke den ersten Winkel gleich, sind die um den zweiten Winkel derselben liegenden Seiten proportionirt, und ist der dritte Winkel in beiden Dreiecken zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner als ein rechter: so sind die Dreiecke ähnlich.

VI. Satz 8. Lehrsatz.

Wird, in einem rechtwinkligen Dreieck **abc**, von dem Scheitel **a** des rechten Winkels eine Normale **ad** auf die gegenüberliegende Seite **bc** gefällt: so sind „die an dieser Normale anliegenden Dreiecke **bda** und **adc**" dem ganzen Dreieck **abc**, und einander ähnlich



Beweis. Erster Theil. In den Dreiecken **abc** und **dba** ist

$\angle bac = \angle bda = R^o$

$\angle b = \angle b$

also auch $\angle x = \angle c$ (I. 32.)

und daher $\Delta abc \sim \Delta dba$ (4.)

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß

$$\angle y = \angle b \text{ und } \triangle abc \sim \triangle dac.$$

Zweiter Theil. Da in den Dreiecken abd und cad

$$\angle adb = \angle cda = R^o$$
$$\angle b = \angle y$$
$$\text{und } \angle x = \angle c$$

so ist auch $\triangle adb \sim \triangle cda$ (4.)

Zusatz. 1. Da $\triangle adb \sim \angle cda$
und $\angle adb = \angle cda$

so ist $bd : da = da : dc$ (E. 1.)

Die Normale ad, von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse bc, ist also die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten bd und dc der Hypotenuse.

2. Da $\triangle dba \sim \triangle abc$
und $\angle b = \angle b$

so ist $bd : ba = ba : bc$.

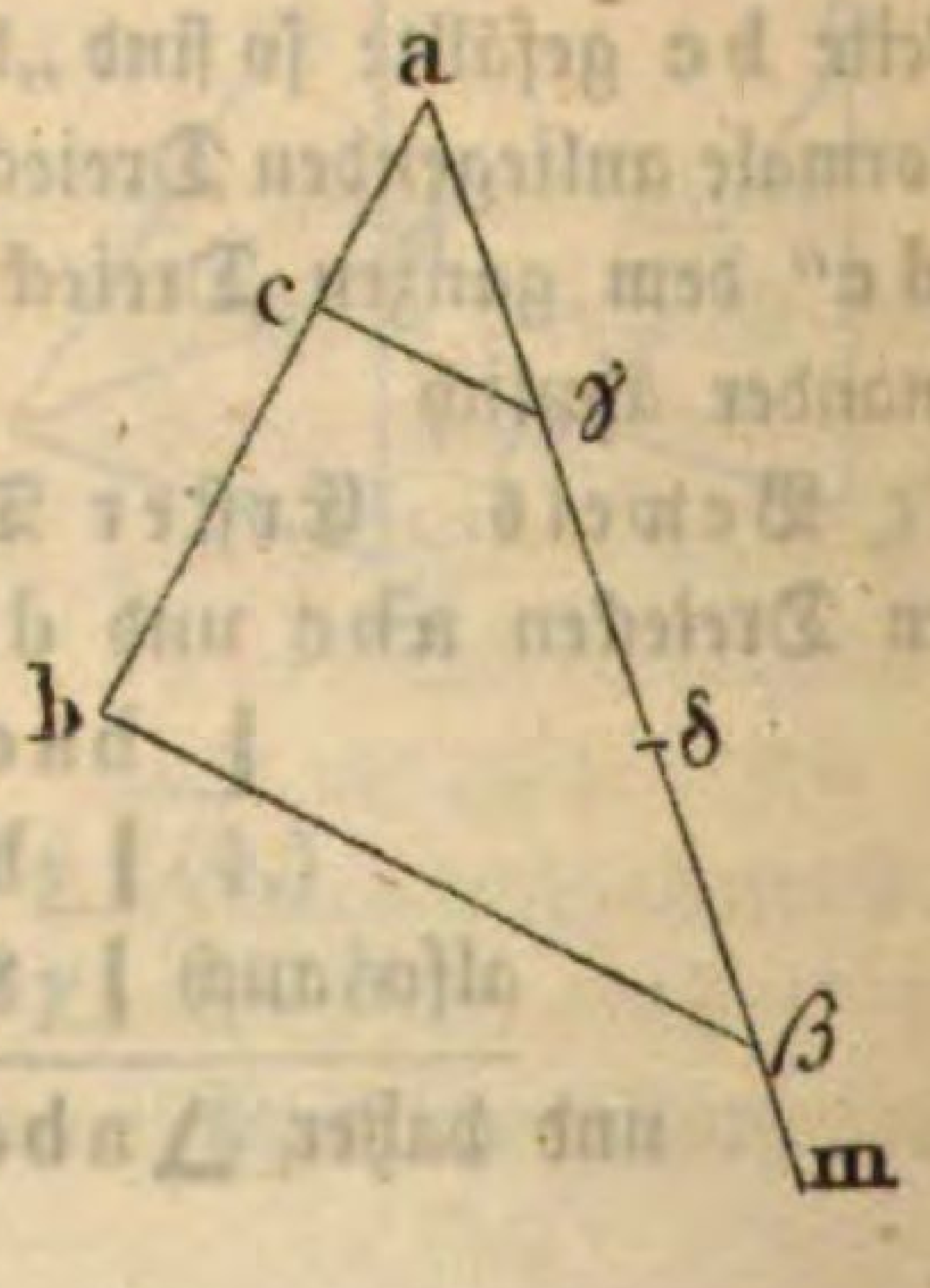
Die, an dem einen Abschnitte bd des rechtwinkligen Dreiecks, anliegende Seite ba ist also die mittlere Proportionale, zwischen diesem Abschnitte und der ganzen Grundlinie bc.

3. Eben so folgt auch: daß ca die mittlere Proportionale ist zwischen dem Abschnitte cd und der ganzen Grundlinie bc. Es ist also auch

$$cd : ca = ca : cb.$$

VI. Satz 9. Lehrsatz.

Von einer gegebenen Linie ab soll ein verlangter Theil abgeschnitten werden.



Auflösung. Es werde der dritte Theil der gegebenen Linie ab verlangt. Aus a ziehe eine Linie am unter einem beliebigen Winkel bam; nimm auf am beliebig einen Punkt γ; mache $\gamma\delta$ und $\delta\beta$ der $a\gamma$ gleich; ziehe $b\beta$ und derselben durch γ die γc parallel, so ist ac der verlangte Theil.

Beweis. Da $c\gamma$ parallel $b\beta$ (p. c.), so ist

$$ac : ab = a\gamma : a\beta \quad (2.)$$

Nun ist $a\gamma = \frac{1}{3}(a\beta)$

folglich ist auch $ac = \frac{1}{3}(ab)$.

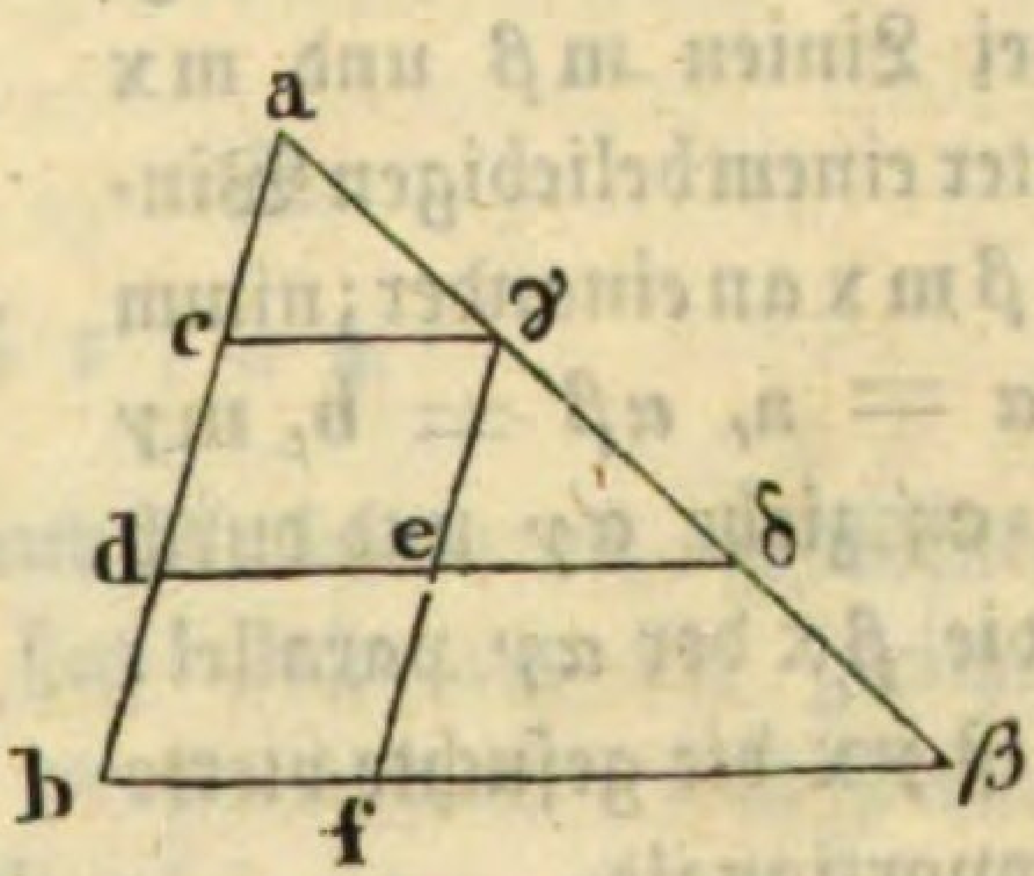
Zusatz. Trägt man auf am irgend eine Anzahl Theile, von welchen jeder $= a\gamma$ ist, ab, verbindet den letzten Theilpunkt mit dem Endpunkte b der gegebenen Linie, und zieht durch γ die γc der Verbindungslinie parallel: so ist immer ac der eben so vielste Theil von ab, so viele gleiche Theile man auf am genommen hat.

Anmerkung. Die Richtigkeit dieser Construction ist auch bereits durch den Lehnsatz Seite 140. ohne Beihülfe der Proportionen bewiesen worden.

VI. Satz 10. Aufgabe.

Eine gegebene ungetheilte Linie ab soll „einer andern getheilten $a\beta$ ähnlich" getheilt werden.

Auflösung. Es sey $a\beta$ in γ und δ getheilt, und an ab unter einem beliebigen Winkel $ba\beta$ angelegt. Man ziehe $b\beta$, und derselben durch γ und δ die Linien γc und δd parallel: so sind c und d die gesuchten Theilpunkte.



Beweis. Durch γ ziehe man γf parallel ab, so sind ce und df Parallelogramme; und es ist daher

$$\gamma e = cd \text{ und } ef = db.$$

Nun ist,

$$\text{in } \Delta\beta\gamma f,\ \beta\delta : \delta\gamma = fe : e\gamma \quad (2.)$$

$$\text{also auch } \beta\delta : \delta\gamma = bd : dc$$

$$\text{und in } \Delta\delta ad,\ \delta\gamma : \gamma a = dc : ca \quad (2.)$$

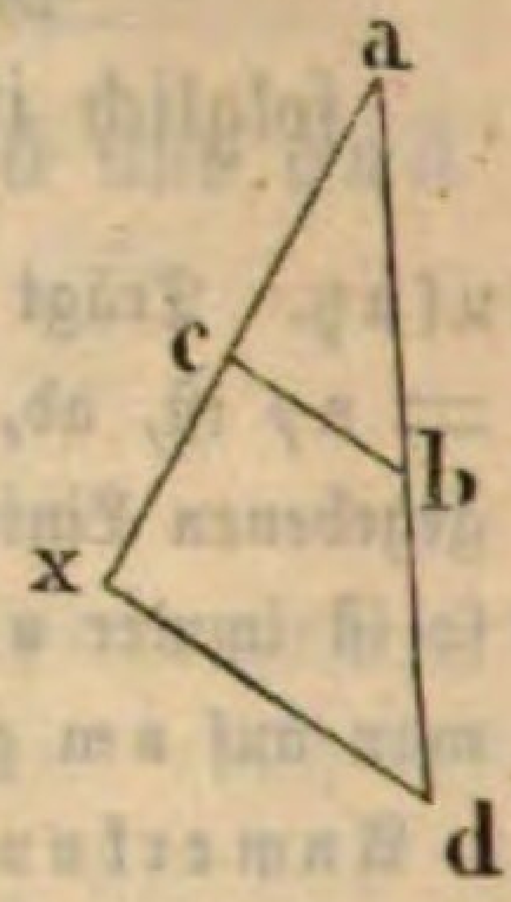
$$\text{folglich ist } \beta\delta : \delta\gamma : \gamma a = bd : dc : ca$$

und es sind daher die Abschnitte bd, dc, ca mit $\beta\delta$, $\delta\gamma$, γa proportionirt.

VI. Satz 11. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien ab und ac soll die dritte Proportionallinie gefunden werden.

Auflösung. Die gegebenen Linien **ab** und **ac** lege unter einem beliebigen Winkel **bac** an einander; verlängere beide, nimm auf der Verlängerung von **ab** die **bd** = **ac**, ziehe **bc** und durch **d** die **dx** parallel **bc**: so ist **cx** die gesuchte dritte Proportionale.



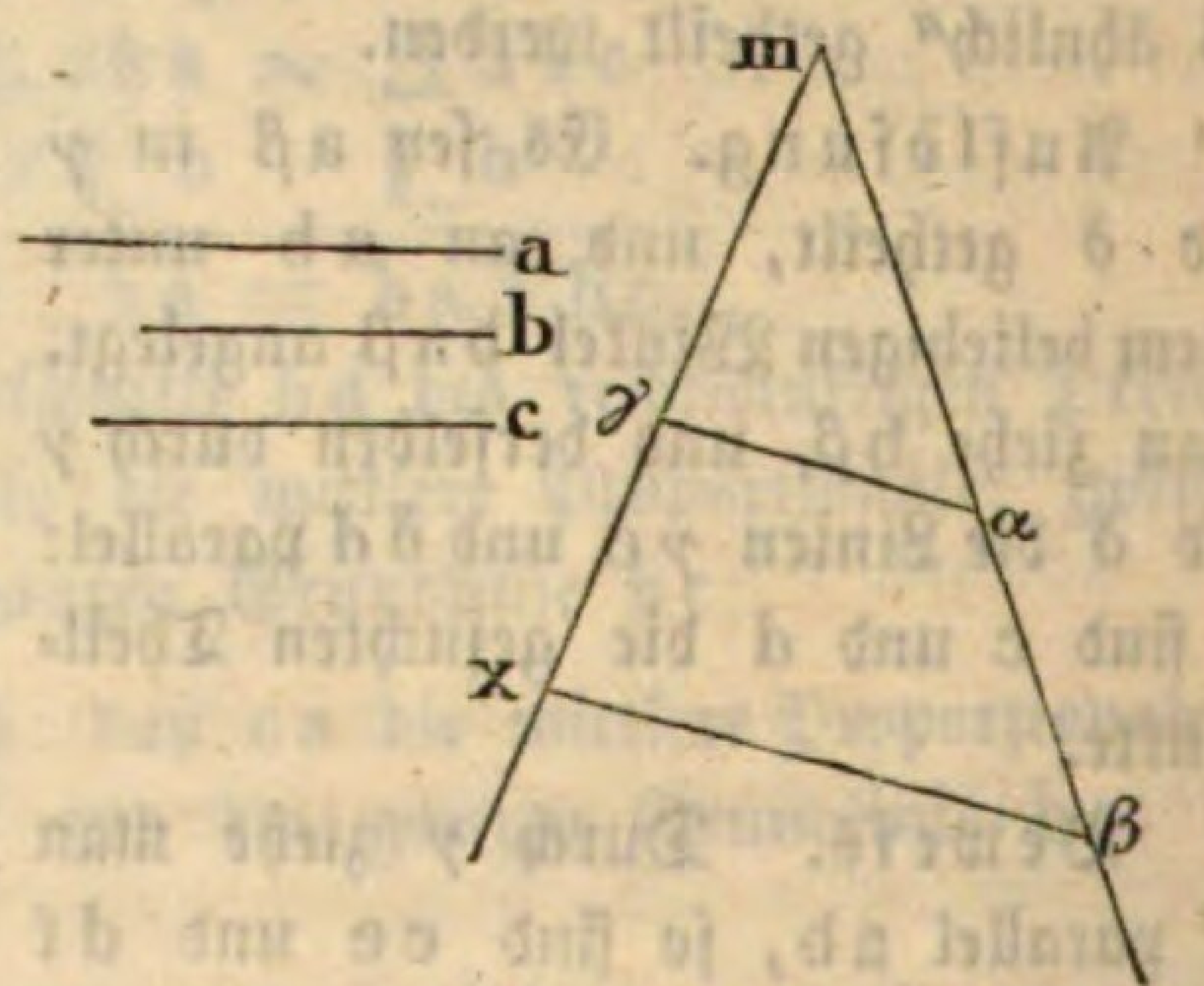
Beweis. Es ist $ab : bd = ac : cx$ (2.)
und $bd = ac$ (p. c.)

folglich $ab : ac = ac : cx$.

VI. Satz 12. Aufgabe.

Zu drei gegebenen geraden Linien a, b und c, soll die vierte Proportionallinie gefunden werden.

Auflösung. Lege zwei Linien $m\beta$ und mx unter einem beliebigen Winkel βmx an einander; nimm $m\alpha = a$, $\alpha\beta = b$, $m\gamma = c$; ziehe $\alpha\gamma$ und durch β die βx der $\alpha\gamma$ parallel: so ist γx die gesuchte vierte Proportionale.



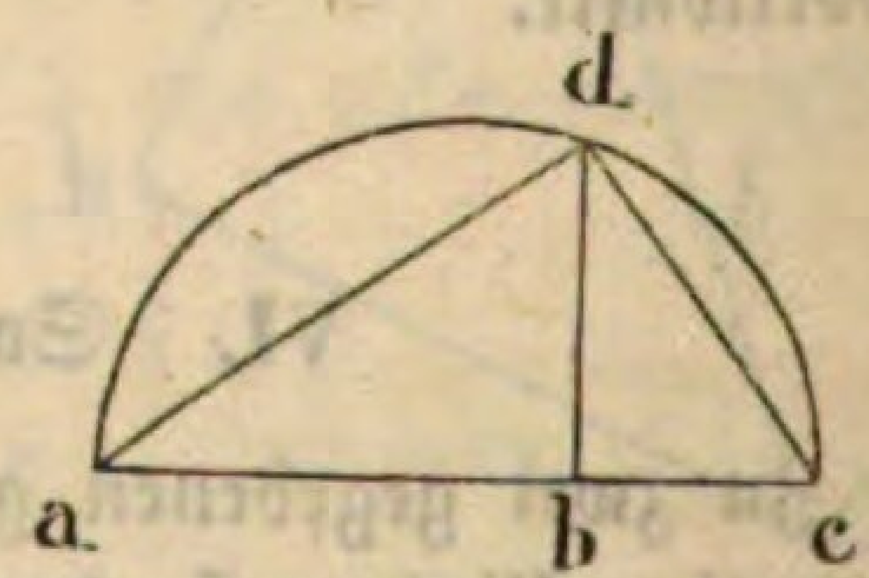
Beweis. Es ist $m\alpha : \alpha\beta = m\gamma : \gamma x$ (2.)
folglich ist auch $a : b = c : \gamma x$.

Zusatz. Nimmt man $m\alpha = a$, $m\beta = b$ und $m\gamma = c$, so wird mx die vierte Proportionale.

VI. Satz 13. Aufgabe.

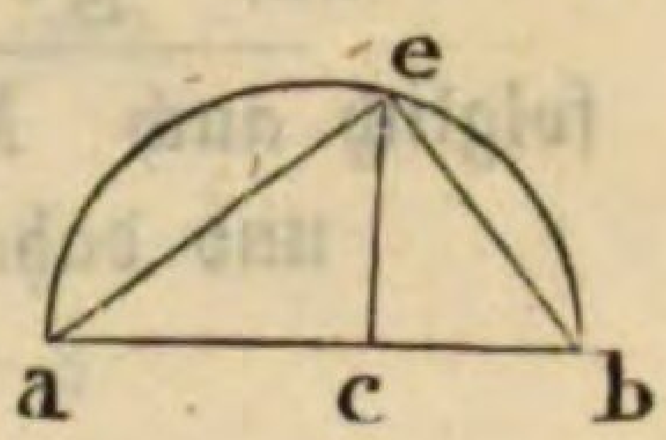
Zwischen zwei gegebenen geraden Linien, **ab** und **bc**, soll die mittlere Proportionallinie gefunden werden.

Auflösung. Setze **ab** und **bc** in gerader Linie an einander, beschreibe über **ac** den Halbkreis **adc**, und errichte in **b** auf **ac** eine Normale, bis sie den Kreis in **d** trifft: so ist **bd** die gesuchte mittlere Proportionale.



Beweis. Man ziehe da, dc, so ist $\angle$ adc = R^0 (III. 31.) und daher ab : bd = bd : bc (8. Zus. Nr. 1.)

Zusatz 1. Zwischen ab und bc kann die mittlere Proportionale auch auf folgende Art gefunden werden:



Man schneide auf ab ein Stück = bc ab; beschreibe über ab den Halbkreis aeb, errichte in c auf ab eine Normale, bis sie den Kreis in e trifft, und ziehe be: so ist Diese die mittlere Proportionale; denn es ist

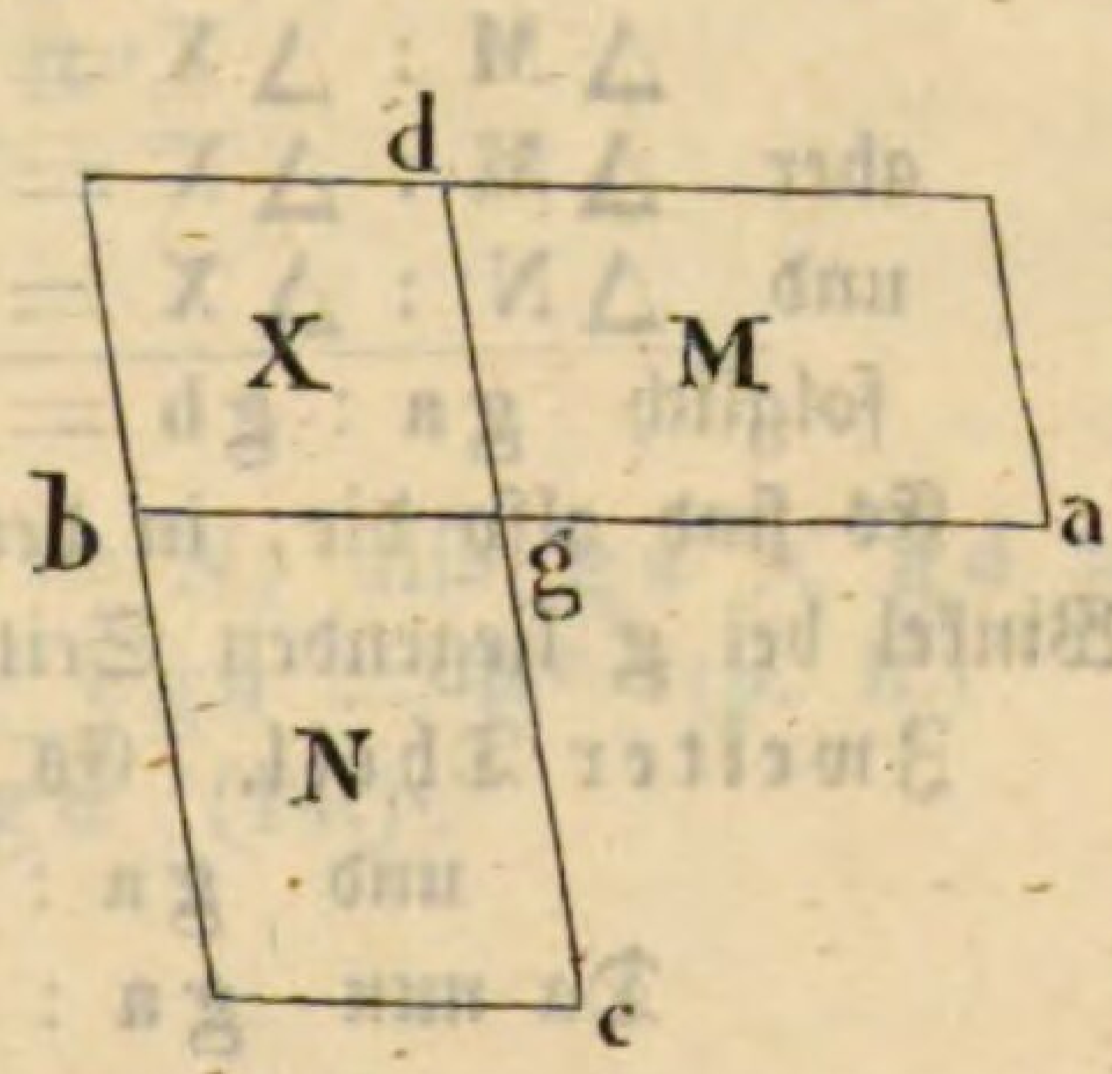
ab : be = be : bc (8. Zus. Nr. 2.)

Zusatz 2. Die Aufgabe Satz 11. „zu zwei Linien ab und be die dritte Proportionallinie zu finden" kann auch auf folgende Art gelös't werden:

Man beschreibe über der größeren ab der beiden gegebenen Linien einen Halbkreis aeb, trage die kleinere be als Sehne ein (IV. 1.), und fälle von e eine Normale auf ab: so ist, wenn Diese die ab in c trifft, bc die gesuchte dritte Proportionale.

VI. Satz 14. Lehrsatz.

In gleichen Parallelogrammen M und N, in denen ein Winkel dga einem Winkel bgc gleich ist, sind „die um die gleichen Winkel liegenden Seiten" wiederkehrend proportionirt. Und Parallelogramme M und N (in welchen ein Winkel dga einem Winkel bgc gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind) sind gleich groß.



Beweis. Erster Theil. Es sey M = N und $\angle$ dga = $\angle$ bgc. Man lege ag und gb in gerader Linie an einander, so sind auch dg und gc in gerader Linie (I. 14.). Vollende das Parallelogramm X, so ist

M : X = N : X (V. 7.)
aber M : X = ga : gb (1.)
und N : X = gb : gd „

daher ga : gb = gc : gd (V. 11.

Die Seiten der gleichen Parallelogramme, welche um die gleichen Winkel bei g liegen, sind also wiederkehrend proportionirt.

Zweiter Theil. Es sey $\angle dga = \angle bgc$, und

$ga : gb = gc : gd.$

Nun ist $ga : gb = M : X$ (1.)

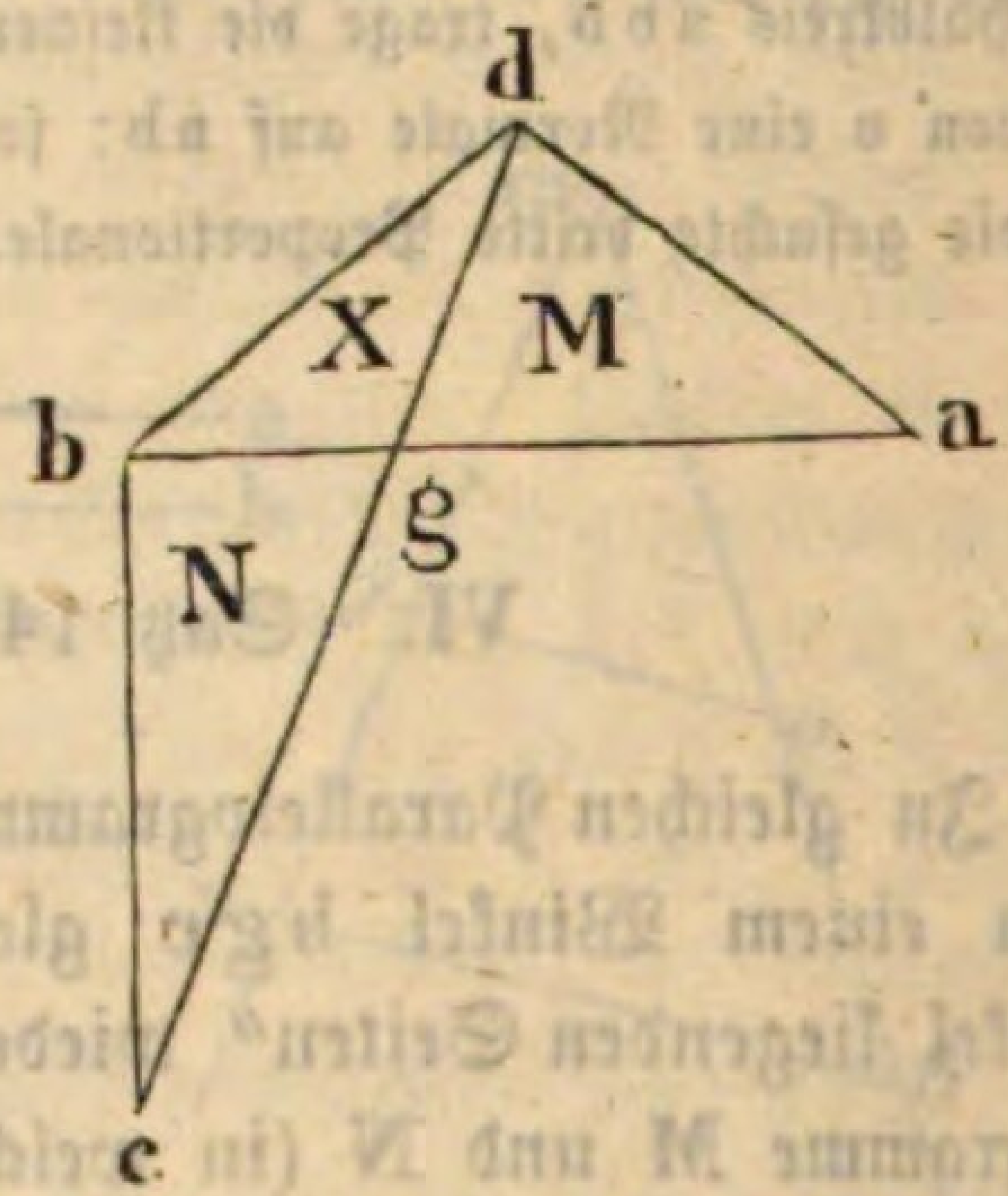
und $gc : gd = N : X$ „

folglich auch $M : X = N : X$ (V. 11.)

und daher $M = N$. (V. 9.)

VI. Satz 15. Lehrsatz.

In gleichen Dreiecken M und N, in denen ein Winkel dga einem Winkel bgc gleich ist, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten wiederkehrend proportionirt. Und Dreiecke M und N — in welchen ein Winkel dga einem Winkel bgc gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten wiederkehrend proportionirt sind — sind gleich groß.



Beweis. Erster Theil. Es sey $\triangle M = \triangle N$, und $\angle dga = \angle bgc$. Man lege ag und gb in gerader Linie an einander, so sind auch dg und gc in gerader Linie. Ziehe db, so ist

$\triangle M : \triangle X = \triangle N : \triangle X$ (V. 7.)

aber $\triangle M : \triangle X = ga : gb$ (1.)

und $\triangle N : \triangle X = gc : gd$ „

folglich $ga : gb = gc : gd.$

Es sind also die, in den gleichen Dreiecken, um die gleichen Winkel bei g liegenden Seiten wiederkehrend proportionirt.

Zweiter Theil. Es sey $\angle dga = \angle bgc$

und $ga : gb = gc : gd.$

Da nun $ga : gb = \triangle M : \triangle X$ (1.)

und $gc : gd = \triangle N : \triangle X$ „

so ist auch $\triangle M : \triangle X = \triangle N : \triangle X$ (V. 11.)

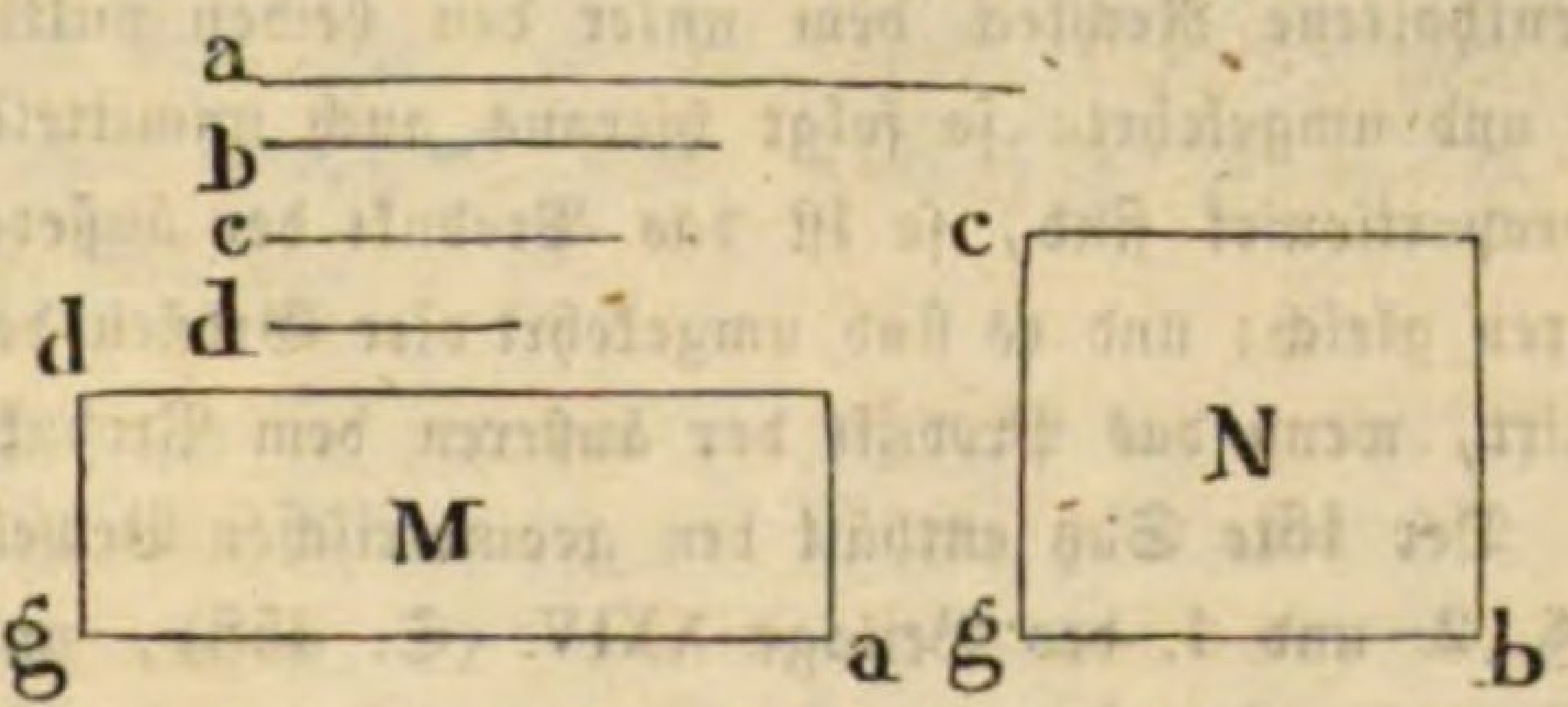
und daher $\triangle M = \triangle N$ (V. 9.)

Zusatz. Die beiden Sätze 14. und 15. führen zu dem Resultate: Wenn zwei Parallelogramme oder Dreiecke M und N gleich groß sind, und einen Winkel gleich haben, so sind die diese Winkel einschließenden Seiten wiederkehrend proportionirt; diese Seiten sind also umgekehrt proportionirt, so

daß die diesen Winkel einschließenden Seiten der einen Figur die mittleren, und die der anderen die äußeren Glieder einer Proportion bilden. Und es gilt dieser Satz auch umgekehrt; haben also zwei Parallelogramme oder Dreiecke einen Winkel gleich, und sind die um diesen Winkel liegenden Seiten umgekehrt proportionirt: so sind die Figuren gleich groß.

VI. Satz 16 Lehrsatz.

Sind vier gerade Linie a, b, c, d proportionirt: so ist das unter den äußeren a und d enthaltene Rechteck dem unter den mittleren b und c enthaltenen gleich. Und ist das unter den äußeren a und d enthaltene Rechteck dem unter den mittleren enthaltenen gleich: so sind die vier geraden Linien a, b, c, d proportionirt.



Beweis Erster Theil. Es sey $a : b = c : d$.

Nimm $ga = a$, $gb = b$, errichte in g auf gb die $gc = c$ und auf ga die $gd = d$, und vollende die Parallelogramme M und N: so ist

$$ga : gb = gc : gd \quad \text{(p. h.)}$$

und $\llcorner dga = \llcorner cgb = R^0$.

Folglich ist $M = N$ (14.)

also $ga \times gd = gb \times gc$

oder $a \times d = b \times c$.

Zweiter Theil. Es sey $M = N$, also $ga \times gd = gb \times gc$: so ist, da $\llcorner dga = \llcorner cgb = R^0$ (p. h.)

$$ga : gb = gc : gd \quad (14.)$$

also $a : b = c : d$.

VI. Satz 17. Lehrsatz.

Sind drei gerade Linien a, b und d proportionirt: so ist das unter den äußeren a und d enthaltene Rechteck dem Quadrate der mittleren b gleich. Und ist das unter den äußeren a und d enthaltene Rechteck dem Quadrate der mittleren b gleich: so sind die drei geraden Linien a, b und d, proportionirt.

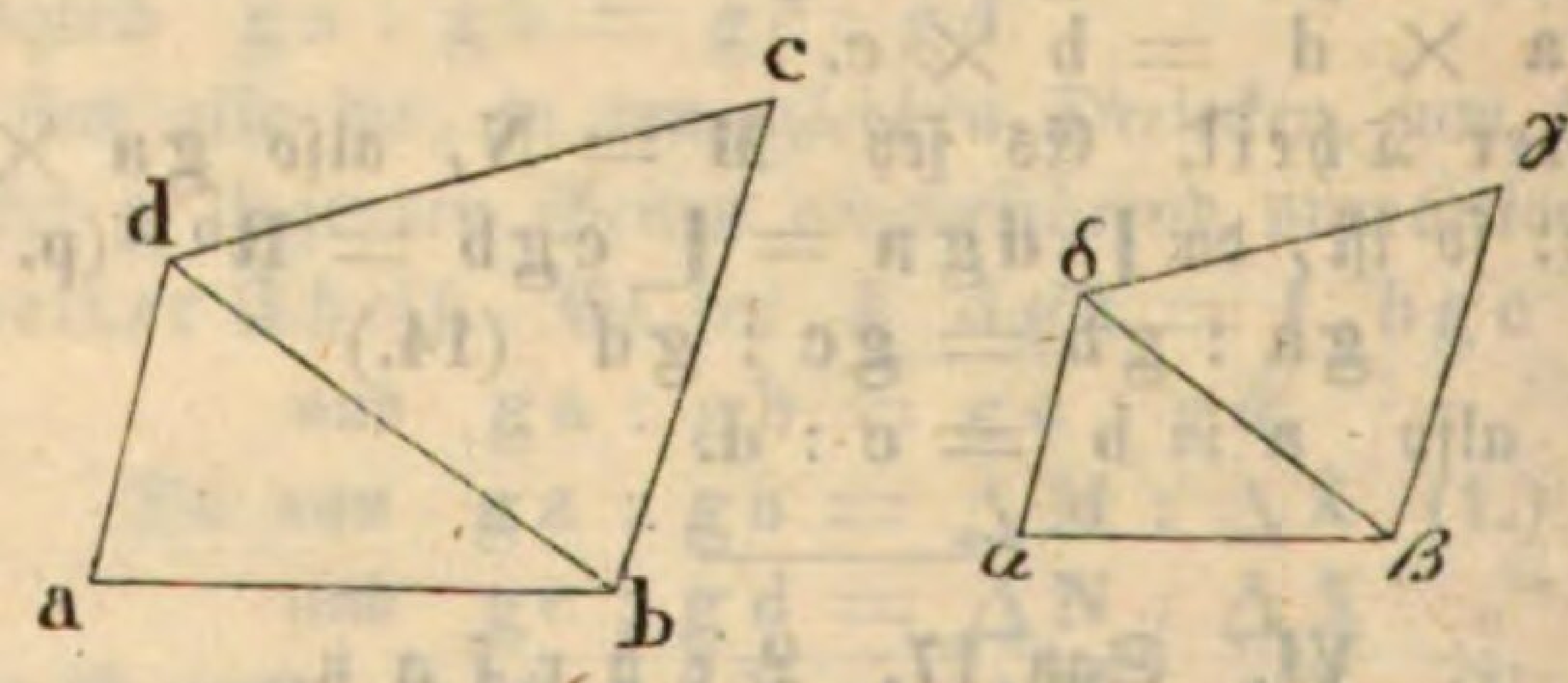
Beweis. Erster Theil. Es sey $a : b = b : d$.
Nimmt man $c = b$, so ist auch $a : b = c : d$
und daher $a \times d = b \times c$ (16.)
Und weil $c = b$, so ist $b \times c = b \times b = \square b$
es ist also auch $a \times d = \square b$.

Zweiter Theil. Es sey $a \times d = \square b = b \times b$
so ist für $b = c$ auch $a \times d = b \times c$
und daher $a : b = c : d$ (16.)
also $a : b = b : d$.

Anmerkung. Ein unter zwei geraden Linien enthaltenes Rechteck ist das geometrisch construirte Produkt der diesen Linien gleichen Größen (S. 199). Da nun, wenn 4 gerade Linien proportionirt sind, das unter den beiden äußeren enthaltene Rechteck dem unter den beiden mittleren enthaltenen gleich ist, und umgekehrt: so folgt hieraus auch unmittelbar, wenn vier Größen proportionirt sind, so ist das Produkt der äußeren dem Produkte der mittleren gleich; und es sind umgekehrt vier Größen der Ordnung nach proportionirt, wenn das Produkt der äußeren dem Produkte der mittleren gleich ist. Der 16te Satz enthält den geometrischen Beweis für die beiden Lehrsätze §. 2. und 4. der Beilage XXIV. (S. 458), und der 17te Satz enthält in gleicher Art den Beweis für den Lehrsatz §. 19. (S. 465).

VI. Satz 18. Lehrsatz.

Auf einer gegebenen geraden Linie $\alpha\beta$ soll „eine der gegebenen, über ab beschriebenen geradlinigen Figur abcd ähnliche und ähnlich liegende Figur" beschrieben werden.



Auflösung. Ziehe die Diagonale bd, und setze an die Endpunkte der $\alpha\beta$ die Winkel $\alpha = a$, und $\llcorner\, \alpha\beta\delta = \llcorner\, abd$ (I. 23.); ferner an die Endpunkte der $\beta\delta$ die Winkel $\delta\beta\gamma = \llcorner\, dbc$ und $\llcorner\, \beta\delta\gamma = \llcorner\, bdc$:
so ist nun $\alpha\beta\gamma\delta \sim abcd$.

Beweis. Es ist $\angle \alpha\delta\beta = \angle$ adb (I. 32.)
und $\angle \beta\delta\gamma = \angle$ bdc (p. c.)

also $\angle \alpha\delta\gamma = \angle$ adc
und eben so ist $\angle \alpha\beta\gamma = \angle$ abc (G. 2.)
Da nun auch $\angle \alpha = \angle$ a (p. c.)
und $\angle \gamma = \angle$ c (I. 32.)
so sind die Figuren $\alpha\beta\gamma\delta$ und abcd gleichwinklig.

Da (4) $\Delta \delta\alpha\beta \sim \Delta$dab, so ist $\beta\delta$: bd $= \beta\alpha$: ba
$\Delta \delta\gamma\beta \sim \Delta$dcb „ „ $\beta\delta$: bd $= \beta\gamma$: bc

daher ist auch $\beta\alpha$: ba $= \beta\gamma$: bc
und eben so folgt $\delta\alpha$: da $= \delta\gamma$: dc
aber auch $\beta\alpha$: ba $= \delta\alpha$: da (4.)

Es ist also $\beta\alpha$: ba $= \alpha\delta$: ad $= \delta\gamma$: dc $= \gamma\beta$: cb; die Figuren haben hiernach auch proportionirte Seiten, und sind folglich ähnlich (E. 1.).

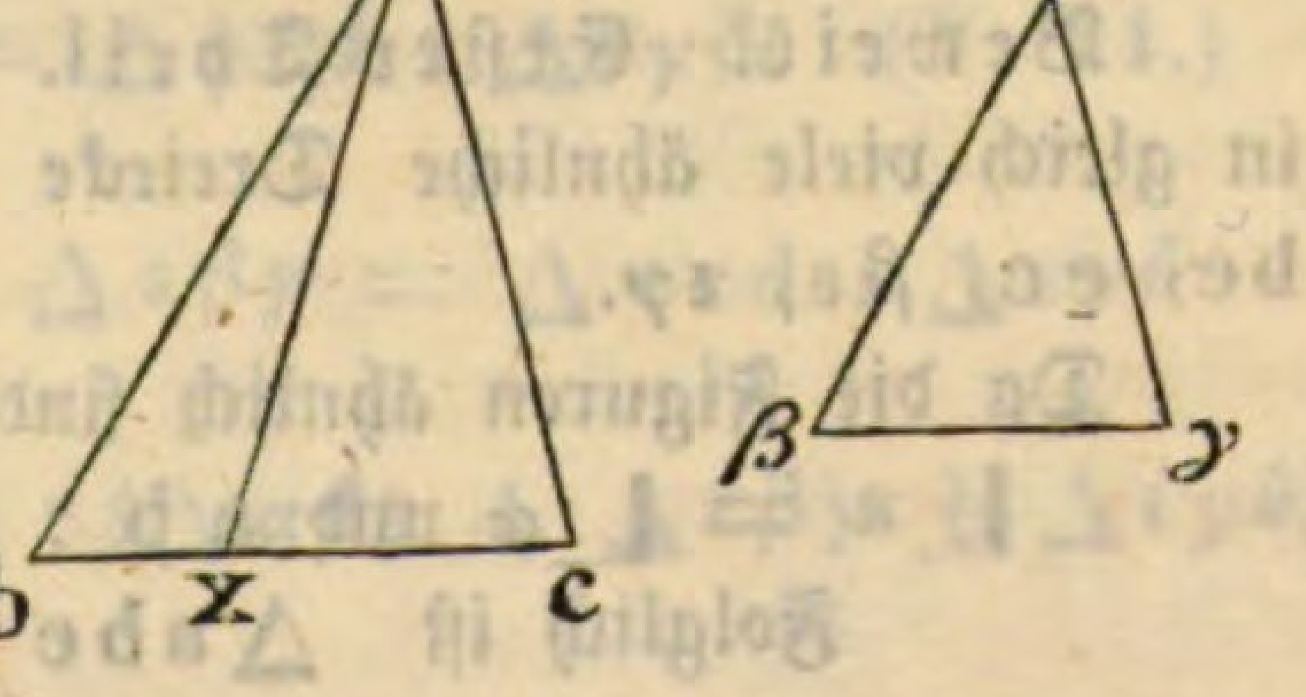
Anmerkung. Hat ab eine der $\alpha\beta$ parallele Lage, so sind, in den ähnlichen Figuren abcd und $\alpha\beta\gamma\delta$, je zwei gleichnamige Seiten parallel. Aus der Voraussetzung ab parallel $\alpha\beta$ folgt also: daß auch ad parallel $\alpha\delta$, bc parallel $\beta\gamma$, cd parallel $\gamma\delta$, und bd parallel $\beta\delta$. Hierauf beruht das praktische Verfahren, welches angewendet wird, wenn eine der abcd ähnliche Figur $\alpha\beta\gamma\delta$ so verzeichnet werden soll, daß $\alpha\beta$ der ab gleichnamig wird. Dieses Verfahren besteht in Folgendem:

Man giebt der $\alpha\beta$ eine der ab parallele Lage; zieht durch α die $\alpha\delta$ parallel ad, und durch β die $\beta\delta$ parallel bd: so ist nun $\Delta \alpha\beta\delta \sim \Delta$abd. Ferner wird nun durch β die $\beta\gamma$ der bc, und durch δ die $\delta\gamma$ der dc parallel gezogen, wodurch alsdann auch $\Delta \beta\gamma\delta \sim \Delta$bcd wird. Das Ziehen der Parallele geschieht durch bloßes Abschieben, nach dem bereits in der Anmerkung zum 31sten Satze des ersten Buches, Seite 50, angegebenen Verfahren.

VI. Satz 19. Lehrsatz.

Das Verhältniß ähnlicher Dreiecke ist das Zweifache des Verhältnisses ihrer gleichnamigen Seiten.

Beweis. Es sey Δabc $\sim \Delta \alpha\beta\gamma$; und zwar $\angle$b $= \angle \beta$, und bc gleichnamig der $\beta\gamma$.



so ist $ab : bc = \alpha\beta : \beta\gamma$

also auch $ab : \alpha\beta = bc : \beta\gamma$. (V. 16.)

Sucht man zu bc und $\beta\gamma$ die dritte Proportionale $= bx$ (11.), so ist

$$bc : \beta\gamma = b\gamma : bx$$

folglich $ab : \alpha\beta = b\gamma : bx$. (V. 11.)

Da nun $\llcorner b = \llcorner \beta$, so ist, wenn man ax zieht,

$$\Delta abx = \Delta \alpha\beta\gamma \quad (15.)$$

Daher $\Delta abc : \Delta abx = \Delta abc : \Delta \alpha\beta\gamma$. (V. 7.)

Da nun $\Delta abc : \Delta abx = bc : bx$ (1.)

so ist auch $\Delta abc : \Delta \alpha\beta\gamma = bc : bx$.

Weil aber $bc : \beta\gamma = \beta\gamma : bx$

so ist $bc : bx = 2\,(bc : \beta\gamma)$ (V. E. 10.)

folglich ist auch $\Delta abc : \Delta \alpha\beta\gamma = 2\,(bc : \beta\gamma)$.

Zusatz. Hieraus folgt: Sind drei gerade Linien bc, $\beta\gamma$ und bx, stetig proportionirt: so verhält sich die erste bc zu der dritten bx, wie ein Dreieck abc auf der ersten dieser Linien bc, zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Dreieck $\alpha\beta\gamma$ auf der zweiten Linie $\alpha\beta$. Es ist nämlich,

wenn $bc : \beta\gamma = \beta\gamma : bx$

$$\Delta abc : \Delta \alpha\beta\gamma = bc : bx$$

Anmerkung. Da, wenn drei Größen bc, $\beta\gamma$, bx, stetig proportionirt sind, die erste zu der dritten, wie das Quadrat der ersten zu dem Quadrate der zweiten sich verhält (Beilage XXIV. §. 20. Seite 456), so folgt: „ähnliche Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate gleichnamiger Seiten derselben".

VI. Satz 20. Lehrsatz.

Aehnliche vielseitige Figuren $abcde$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ lassen sich in gleich viele ähnliche und den ganzen Figuren gleichnamige Dreiecke zerlegen. Auch ist das Verhältniß ähnlicher vielseitiger Figuren das Zweifache des Verhältnisses ihrer gleichnamigen Seiten.

Beweis. Erster Theil. Die ähnlichen Figuren lassen sich in gleich viele ähnliche Dreiecke zerlegen. Ziehe die Diagonalen be, ec, $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$.

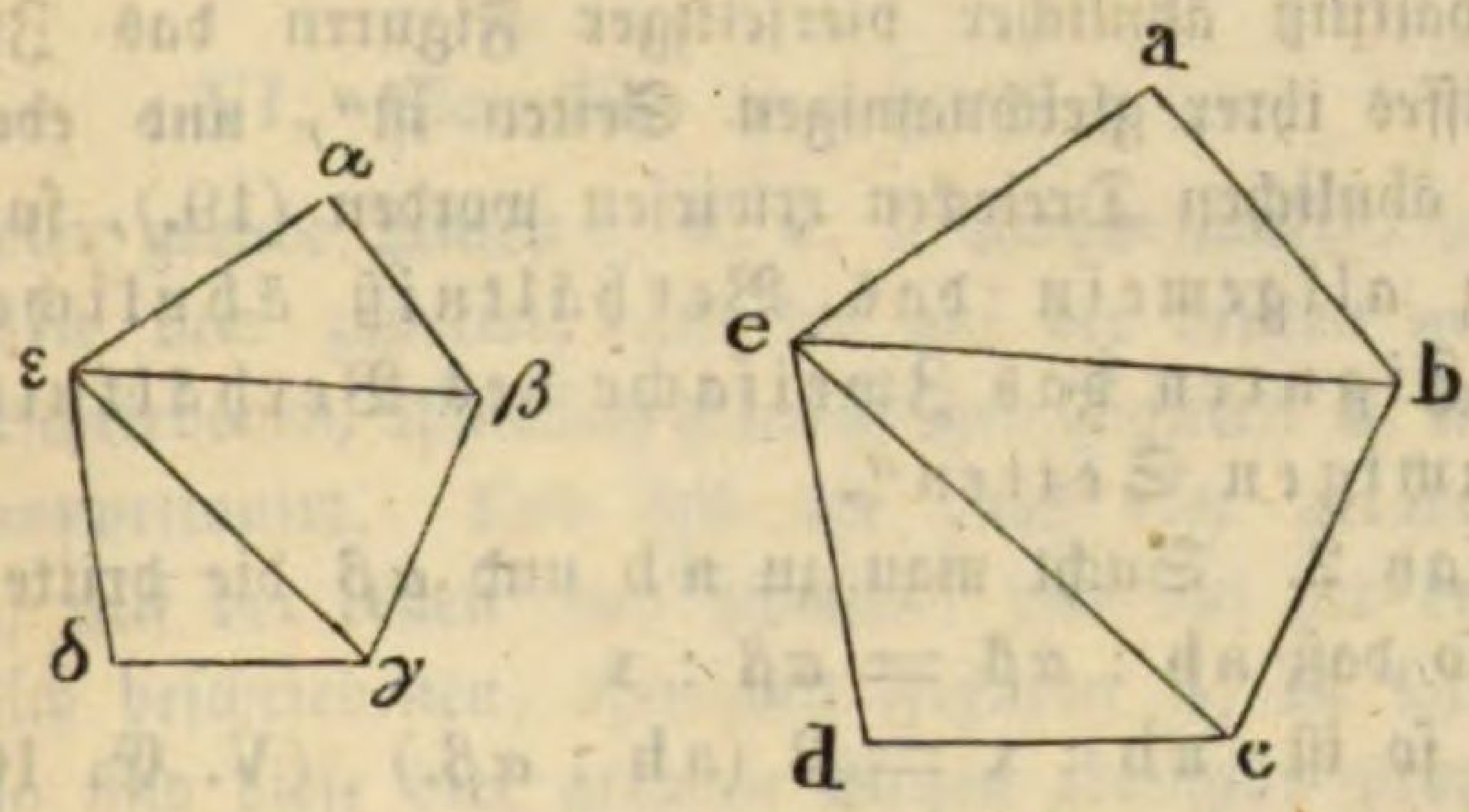
Da die Figuren ähnlich sind, so ist

$\llcorner a = \llcorner \alpha$ und $ab : ae = \alpha\beta : \alpha\varepsilon$. (E. 1.)

Folglich ist $\Delta abe \sim \Delta \alpha\beta\varepsilon$. (6.)

Hieraus folgt $\llcorner abe = \llcorner \alpha\beta\varepsilon$
Da nun $\llcorner abc = \llcorner \alpha\beta\gamma$ (p. h.)

so ist auch $\llcorner ebc = \llcorner \varepsilon\beta\gamma$.



Da $\Delta abe \sim \Delta \alpha\beta\varepsilon$ so ist
$eb : ab = \varepsilon\beta : \alpha\beta$
aber $ab : bc = \alpha\beta : \beta\gamma$ (p. h.)
folglich ist aus dem Gleichen $eb : bc = \varepsilon\beta : \beta\gamma$

und daher $\Delta ebc \sim \Delta \varepsilon\beta\gamma$. (6.)

Aus gleichen Gründen ist nun ferner auch
$\Delta ecd \sim \Delta \varepsilon\gamma\delta$.

Zweiter Theil. Diese ähnlichen Dreiecke sind den ganzen Figuren proportionirt und ihnen gleichnamig (es ist $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \Delta abe : \Delta \alpha\beta\varepsilon = \Delta ebc : \Delta \varepsilon\beta\gamma = \Delta ecd : \Delta \varepsilon\gamma\delta$), und das Verhältniß der ganzen Figuren ist das Zweifache des Verhältnisses ihrer gleichnamigen Seiten. Da die Figuren in ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke zerlegt werden, so ist

$\Delta abe : \Delta \alpha\beta\varepsilon = 2\,(be : \beta\varepsilon)$ (19.)
und auch $\Delta ebc : \Delta \varepsilon\beta\gamma = 2\,(be : \beta\varepsilon)$

folglich $\Delta abe : \Delta \alpha\beta\varepsilon = \Delta ebc : \Delta \varepsilon\beta\gamma$. (V. 11.)
Eben so ist $\Delta ebc : \Delta \varepsilon\beta\gamma = 2\,(ec : \varepsilon\gamma)$ (19.)
und auch $\Delta ecd : \Delta \varepsilon\gamma\delta = 2\,(ec : \varepsilon\gamma)$

und daher $\Delta ebc : \Delta \varepsilon\beta\gamma = \Delta ecd : \Delta \varepsilon\gamma\delta$. (V. 11.)

Hiernach ist
$$\Delta abe : \Delta \alpha\beta\varepsilon = \Delta ebc : \Delta \varepsilon\beta\gamma = \Delta ecd : \Delta \varepsilon\gamma\delta$$
und hieraus folgt:
$$(\Delta abe + \Delta ebc + \Delta ecd) : (\Delta \alpha\beta\varepsilon + \Delta \varepsilon\beta\gamma + \Delta \varepsilon\gamma\delta)$$
$$= \Delta abe : \Delta \alpha\beta\varepsilon \text{ (V. 12.)}$$

also $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \Delta abe : \Delta\alpha\beta\varepsilon$.
Da nun $\Delta abe : \Delta\alpha\beta\varepsilon = 2\,(ab : \alpha\beta)$

so ist $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 2\,(ab : \alpha\beta)$.

Zusatz 1. Da auf gleiche Art sich beweisen läßt, „daß auch das Verhältniß ähnlicher vierseitiger Figuren das Zweifache des Verhältnisses ihrer gleichnamigen Seiten ist", und eben Dasselbe auch von ähnlichen Dreiecken erwiesen worden (19.), so folgt: „es ist ganz allgemein das Verhältniß ähnlicher geradliniger Figuren das Zweifache des Verhältnisses ihrer gleichnamigen Seiten".

Zusatz 2. Sucht man zu ab und $\alpha\beta$ die dritte Proportionale x, so daß $ab : \alpha\beta = \alpha\beta : x$

so ist $ab : x = 2\,(ab : \alpha\beta.)$ (V. E. 10.)
Da nun auch $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 2\,(ab : \alpha\beta)$

so folgt $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = ab : x$.

Sind also drei gerade Linien ab, $\alpha\beta$ und x, proportionirt: so verhält sich die erste ab zu der dritten x, wie eine geradlinige Figur auf der Ersten ab, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf der Zweiten, $\alpha\beta$, sich verhält.

Anmerkung. Ist $abcde \backsim \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, und sind ab und $\alpha\beta$ gleichnamig: so ist

$$abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 2\,(ab : \alpha\beta).$$

Es ist aber $2\,(ab : \alpha\beta) = (ab)^2 : (\alpha\beta)^2$. (Beilage XXIV. §. 20.)

Folglich ist auch $abcde : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = (ab)^2 : (\alpha\beta)^2$.

Aehnliche geradlinige Figuren verhalten sich also, wie die Quadrate gleichnamiger Seiten derselben.

VI. Satz 21. Lehrsatz.

Die einer und derselben Figur, C, ähnlichen geradlinigen Figuren A und B sind unter sich ähnlich.

Beweis. Da, wegen der Aehnlichkeit der Figuren, A und C, und auch B und C gleichwinklig sind: so sind auch A und B gleichwinklig (G. 1.).

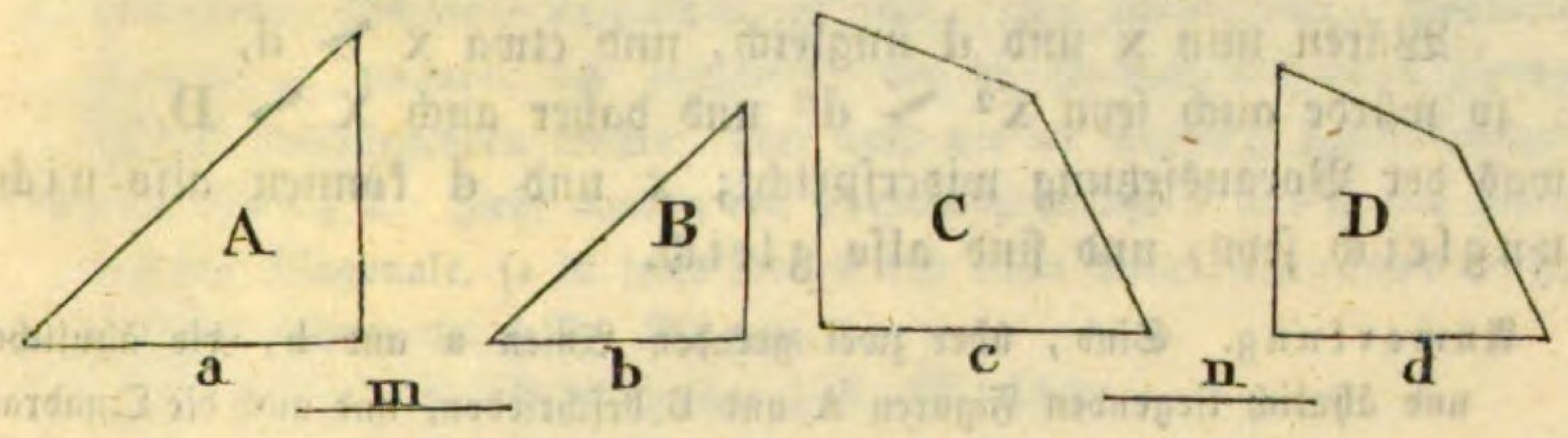
Da ferner bei A und C, und auch bei B und C die Seiten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt sind: so müssen auch bei A und B die um gleiche Winkel liegenden Seiten proportionirt seyn (V. 11.).

Folglich sind **A** und **B** gleichwinklig, und ihre um gleiche Winkel liegenden Seiten proportionirt; und es ist daher

$$A \sim B. \quad (\text{E. } 1.)$$

VI. Satz 22. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien a, b, c, d proportionirt: so sind die auf der ersten und zweiten, und die auf der dritten und vierten — ähnlich beschriebenen, ähnlichen geradlinigen Figuren **A, B, C, D** — ebenfalls proportionirt. Und sind die „auf vier geraden Linien a, b, c, d, auf der ersten und zweiten, und auf der dritten und vierten ähnlich beschriebenen, ähnlichen Figuren **A, B, C, D**" proportionirt, so sind diese vier geraden Linien ebenfalls proportionirt.



Beweis. Erster Theil. Es sey $a : b = c : d$. Suche zu a und b die dritte Proportionale m und

„ c „ d „ „ „ n

$$\text{so ist } a : b = b : m$$
$$\text{und } c : d = d : n.$$
$$\text{Da nun } a : b = c : d \quad (\text{p. h})$$
$$\text{so ist auch } b : m = d : n. \quad (\text{V. } 11.)$$
$$\text{Es ist also } a : b = c : d$$
$$\text{und } b : m = d : n$$
$$\text{und daher } a : m = d : n. \quad (\text{V. } 22.)$$

Aber wegen $A \sim B$ und $C \sim D$

und $a : b = b : m$, ist $A : B = a : m$ (20.)

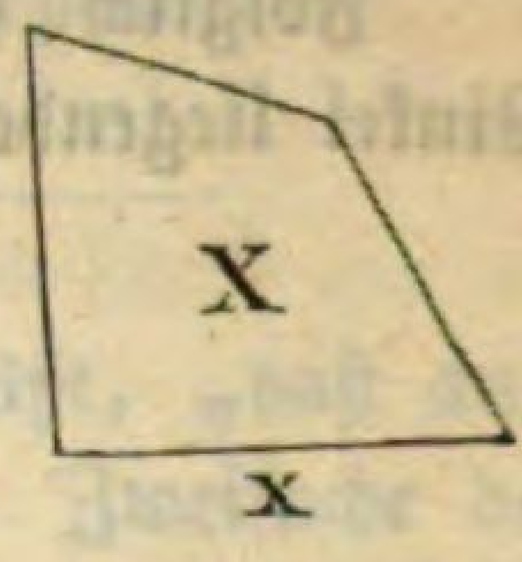
„ $c : d = d : m$ „ $C : D = d : n$ „

$$\text{folglich } A : B = C : D.$$

Zweiter Theil. Es sey $A : B = C : D$

$$\text{und } a : b = c : x$$

so ist, wenn man über x eine Figur X, welche der **C** und also auch der **D** (21.) ähnlich ist, beschreibt,



$$A : B = C : X.$$
Da nun $A : B = C : D$

so ist $C : X = C : D$ (V. 11.)

und daher $X = D$ (V. 9.)

Nun ist aber auch $X \sim D$

folglich ist $X \cong D$

und hieraus folgt (nach dem folgenden Lehnsatze) $x = d$. Da nun
$$a : b = c : x \quad (\text{p. c.})$$
so ist auch $a : b = c : d$.

Lehnsatz. „Daß, in gleichen und ähnlichen Figuren X und D, auch die gleichnamigen Seiten x und d gleich sind", wird auf folgende Art bewiesen:

Da X und D ähnlich sind, so ist
$$X : D = x^2 : d^2 \quad (20. \text{ Anmerkung}).$$

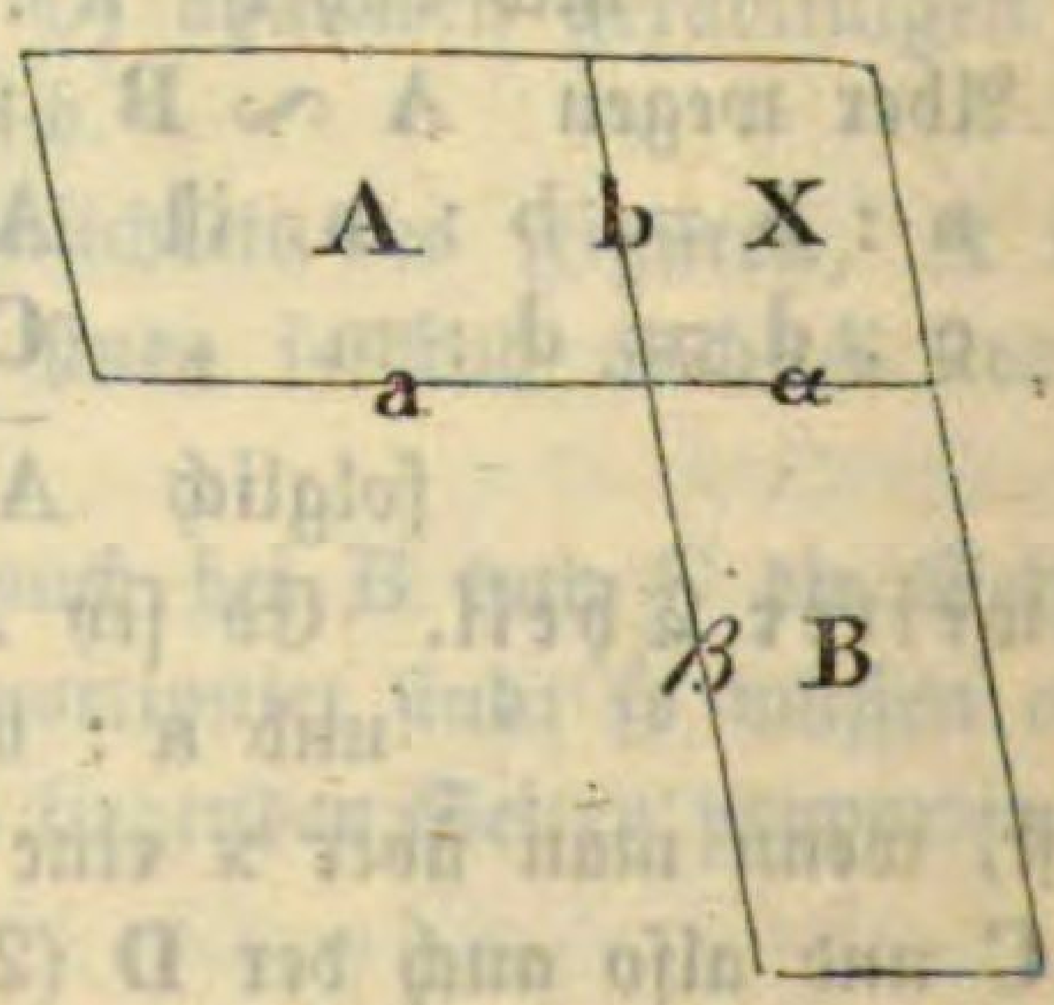
Wären nun x und d ungleich, und etwa $x > d$, so würde auch seyn $x^2 > d^2$ und daher auch $X > D$, was der Voraussetzung widerspricht; x und d können also nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Anmerkung. Sind, über zwei geraden Linien a und b, die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren A und B beschrieben, und auch die Quadrate $\alpha = a^2$ und $\beta = b^2$: so ist, da
$$a : b = a : b$$
auch $A : B = \alpha : \beta$ (22.)

und daher $A : B = a^2 : b^2$.

Hieraus folgt also geometrisch die Richtigkeit des in den Anmerkungen zu 19. und 20. mit Hülfe des §. 20. der Beilage XXIV. bewiesenen Satzes: daß ähnliche Figuren wie die Quadrate gleichnamiger Seiten derselben sich verhalten.

VI. Satz 23. Lehrsatz.



Das Verhältniß gleichwinkliger Parallelogramme A und B ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten $a : \alpha$ und $b : \beta$ zusammengesetzt.

Beweis. Da die Parallelogramme A und B gleichwinklig seyn sollen, so können sie mit einem gleichen Winkel so an

einander gelegt werden, daß zugleich a mit α und β mit b in gerader Linie ist. Man vollende das Parallelogramm X.

$$\text{Nun ist } A : X = a : \alpha \quad (1.)$$
$$\text{und } X : B = b : \beta \quad „$$

$$\text{folglich } A : B = \left\{ \begin{matrix} a : \alpha \\ b : \beta \end{matrix} \right\} \quad (\text{E. } 5.)$$

Anmerkung 1. Nach der, zu der 5ten Erklärung des sechsten Buches gegebenen Erläuterung ist „das aus $a : \alpha$ und $b : \beta$ zusammengesetzte Verhältniß" dem Verhältnisse gleich, welches das Produkt der Vorderglieder zu dem Produkte der Hinterglieder hat; es ist also

$$\left\{ \begin{matrix} a : \alpha \\ b : \beta \end{matrix} \right\} = a \times b : \alpha \times \beta$$

folglich ist auch $A : B = a \times b : \alpha \times \beta$.

Und da auch $a \times b$ und $\alpha \times \beta$ „die unter a und b und unter α und β enthaltenen Rechtecke" bezeichnen, so folgt: „daß gleichwinklige Parallelogramme zu einander sich verhalten, wie die Produkte der einen gleichen Winkel einschließenden Seiten, oder auch wie die Rechtecke dieser Seiten".

Anmerkung 2. Zieht man in den Parallelogrammen A und B eine gleichliegende Diagonale, so ist jedes Dreieck des einen Parallelogrammes $= \frac{1}{2} A$ und des andern $= \frac{1}{2} B$. Da nun

$$A : B = \tfrac{1}{2} A : \tfrac{1}{2} B \quad (\text{V. } 15.)$$
$$\text{und } A : B = a \times b : \alpha \times \beta$$

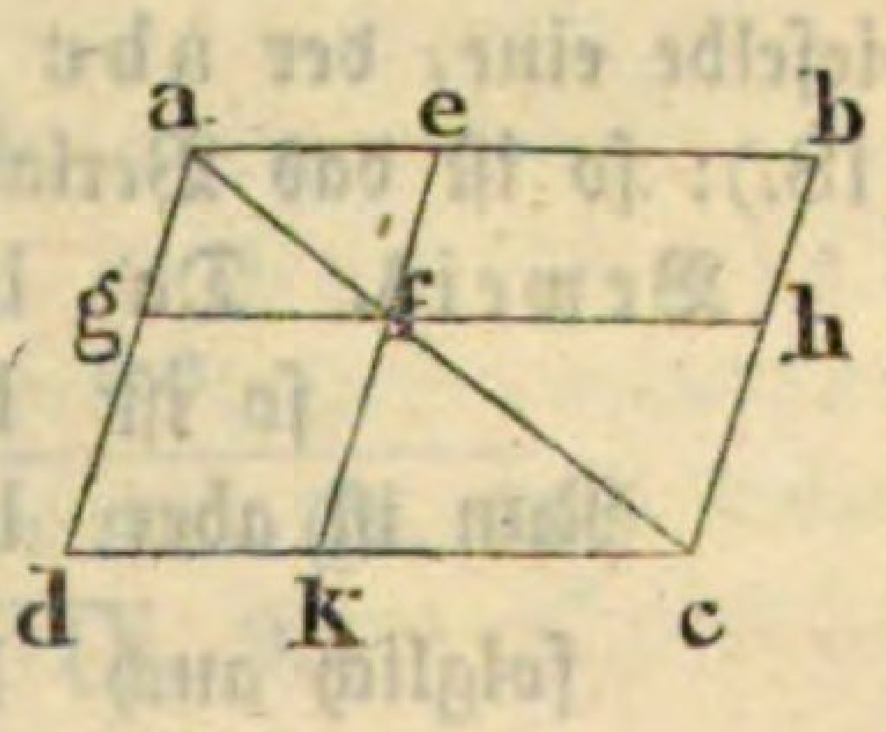
$$\text{so folgt } \tfrac{1}{2} A : \tfrac{1}{2} B = a \times b : \alpha \times \beta.$$

Haben also zwei Dreiecke einen Winkel gleich, so sind sie ebenfalls „in dem zusammengesetzten Verhältnisse ihrer diesen Winkel einschließenden Seiten"; oder, was Dasselbe ist, sie verhalten sich „wie die Rechtecke, oder wie die Produkte dieser Seiten".

VI. Satz 24. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme abcd sind „die um die Diagonale liegenden Parallelogramme eg und hk" dem Ganzen und einander ähnlich.

Beweis Da gf prll. dc (p. h.) so ist $\llcorner$ agf = $\llcorner$ d, und $\llcorner$ afg = $\llcorner$ acd.



daher $\triangle$ agf $\sim$ $\triangle$ adc (4.)
Und aus gleichen Gründen ist auch
$\triangle$ aef $\sim$ $\triangle$ abc.

Daher ist Parallelogramm abcd dem Parallelogramm eg gleichwinklig, und es ist

$$ad : dc = ag : gf$$
$$\text{und } ab : bc = ae : ef$$

woraus nun auch folgt

$$ad : ab = ag : ae$$
$$\text{und } dc : cb = gf : fe.$$

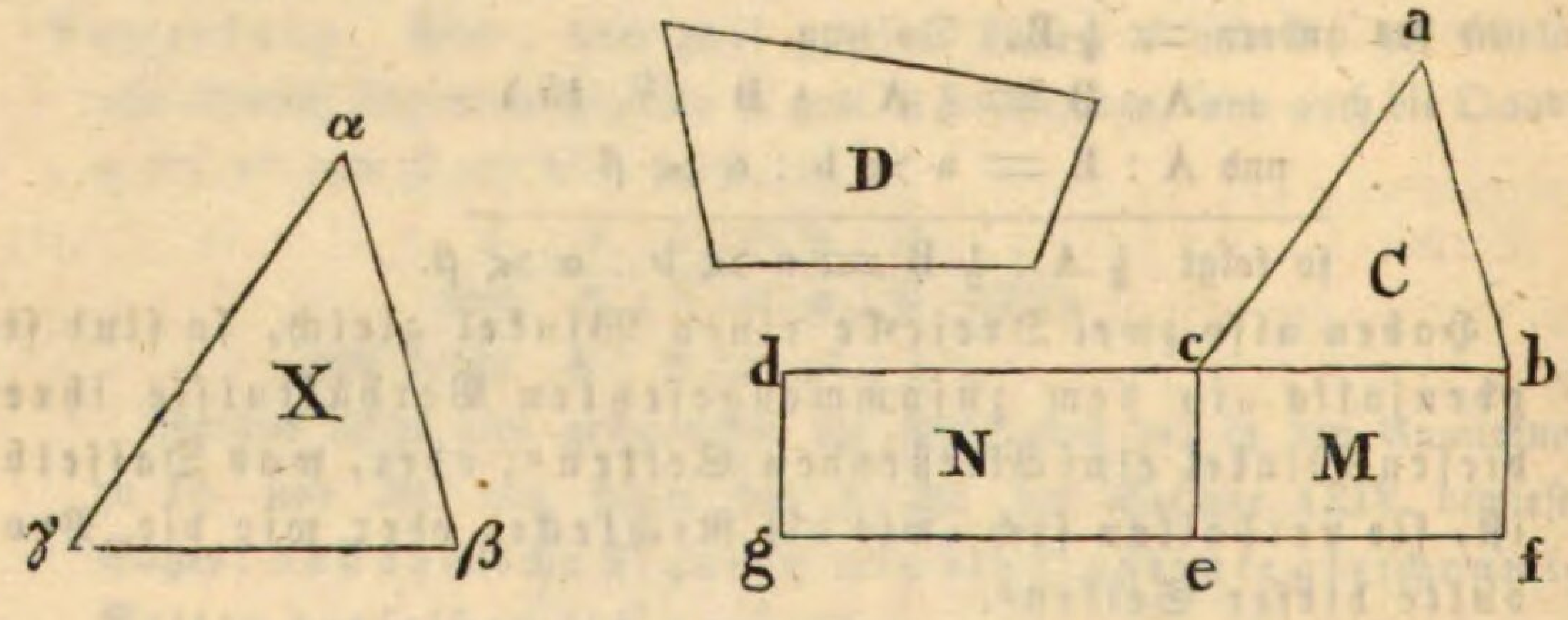
Folglich ist Prllgr. abcd ∾ Prllgr. eg
und aus gleichen Gründen ist auch

Prllgr. abcd ∾ Prllgr. hk

und daher auch Prllgr. eg ∾ Prllgr. hk. (21.)

VI. Satz 25. Aufgabe.

Es soll eine geradlinige Figur X beschrieben werden, welche der gegebenen Figur abc = C ähnlich, und der ebenfalls gegebenen D gleich ist.



Auflösung. Ueber bc beschreibe ein Parallelogramm M = abc (I. 44.), und an ce setze ein Parallelogramm N = D unter den Winkel ecd = ⌊ fbc (I. 45.): so sind bc und cd, und eben so auch fe und eg in gerader Linie; zwischen bc und cd suche die mittlere Proportionale $\beta\gamma$ (13.), und beschreibe über dieselbe eine, der abc = C ähnliche und ähnlich liegende Figur X (18.): so ist das Verlangte geschehen.

Beweis. Da bc : $\beta\gamma$ = $\beta\gamma$: cd (p. c.)
so ist bc : cd = C : X (20. Zus. 2.)
Nun ist aber bc : cd = M : N (1.)

folglich auch M : N = C : X. (V. 11.)

Nun ist $M = C$ (p. c)

also ist auch $N = X$ (V. 9.)

und da $N = D$ (p. c)

so ist $D = X$, und zugleich ist $X \sim C$.

Zusatz. Die Aufgabe, „zu zwei gegebenen Figuren C und D eine Dritte X von der Art zu finden, daß dieselbe ähnlich C und = D werde", läßt sich auch auf folgende Art lösen:

Man verwandele sowohl C als auch D in ein Quadrat (I. 45.) und (II. 14.), deren Seiten c und d seyn mögen; suche hierauf zu c, d und der Linie bc die vierte Proportionale $\beta\gamma$, und beschreibe über $\beta\gamma$ eine der C ähnliche Figur X, so daß $\beta\gamma$ der bc gleichnamig wird: so ist das Verlangte geschehen.

Beweis. Da $c : d = bc : \beta\gamma$

so ist auch $\square c : \square d = C : X$. (22.)

Da nun $\square c = C$ (p. c.)

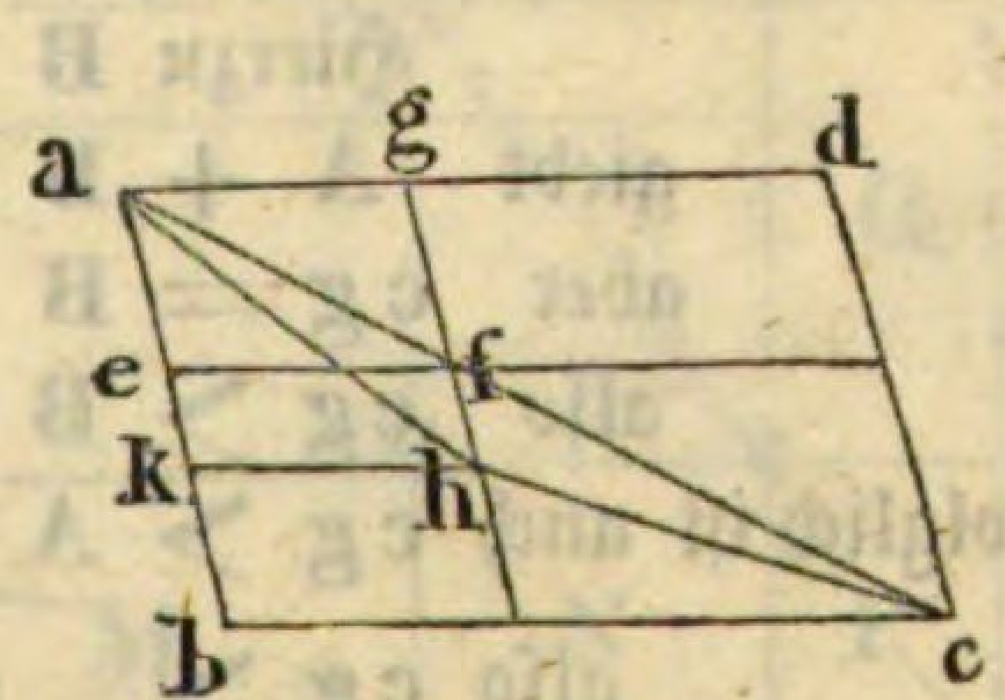
so ist auch $\square d = X$ (V. 11.)

und weil $\square d = D$ (p. c.)

so ist auch $D = X$.

VI. Satz 26. Lehrsatz.

Wird von einem Parallelogramm abcd ein demselben ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm aefg unter einem gemeinschaftlichen Winkel dab weggenommen: so liegt Dieses mit dem Ganzen um einerlei Diagonale.



Beweis. Wäre Dieses nicht der Fall: so ziehe, wenn es möglich ist, die Diagonale ahc des ganzen Parallelogramms durch einen von f verschiedenen Punkt h der gf; und es sey durch h die hk der ad parallel gezogen, so ist abcd $\sim$ akhg (24.) und daher

$$ad : ab = ag : ak.$$

Weil aber abcd $\sim$ aefg (p. h.)

so ist $ad : ab = ag : ae$

also $ag : ak = ag : ae$ (V. 11.)

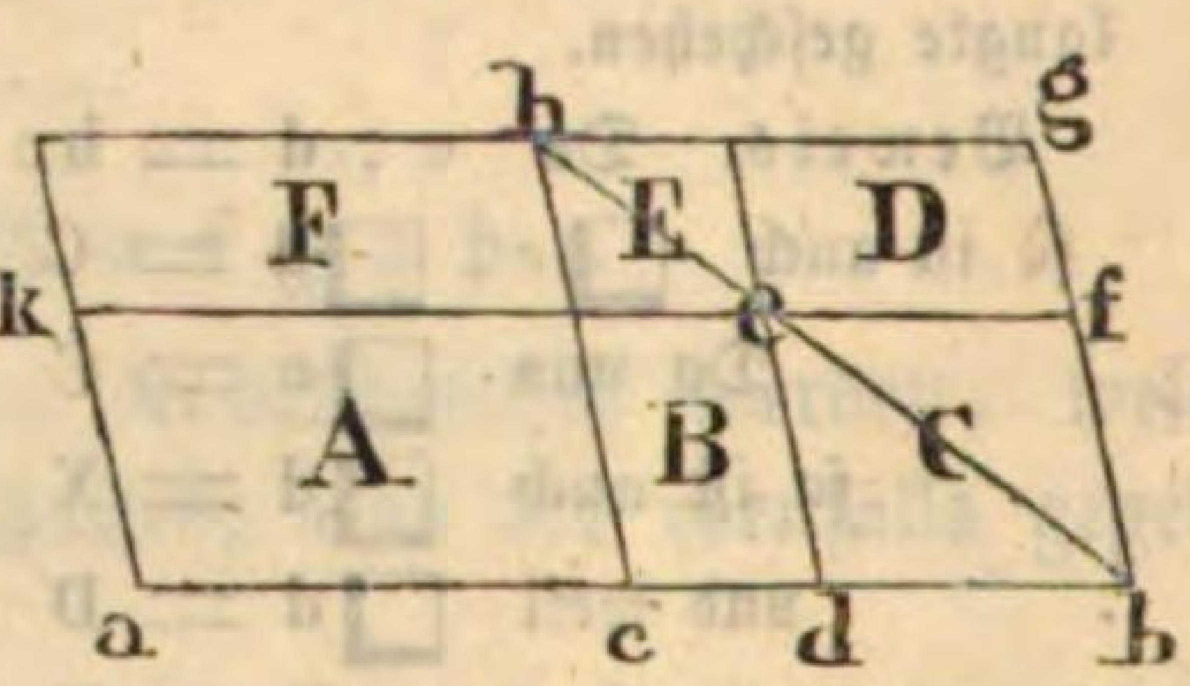
und daher $ak = ae$ (V. 9.)

was nach der Annahme nicht möglich ist. Folglich kann die Diagonale des ganzen Parallelogramms durch keinen von f verschiedenen Punkt gehen; sie geht also durch f, und es liegen daher abcd und aefg um einerlei Diagonale.

VI. Satz 27. Lehrsatz.

Unter allen an Einer Linie ab entworfenen Parallelogrammen, deren Ergänzungen (E. 6.) dem Parallelogramme auf der halben Linie ähnlich sind und ähnlich liegen, ist das seiner Ergänzung ähnliche Parallelogramm auf der halben Linie das größte.

Erster Fall. Es sey die Linie ab in c halbirt, und ein Abschnitt derselben $ad > ac$. Ueber ad sey das Parallelogramm ae beschrieben, dessen Ergänzung df dem Parallelogramme cg der halben Linie cb ähnlich sey und ähnlich liege: so wird behauptet, daß $ah > ae$.



Beweis. Da $df \sim cg$ und Beide ähnlich liegen, so liegen sie um dieselbe Diagonale bh; man ziehe diese Diagonale und vollende die Figur, so ist

$B = C$ (I. 43.)
$C = C$

also $B + C = C + D$.

Es ist aber $B + C = A$, weil $bc = ca$ (I. 36.)

folglich auch $A = C + D$.
Hierzu $B = B$

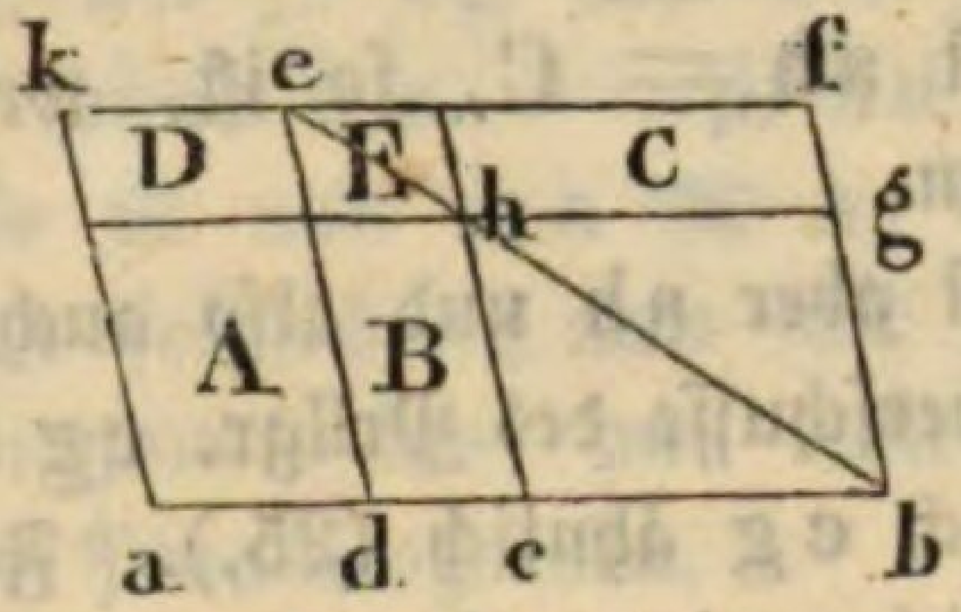
giebt $A + B = B + C + D$
aber $cg = B + C + D + E$
also $cg > B + C + D$

Folglich ist auch $cg > A + B$
also $cg > ae$
und da $cg = ah$ (I. 36.)

so ist auch $ah > ae$.

Zweiter Fall. Es sey wieder ab in c halbirt, aber ein Abschnitt $ad < ac$. Ueber ad sey das Parallelogramm ae beschrieben, dessen Ergänzung df dem Parallelogramme cg der halben Linie cb ähnlich sey und ähnlich liege: so wird behauptet, daß $ah > ae$.

Beweis. Da df ∾ cg, und Beide ähnlich liegen, so liegen sie um dieselbe Diagonale be; man ziehe die Diagonale und vollende die Figur: so ist, weil bc = ca



C = D + E (I. 36.)

also C > D.

Und da C = B (I. 43.)

so ist auch B > D

und A = A

also $\underbrace{A + B}_{ah} > \underbrace{A + D}_{ae}$.

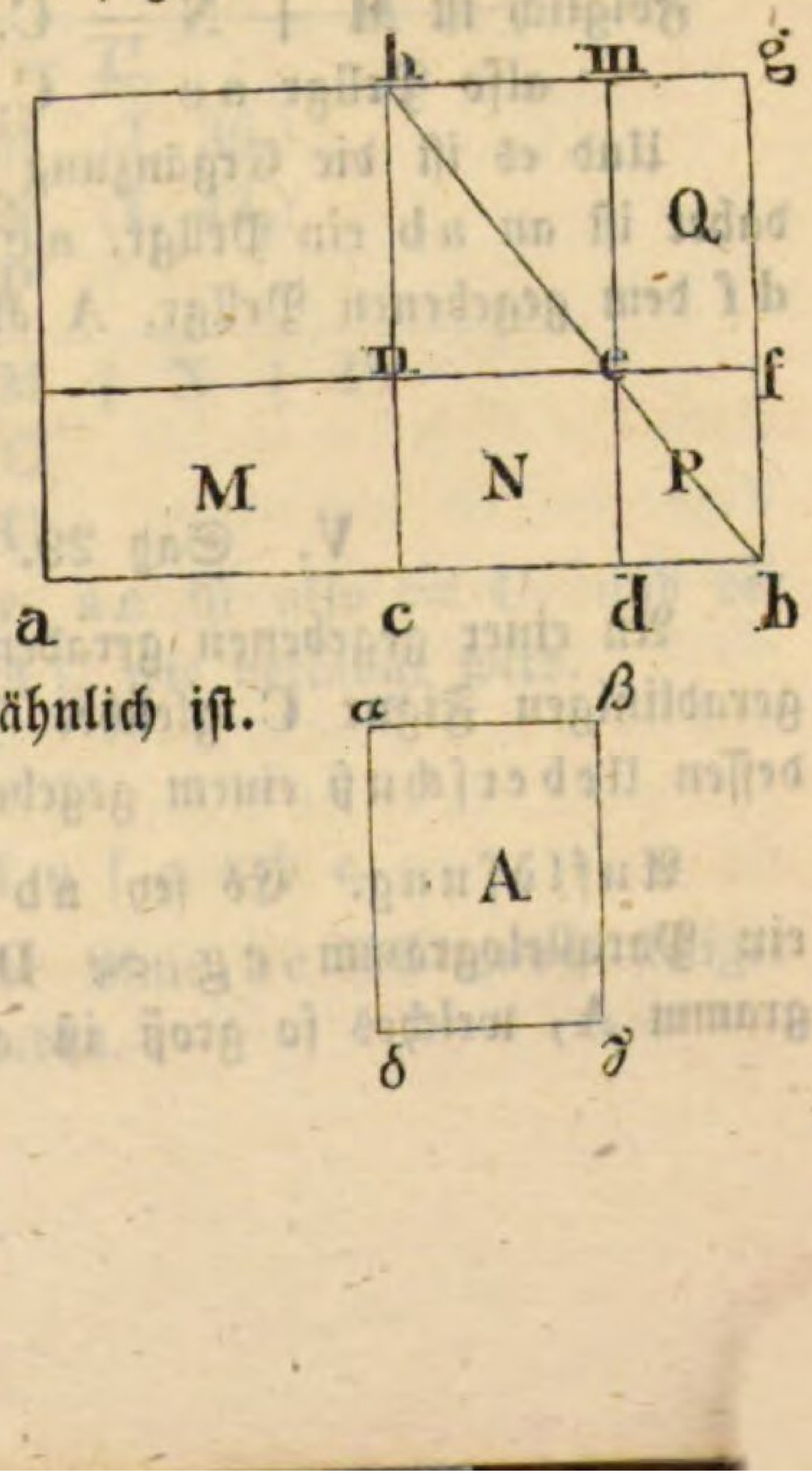
Zusatz. Durch diesen Lehrsatz wird bewiesen: daß, wenn man über einem Abschnitte ad einer geraden Linie ab (der entweder größer oder kleiner als die halbe Linie ist) ein Parallelogramm ae beschreibt, und ein der Ergänzung ähnliches ah über der halben Linie, Dieses immer größer als das zuerst beschriebene ist. Hieraus folgt:

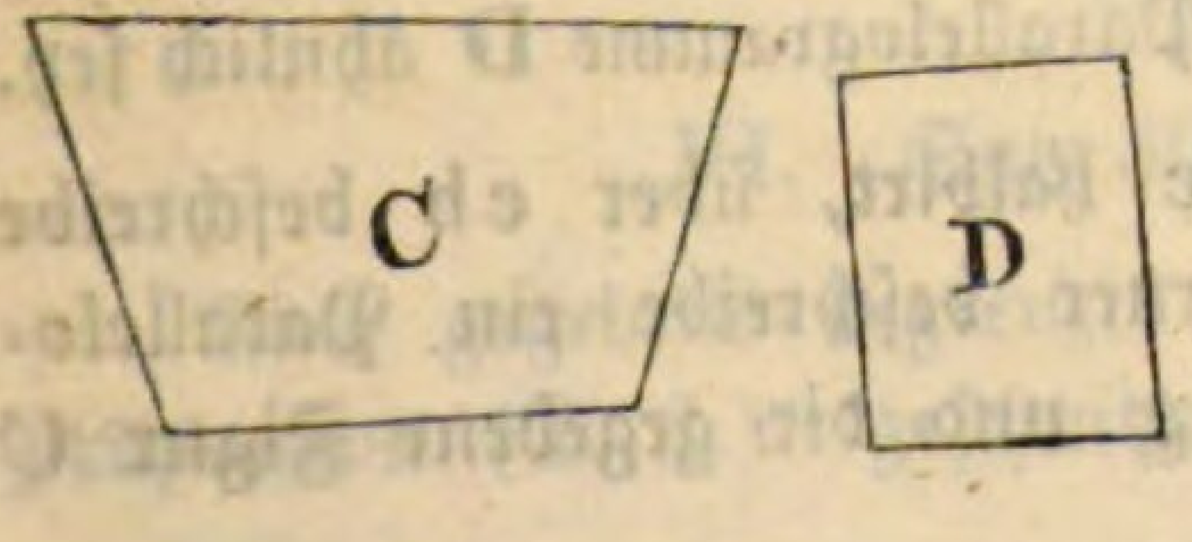
Wenn die Ergänzung der Art nach gegeben ist, und das an ab zu entwerfende Parallelogramm der Größe nach: so ist die Ausführung nur alsdann möglich, „wenn das der Größe nach gegebene Parallelogramm nicht größer ist, als das der Ergänzung ähnliche, welches über der halben Linie beschrieben werden kann".

Anmerkung. Die eigentliche Bedeutung dieses Lehrsatzes ist näher angegeben in der Beilage XXX.

VI. Satz 28. Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie ab soll ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm entworfen werden, dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramme D ähnlich sey. Jedoch darf die gegebene geradlinige Figur nicht größer seyn, als das Parallelogramm auf der halben Linie, dessen Ergänzung dem Parallelogramme D ähnlich ist.





Auflösung. Es sey ab in c halbirt; über cb beschreibe ein Parallelogramm cg $\backsim$ D, und vollende das Parallelogramm ah: so ist, nach der Voraussetzung, ah entweder der C gleich, oder größer als C.

Ist ah = C, so ist, weil auch cg $\backsim$ D, das Verlangte geschehen.

Ist aber ah und also auch cg $>$ C: so sey ein Prllgr. A dem Ueberschusse des Prllgr. cg über C gleich, und dem Prllgr. D, also auch cg ähnlich (25.). Ferner sey $\alpha\delta$ mit hc und $\alpha\beta$ mit hg gleichnamig; also $\alpha\beta : \alpha\delta$ = hg : hc.

Da nun cg = C + A, also cg $>$ A
so ist auch hc $> \alpha\delta$ und hg $> \alpha\beta$.

Man nehme hn = $\alpha\delta$ und hm = $\alpha\beta$, und vollende das Prllgr mn: so ist mn $\cong$ A
und da A $\backsim$ cg, auch mn $\backsim$ cg, und es liegen daher mn und gc um einerlei Diagonale. Ziehe diese Diagonale hb und vollende die Figur, so ist ae das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da cg = C + A (p. c.)
und mn = A
so ist cg — mn = C
also N + P + Q = C.
Es ist aber N + P = M, weil bc = ac
und Q = N (I. 43.)
also auch N + P + Q = M + N.
Folglich ist M + N = C.
also Prllgr ae = C.

Und es ist die Ergänzung df = P $\backsim$ cg $\backsim$ mn $\backsim$ A; daher ist an ab ein Prllgr. ae = C entworfen, dessen Ergänzung df dem gegebenen Prllgr. A ähnlich ist, wie verlangt wird.

V. Satz 29. Aufgabe.

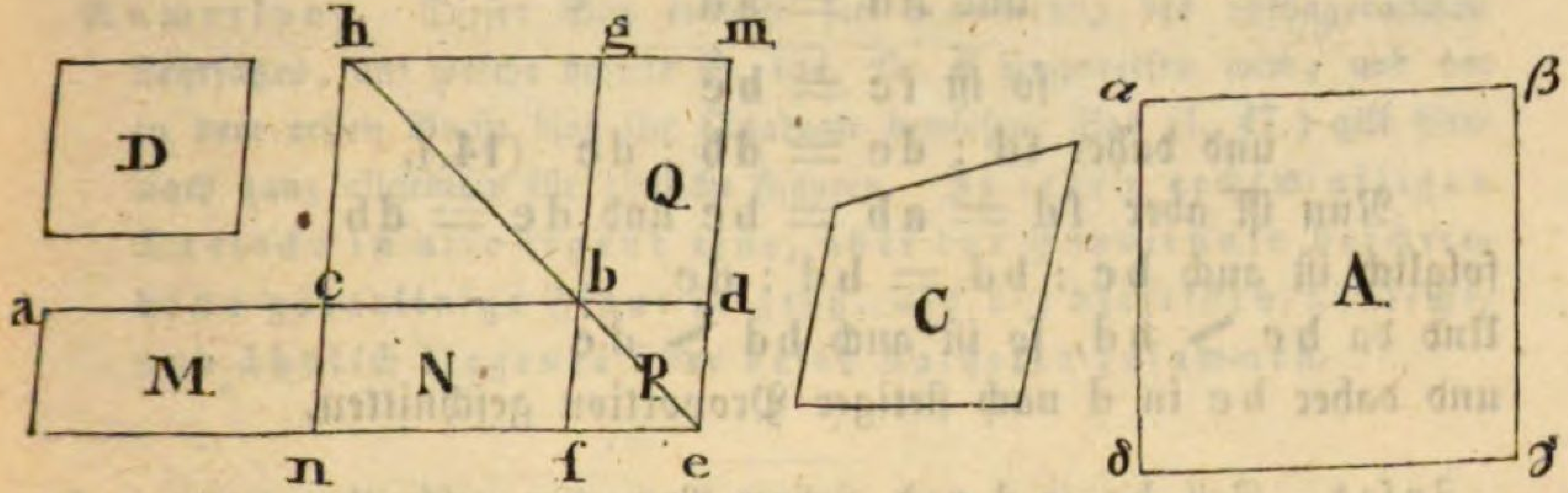
An einer gegebenen geraden Linie ab soll „ein der gegebenen geradlinigen Figur C gleiches Parallelogramm" entworfen werden, dessen Ueberschuß einem gegebenen Parallelogramme D ähnlich sey.

Auflösung. Es sey ab in c halbirt, über cb beschreibe ein Parallelogramm cg $\backsim$ D; ferner beschreibe ein Parallelogramm A, welches so groß ist als cg und die gegebene Figur C

zusammen (25.), und das D, und also auch cg ähnlich sey, und war so, daß

$$\alpha\beta : \alpha\delta = hg : hc.$$

Da nun A $>$ cg, so ist auch $\alpha\beta > hg$ und $\alpha\delta > hc$; man verlängere daher hg und hc, nehme $hm = \alpha\beta$, $hn = \alpha\delta$ und vollende das Prllgr. hmen: so ist nun mn $\cong$ A, und da A $\sim$ cg, so ist auch mn $\sim$ cg; folglich ist mn mit cg um einerlei Diagonale. Ziehe diese Diagonale he, und vollende die Figur, so ist nun ae das verlangte Parallelogramm.



Beweis. Da A = cg + C (p. c.)
und mn = A

so ist auch mn = cg + C
Es ist aber mn = cg + N + P + Q

folglich ist cg + N + P + Q = cg + C

also N + P + Q = C.
Da ac = cb, so ist N = M (I. 36.)
und Q = N (I. 43.)
P = P

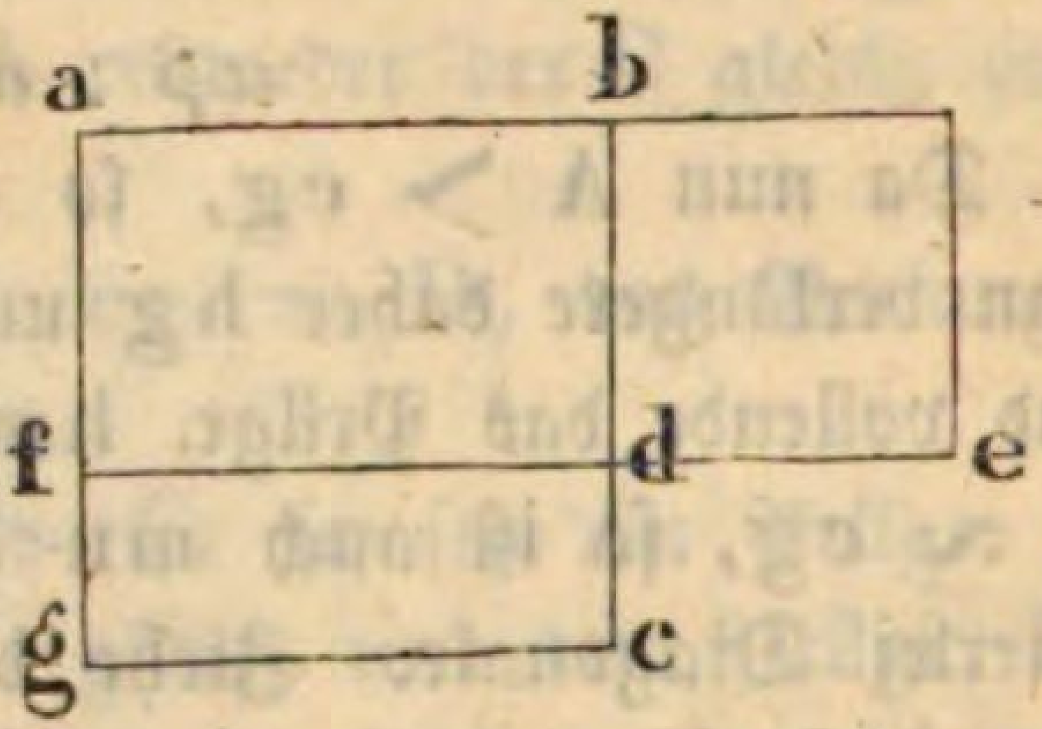
also N + P + Q = M + N + P.
Daher ist auch M + N + P = C
also Prllgr. ae = C.

Das an ab entworfene Prllgr. ae ist also = C, und der Ueberschuß P desselben ist $\sim$ D (24.), wie verlangt wird.

VI. Satz 30. Aufgabe.

Eine gegebene begrenzte gerade Linie bc soll „nach stetiger Proportion (E. 3.)“ geschnitten werden.

Auflösung. Beschreibt man über bc das Quadrat ac, und entwirft an der Seite ab desselben ein diesem Quadrat gleiches Parallelogramm ae, dessen Ueberschuß be dem Quadrate ac ähnlich ist (29.): so wird hierdurch bc in d nach stetiger Proportion geschnitten.



Beweis. Da ac ein Quadrat ist, so ist auch be ein Quadrat;

und da ac = ae (p. c)

und ad = ad

so ist fc = be

und daher fd : de = db : dc (14.).

Nun ist aber fd = ab = bc und de = db

folglich ist auch bc : bd = bd : dc

Und da bc > bd, so ist auch bd > dc

und daher bc in d nach stetiger Proportion geschnitten.

Zusatz. Soll bc in d nach stetiger Proportion geschnitten werden, so muß seyn

bc : bd = bd : dc

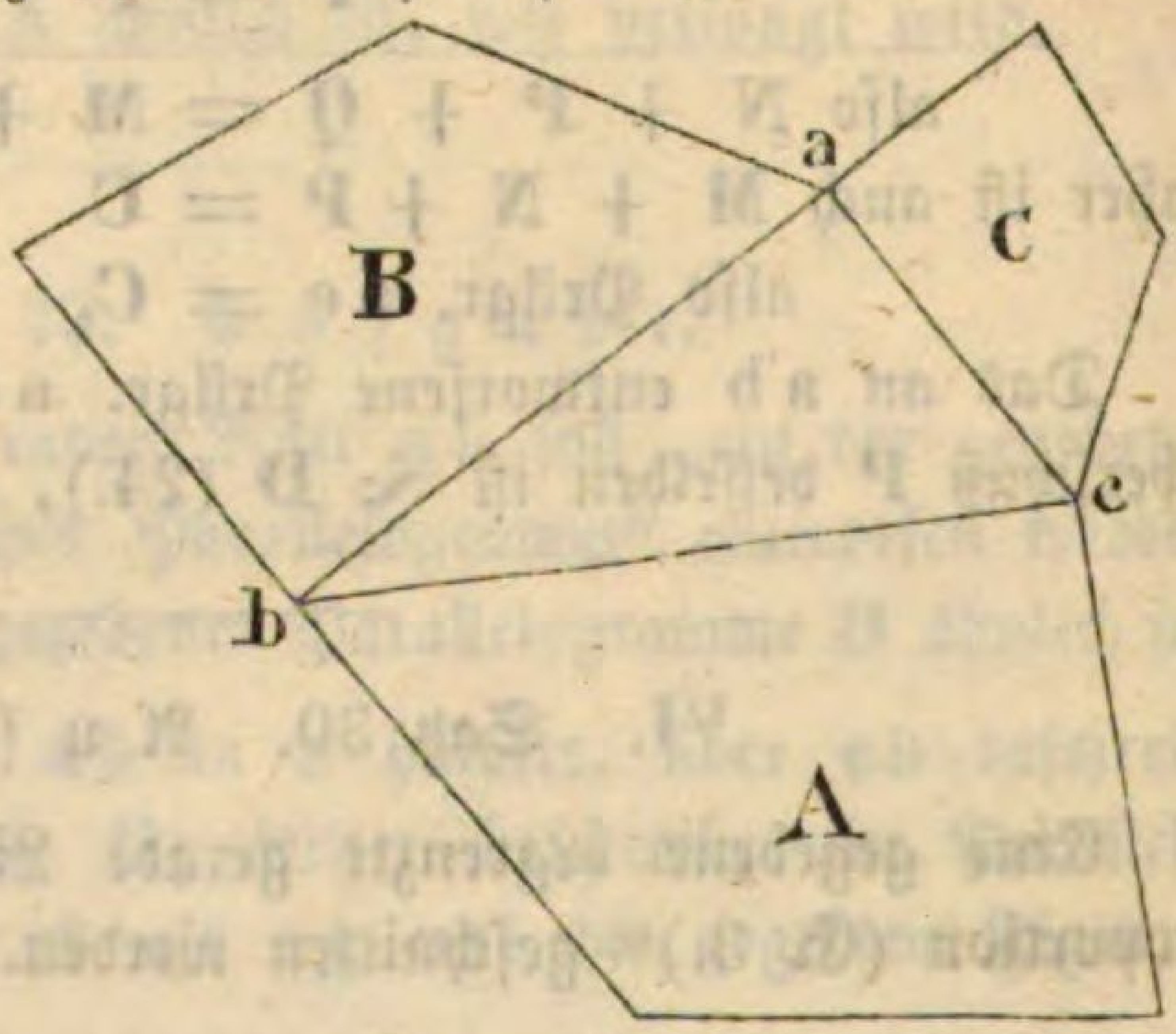
und daher bd × bd = bc × cd (17.)

also □bd = bc × cd

Es muß also bc in d so geschnitten werden, daß das Quadrat des einen Theils bd, „dem Rechteck aus dem anderen Theile, und der ganzen Linie gleich" werde; und Dieses ist die Aufgabe Satz 11. des zweiten Buches. Daher kann die Aufgabe, „eine begrenzte gerade Linie nach stetiger Proportion zu schneiden" auch nach der Anleitung (II. 11.) gelös't werden.

VI. Satz 31. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Dreieck abc ist „die Figur auf der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite bc" den ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf den diesen Winkel einschließenden Seiten ab, ac, zusammen gleich.



Beweis. Es ist

$$ba : bc = ba : bc$$
$$\text{und } ca : bc = ca : bc$$

daher auch, wenn über die Linien ba, ca und bc Quadrate beschrieben werden, weil $A \sim B$ und $A \sim C$

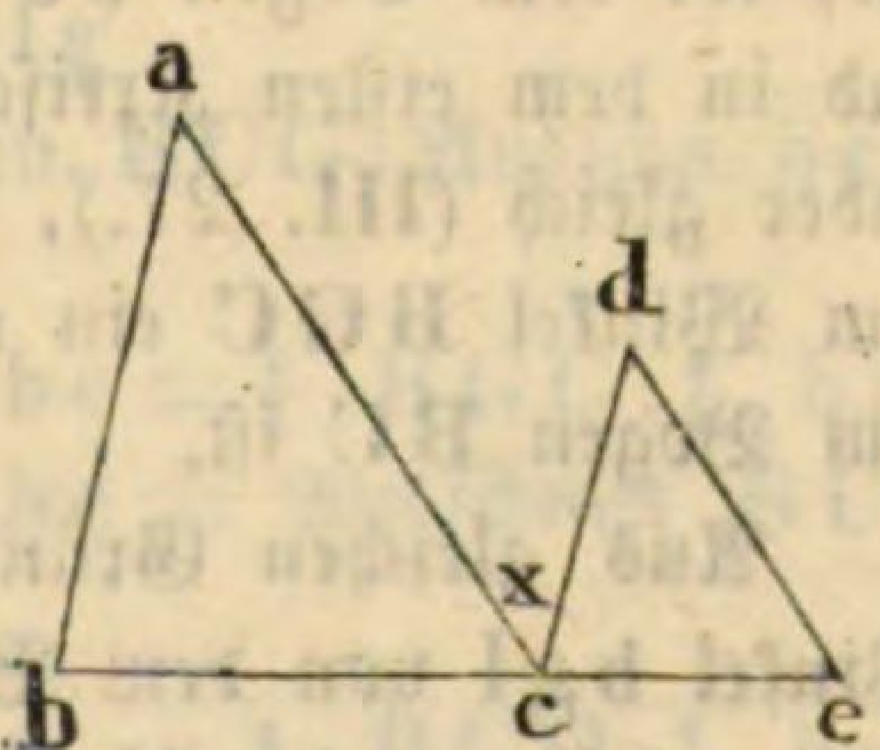
$$\square ba : \square bc = B : A \quad (22.)$$
$$\text{und } \square ca : \square bc = C : A$$

$$\text{Daher } \square ba + \square ca : \square bc = B + C : A \quad (V.\ 24.)$$
$$\text{Nun ist } \square ba + \square ca = \square bc \quad (I.\ 47.)$$
$$\text{also ist auch } B + C = A.$$

Anmerkung. Dieser Satz enthält die Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes, auf welche bereits S. 154. Nr. 8 hingewiesen wird; und der in dem ersten Buche bloß für Quadrate bewiesene Satz (I. 47.) gilt hiernach ganz allgemein für ähnliche Figuren. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist also irgend eine, über der Hypotenuse beschriebene geradlinige Figur so groß, als die derselben ähnliche, und ähnlich liegende über beide Katheten zusammen.

VI. Satz 32. Lehrsatz.

Können zwei Dreiecke abc und cde, in welchen zwei Seiten ab, ac mit zweien Seiten dc, de proportionirt sind, mit einem Winkel c so an einander gesetzt werden, daß die gleichnamigen Seiten ab, dc und ac, de parallel sind: so sind die übrigen Seiten bc, ce, in gerader Linie.



Beweis. Da ab und dc parallel sind, so ist $\angle a = \angle x$ (I.29.) und weil ac parallel de, so ist auch

$$\angle x = \angle d$$

$$\text{also ist } \angle a = \angle d.$$

Es ist aber auch

$$ab : ac = dc : de \quad (p.\ h.)$$

$$\text{folglich ist } \Delta abc \sim \Delta dce \quad (6.)$$
$$\text{und daher } \angle b = \angle dce.$$
$$\text{Da nun } \angle a = \angle x$$
$$\text{und } \angle acb = \angle acb$$

$$\text{so folgt } \angle b + \angle a + \angle acb = \angle dce + \angle x + \angle acb.$$

Nun ist $\angle b + \angle a + \angle acb = 2R$ (I. 32.)

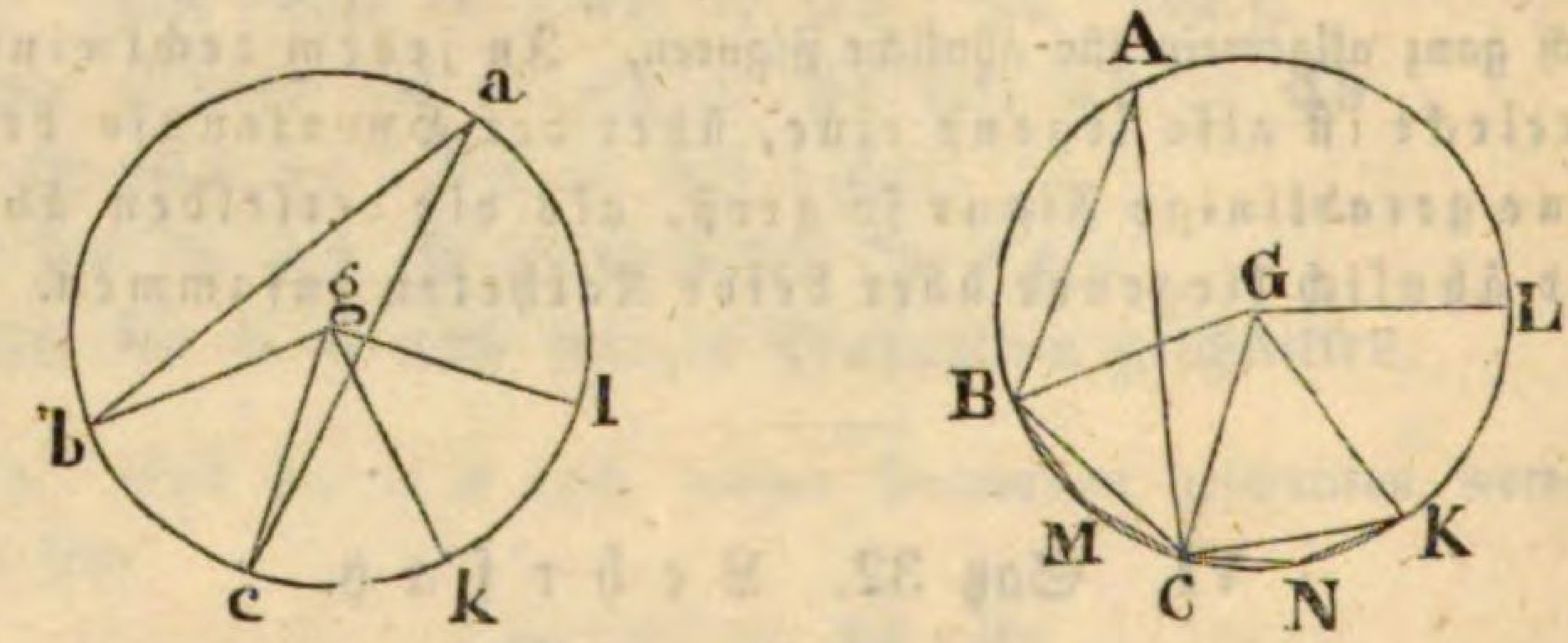
also auch $\underbrace{\angle dce + \angle x} + \angle acb = 2R$

oder $\angle ace + \angle acb = 2R.$

Folglich ist bc mit ce in gerader Linie (I. 14.)

VI. Satz 33. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen ABC, abc, verhalten sich sowohl die Winkel am Mittelpunkte BGC, bgc, als auch die Winkel am Umkreise BAC, bac, so wie auch die Kreisausschnitte BCG, bcg, „wie die Kreisbogen BC und bc, worauf sie stehen".



Beweis. Erster Theil. Nimm eine beliebige Anzahl an einander hängender Kreisbogen CK, KL dem Bogen BC, und ck, kl dem Bogen bc gleich; und ziehe GK, GL, gk, gl: so sind in dem ersten Kreise die Winkel BGC, CGK, KGL einander gleich (III. 27.), und es ist daher der Winkel BGL von dem Winkel BGC ein eben so Vielfaches, als der Bogen BL von dem Bogen BC ist.

Aus gleichen Gründen ist auch, in dem zweiten Kreise, der Winkel bgl von dem Winkel bgc ein eben so Vielfaches, als der Bogen bl von bc ist.

Nun ist, wenn Bogen BL $\gtrless$ Bogen bl

auch $\angle BGL \gtrless \angle bgl$

Folglich ist

Bogen BC : Bogen bc $= \angle BGC : \angle bgc$ (V. E. 5.)

Da nun $\angle BGC = 2 . \angle BAC$ (III. 20.)

und $\angle bgc = 2 . \angle bac$ „

und daher $\angle BGC : \angle bgc = \angle BAC : \angle bac$ (V. 15.)

so ist auch Bogen BC : Bogen bc $= \angle BAC : \angle bac$ „

Zweiter Theil. Ziehe in dem ersten Kreise die geraden Linien BC, CK, und die Winkel in den Kreisabschnitten BMC und CNK.

Da die Halbmesser gleich sind, und bei G gleiche Winkel einschließen: so ist $\triangle BGC = \triangle CGK$

und daher $BC = CK$.

Da die Bogen BC und CK gleich sind (p. h.)
so sind auch die Reste des Umkreises gleich; und es ist daher

$\angle BMC = \angle CNK$ (III. 27.)

Folglich sind die Abschnitte BMC und CNK ähnlich.

Da nun $BC = CK$

so ist Abschnitt BMC = Abschnitt CNK

aber auch $\triangle BGC = \triangle CGK$

folglich ist Ausschnitt BCG = Ausschnitt CKG.

Aus gleichen Gründen ist auch der Kreisausschnitt KLG jedem der beiden Ausschnitte BCG, CKG gleich; diese Kreisausschnitte sind also alle drei gleich.

Eben so wird bewiesen, „daß die drei Ausschnitte bcg, ckg, klg einander gleich sind".

Hiernach ist der Ausschnitt BLG von dem Ausschnitte BCG ein eben so Vielfaches, als der Bogen BL von dem Bogen BC; und der Ausschnitt blg von dem Ausschnitte bcg ein eben so Vielfaches, als der Bogen bl von bc.

Nun ist, wenn $BL \gtreqless bl$

auch Ausschnitt $BLG \gtreqless$ Ausschnitt blg

folglich ist Bogen BC : Bogen bc = Ausschn. BCG : Ausschn. bcg.

Zusatz. Es ist

nach dem 1sten Theile Bogen BC : Bogen bc = $\angle BGC : \angle bgc$

„ „ 2ten „ Bogen BC : Bogen bc = Ausschnitt BCG : Ausschnitt bcg

daher auch Ausschn. BCG : Ausschn. bcg = $\angle BGC : \angle bgc$.

In gleichen Kreisen verhalten sich also die Kreisausschnitte, wie ihre Winkel.

Anmerkung. Des Kreises Umfang wird in 360 gleiche Theile getheilt, die man Grade (°) nennt; und es wird ferner jeder Grad in 60 Minuten ('), und jede Minute in 60 Secunden ('') getheilt. Da nun in gleichen Kreisen, und also auch in Einem und demselben Kreise, Centriwinkel wie die Bogen sich verhalten, auf welchen sie stehen: so folgt, daß die Winkel sich auch verhalten wie die Anzahl der Grade, welche die dazu gehörigen Bogen halten.

Wird daher der Radius des Kreises als ein für allemal gegeben angenommen, so kann die Größe eines Winkels überhaupt durch die Größe des Bogens ausgedrückt werden, auf welchem er steht; und da diese Größe durch die Anzahl der Grade, Minuten und Secunden, welche er faßt, bestimmt ist: so folgt, daß die Größe eines Winkels sich auch unmittelbar dadurch bestimmen läßt, daß man angiebt, wieviel Grade, Minuten und Secunden der dazu gehörige Bogen hält. Hiernach ist z. B. ein Winkel von 60 Grad $= 60^\circ$ der Winkel, welcher als Centriwinkel auf einem Bogen von 60° steht. Ein Winkel von 43 Grad 18 Minuten 36 Secunden $= 43^\circ\ 18'\ 36''$ ist der, welcher als Centriwinkel auf einem Bogen von $43^\circ\ 18'\ 36''$ steht ꝛc.

Alle Winkel um einen Punkt sind zusammen $= 4\,R^\circ$. Da nun diese zusammen auf dem ganzen Kreisumfange stehen, welcher 360° hält: so folgt: daß

$$4\,R^\circ = 360^\circ$$

und es ist daher $R^\circ = 90^\circ$

Der rechte Winkel hält also 90°.

Die drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen $= 2\,R^\circ$; sie halten also $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Da ferner der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks $= \frac{2}{3}\,R^\circ$ ist, so hält derselbe $\frac{2}{3} \cdot R^\circ = 60^\circ$.

Ferner sind die Winkel eines Fünfecks zusammen $= 3 \times 2\,R^\circ$; diese halten folglich $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ ꝛc.

Beilagen zu dem sechsten Buche.

XXVII. Uebersicht des sechsten Buches der Elemente

Nachdem in den vorhergehenden Büchern „die Bedingungen der Congruenz, so wie die der Gleichheit, und die davon abhängenden Eigenschaften der Figuren" ermittelt sind, bleibt nur noch übrig, die Bedingungen der Aehnlichkeit zu ermitteln, und die davon abhängenden Eigenschaften der Figuren anzugeben"; und Dieses ist der Gegenstand des sechsten Buches.

Figuren sind ähnlich, wenn sie gleiche Form haben; und es ist die nähere Bestimmung dieses Begriffes bereits in den Erläuterungen zu den Erklärungen des sechsten Buches Seite 492. gegeben. Die erste Bedingung der Aehnlichkeit zweier Figuren ist die Proportionalität der Seiten; und daher beziehen sich auch alle von der Aehnlichkeit abhängenden Eigenschaften der Figuren ebenfalls auf die Pro-

portion; und es betreffen dieselben, aus diesem Grunde, das Verhalten der Figuren zu einander, unter gegebenen Bedingungen.

Die Raumgrößen, welche in den ersten Büchern der Elemente näher betrachtet werden, sind gerade Linien, Dreiecke, Parallelogramme, geradlinige Figuren überhaupt und der Kreis; und obgleich alle diese Größen mit Rücksicht auf die Proportionalität in dem sechsten Buche in Betracht gezogen werden müssen, so sind doch einige wenige Sätze hinreichend, um die, allen diesen Größen in dieser Beziehung zukommenden Grundeigenschaften zu erörtern.

Die hier zu beantwortenden Fragen sind:

1) Unter welchen Bedingungen sind Dreiecke ähnlich?

2) Welche Eigenschaften kommen ähnlichen Parallelogrammen zu?

3) Unter welchen Umständen findet eine Proportion zwischen geraden Linien statt? und

4) Wie verhalten die verschiedenen Figuren unter gegebenen Bedingungen sich zu einander?

Der erste Satz, welcher die Grundlage für die Beantwortung aller dieser Fragen bildet, ist: Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien zu einander.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke.

Zwei Dreiecke sind ähnlich:

1) Wenn sie gleiche Winkel haben; Satz 4.

2) Wenn sie proportionirte Seiten haben; Satz 5.

3) Wenn sie Einen Winkel gleich haben, und die diesen Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind, Satz 6.; und es hängt hiervon zugleich die in dem 32sten Satze angegebene Eigenschaft der Dreiecke ab; und

4) sie sind ähnlich: wenn sie den ersten Winkel gleich haben, die den zweiten Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind, und der dritte Winkel in beiden Dreiecken zugleich kleiner, oder zugleich nicht kleiner, als ein rechter ist; Satz 7.

Sätze von der Proportionalität der Linien.

Bei diesen Sätzen kömmt es darauf an: nachzuweisen, wo und unter welchen Bedingungen zunächst proportionirte Linien vorkommen, und ihre Abhängigkeit von einander näher zu bestimmen. Zur Beantwortung der ersten dieser Fragen werden drei Fälle angegeben,

bei welchen proportionirte Linien in einem Dreiecke erhalten werden können. Diese sind:

1) Zieht man in einem Dreieck eine Linie parallel der Grundlinie, so werden die beiden übrigen Seiten desselben proportionirt geschnitten, und umgekehrt; Satz 2.

2) Halbirt man einen Winkel eines Dreiecks, so wird die Grundlinie desselben durch die Halbirungslinie den beiden übrigen Seiten proportionirt geschnitten, und umgekehrt; Satz 3.

3) Fället man von dem Scheitel eines rechten Winkels eine Normale auf die Hypotenuse, so ist diese Normale die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse; und jede Kathete ist die mittlere Proportionale zwischen dem an ihr anliegenden Abschnitte der Hypotenuse und dieser ganzen Linie; Satz 8.

Durch den ersten dieser Sätze läßt sich erkennen: wie es möglich ist, zwei gerade Linien nach demselben Verhältnisse zu schneiden. Der zweite Satz enthält einen besondern Fall, wo eine gerade Linie nach demselben Verhältniß getheilt wird, welches zwei gegebene gerade Linien zu einander haben; und durch den dritten Satz ergiebt sich, „wie es möglich ist, daß drei gerade Linien die in stetiger Proportion sind, gefunden werden können".

Diese drei Sätze bilden daher die Grundlage bei der Auflösung aller Aufgaben, die auf Proportion der Linien sich beziehen.

Die Abhängigkeit proportionirter Linien von einander wird durch die Sätze näher bestimmt, „daß, wenn vier gerade Linien proportionirt sind, das Rechteck der beiden äußeren dem der beiden mittleren gleich seyn muß, und umgekehrt" Satz 16.; und „daß von drei geraden Linien, die in stetiger Proportion sind, das Rechteck der äußeren dem Quadrat der mittleren gleich ist, und umgekehrt"; Satz 17.

Durch diese Sätze ergiebt sich zugleich: daß die Grundeigenschaften der proportionirten Zahlengrößen, wonach das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren gleich ist, und umgekehrt, auch bei proportionirten Linien angetroffen wird.

Die Eigenschaften ähnlicher Parallelogramme.

Parallelogramme sind ähnlich: wenn sie so in einander gelegt werden können, daß zu gleicher Zeit zwei neben einander liegende Seiten des einen mit zwei neben einander liegenden Seiten des anderen, und die eine Diagonale des einen mit der einen Diagonale des andern zusammen fallen; Satz 24.

und es gilt dieser Satz auch umgekehrt; sind nämlich zwei Parallelo- ramme ähnlich, und man legt das eine so in das andere, daß beide gleichliegend einen Winkel gemein haben: so fällt die eine Diagonale des einen mit der einen Diagonale des anderen zusammen. Satz 26. Zu diesen beiden Sätzen von den Eigenschaften ähnlicher Parallelogramme kömmt noch der wichtige Lehrsatz: Wird an einer geraden Linie ein Parallelogramm entworfen, und über der halben Linie ein der Ergänzung desselben ähnliches: so ist dieses letztere immer größer, als das zuerst entworfene, wenn es diesem nicht gleich ist; Satz 27.

Das Verhalten der Figuren zu einander.

Das Verhalten der Figuren zu einander wird durch folgende Sätze bestimmt:

1) Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien; Satz 1.

2) Parallelogramme oder Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, sind gleich groß: wenn die diesen Winkel einschließenden Seiten wiederkehrend proportionirt sind, so daß die um diesen Winkel liegenden Seiten der einen Figur die mittleren und die der anderen die äußeren Glieder einer Proportion sind; und es gelten diese Sätze auch umgekehrt Satz 14. und 15.

3) Haben Parallelogramme oder Drejecke Einen Winkel gleich, so sind sie im zusammengesetzten Verhältnisse der diesen Winkel einschließenden Seiten; sie verhalten sich also (arithmetisch ausgedrückt) wie die Produkte der um diesen Winkel liegenden Seiten; Satz 23.

Durch diese Sätze ist das Verhalten der Dreiecke oder Parallelogramme zu einander bestimmt, wenn sie entweder gleiche Höhe, oder einen Winkel gleich haben. Durch die folgenden Sätze wird nun das Verhalten ähnlicher Figuren zu einander näher angegeben.

Aehnliche Dreiecke sind im zweifachen Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten, sie verhalten sich also wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, Satz 19.; und es folgt hieraus unmittelbar:
daß ähnliche geradlinige Figuren überhaupt „wie die Quadrate gleichnamiger Seiten derselben" sich verhalten; Satz 20. Hieraus folgt nun ferner:
daß, wenn vier gerade Linien proportionirt sind, auch die über diese Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren (von welchen die über der ersten und zweiten Linie beschriebenen, und eben

so die über der dritten und vierten Linie beschriebenen Figuren ähnlich sind) ebenfalls proportionirt seyn müssen, und umgekehrt; Satz 22.

Endlich wird noch bewiesen: daß,

wenn zwei Figuren einer Dritten ähnlich sind, sie auch unter sich ähnlich sind, Satz 21.; und:

daß, wenn über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche und ähnlich liegende Figuren beschrieben werden, die Figur über der Hypotenuse den beiden über den Katheten Beschriebenen zusammen genommen gleich ist; Satz 31.

Das Verhalten der Winkel und Kreisbogen, so wie der Kreisabschnitte in gleichen Kreisen zu einander, wird endlich noch in dem 33sten Satze angegeben.

Dieses nun sind die sämmtlichen Lehrsätze des sechsten Buches; von welchen

5 die Bedingungen angeben, unter welchen Dreiecke ähnlich sind (4.), (5.), (6.), (7.), (32.)

5 betreffen die Proportionalität der Linien, und die Eigenschaften derselben (2.), (3.), (8.), (16.), (17.)

3 enthalten die Grundeigenschaften ähnlicher Parallelogramme (24.), (26.), und (27.)

4 das Verhalten der Dreiecke oder Parallelogramme zu einander, wenn sie gleiche Höhe oder einen gleichen Winkel haben (1.), (14.) (15.), (23.)

5 das Verhalten ähnlicher Figuren zu einander (19.), (20.), (21.), (22.), (31.)

1 Lehrsatz endlich betrifft die Proportion im Kreise (33.); und es ist das Uebrige, was noch von dem Verhalten der Kreise zu einander angegeben werden muß, in den ersten Sätzen des 12ten Buches, wo zuerst hiervon Gebrauch gemacht wird, aufgenommen. Das Nähere hierüber enthält die folgende Beilage **XXVIII.**

Außer diesen 23 Lehrsätzen kommen in dem sechsten Buche noch 10 Aufgaben vor; von welchen 5 die Proportion der Linien, und die übrigen 5 die Construction ähnlicher Figuren betreffen.

Aufgaben von der Proportion der Linien.

Hier wird gelehrt:

1) Von einer gegebenen begrenzten geraden Linie einen verlangten Theil abzuschneiden; Satz 9.

2) Eine gegebene begrenzte gerade Linie nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen; Satz 10.

3) Zu zwei gegebenen geraden Linien die dritte, Satz 11.; und

4) Zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden; Satz 12.

5) Zwischen zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie aufzufinden; Satz 13.

Aufgaben von der Construction ähnlicher Figuren.

Diese Aufgaben lehren zunächst „eine Figur von einer bestimmten Form zu beschreiben", also eine Figur zu beschreiben, die einer gegebenen ähnlich ist.

1) Wenn eine Seite der zu beschreibenden Figur gegeben ist, Satz 18.; und

2) wenn sie der Größe nach gegeben ist; also eine Figur zu beschreiben, die einer gegebenen ersten Figur ähnlich, und einer zweiten ebenfalls gegebenen gleich ist, Satz 25.

Diesen beiden Elementaraufgaben „von der Construction ähnlicher Figuren" schließen sich noch die zusammengesetzten Aufgaben an: an einer gegebenen begrenzten geraden Linie „ein Parallelogramm von gegebener Größe" zu entwerfen;

3) dessen Ergänzung, Satz 28.; und

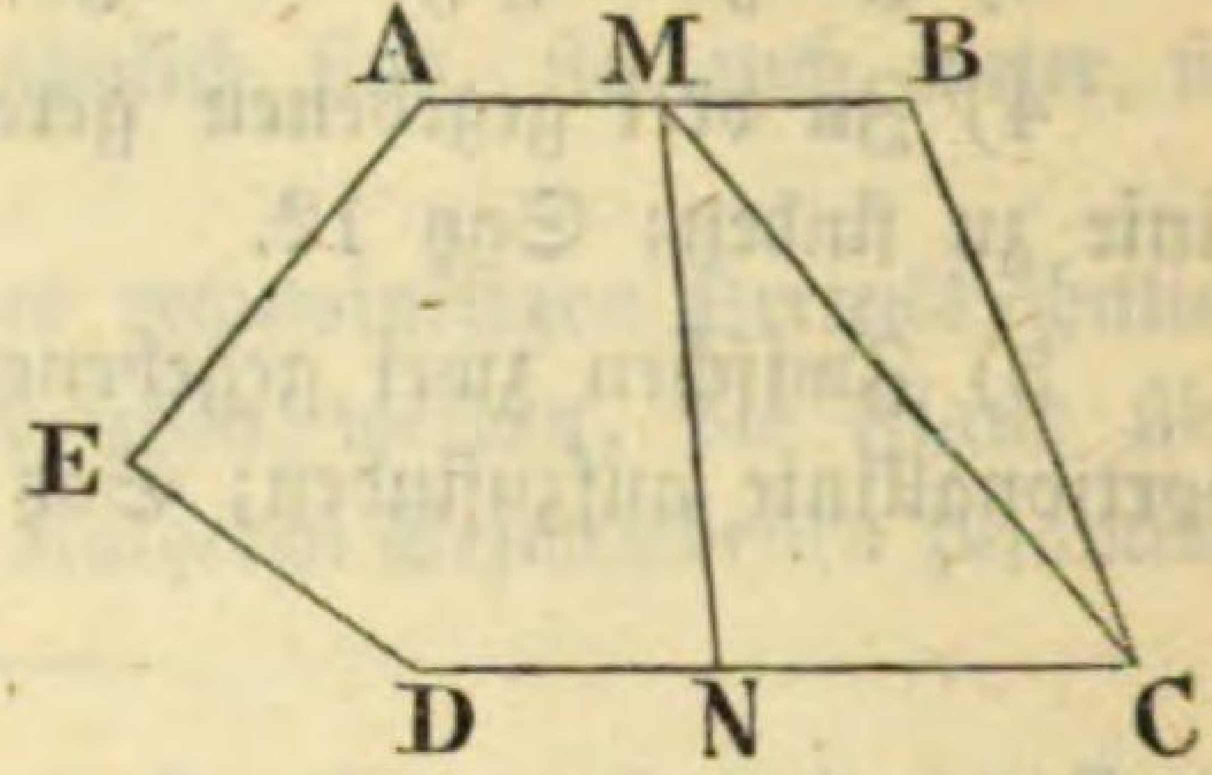
4) dessen Ueberschuß, Satz 29.;

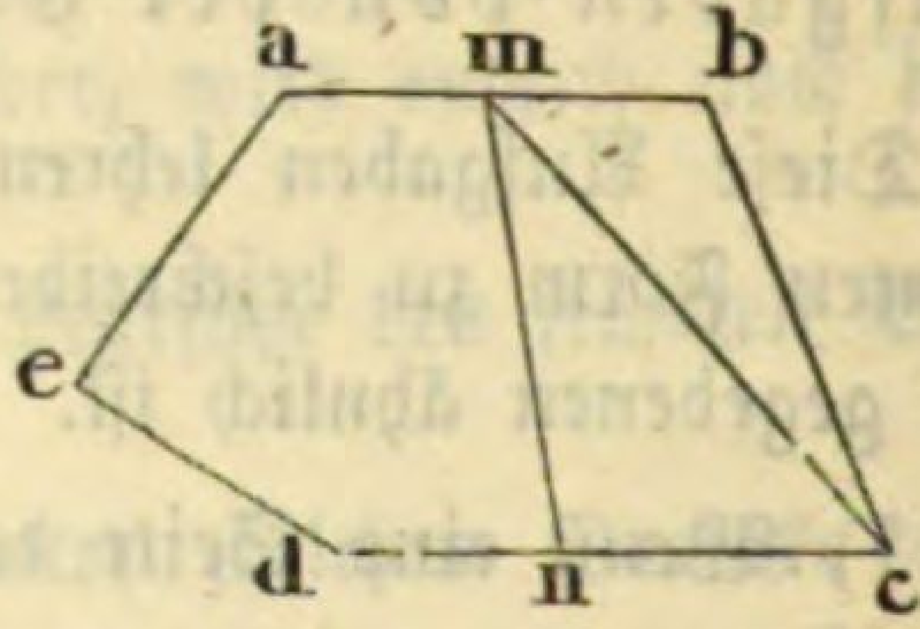
einem der Form nach gegebenen Parallelogramme ähnlich ist; und es wird von der letzteren dieser Aufgaben sogleich dadurch eine Anwendung gemacht, daß gezeigt wird, „wie mit Hülfe derselben eine gegebene begrenzte gerade Linie nach stetiger Proportion geschnitten werden kann"; Satz 30.

Alle diese Aufgaben sind unter einer so allgemeinen Form gelös't, daß sie, als Hülfsmittel der Construction, bei den meisten vorkommenden schwierigen geometrischen Aufgaben benutzt werden können. Das Nähere über die Bedeutung dieser Aufgaben enthalten die Beilagen **XXIX.** und **XXX.**

XXVIII. Von dem Verhalten der Kreise zu einander.

1) Erklärung. Werden in zwei ähnlichen Figuren **ABCDE** und **abcde** die geraden Linien **MN** und **mn** so gezogen, daß durch dieselben die gleichnamigen Seiten **AB**, **ab** in **M** und **m** proportionirt und unter demselben Winkel geschnitten werden, so sind **MN** und **mn** ähnlich liegende Linien dieser Figuren.





Es ist also **MN** der **mn** ähnlich liegend, wenn **AB** gleichnamig **ab**, $\angle BMN = \angle bmn$ ist, und die Proportion statt findet

$$AM : am = BM : bm.$$

2) Lehrsatz. Sind **MN** und **mn** von **M** und **m** aus gezogene, ähnlich liegende Linien, der ähnlichen Figuren **ABCDE** und **abcde**: so werden durch dieselben die gleichnamigen Seiten **CD** und **cd** proportionirt und ebenfalls unter gleichen Winkeln geschnitten.

Beweis. Da $ABCDE \sim abcde$

so ist $\angle B = \angle b$ (E. 1.)

und $\angle C = \angle c$

Es ist aber auch $\angle BMN = \angle bmn$ (p. h.)

Folglich haben die Figuren **MBCN**, **mbcn** alle Winkel bis auf einen gleich, und es muß daher auch dieser in beiden gleich seyn. Hiernach ist $\angle MNC = \angle mnc$; die ähnlich liegenden Linien **MN**, **mn** schneiden also **CD**, **cd** unter gleichen Winkeln.

Da $AM : MB = am : mb$

so ist auch verbunden $AB : MB = ab : mb$ (V. 18.)

also verwechselt $AB : ab = MB : mb.$

Nun ist $AB : ab = BC : bc$

folglich auch $MB : mb = BC : bc$ (V. 11.)

Da nun $\angle B = \angle b$

so ist $\triangle MBC \sim \triangle mbc$ (6.)

und daher $\angle BMC = \angle bmc$ und $\angle BCM = \angle bcm$

aber auch $\angle BMN = \angle bmn$ und $\angle BCN = \angle bcn$

also ist $\angle CMN = \angle cmn$ und $\angle MCN = \angle mcn$

und es ist daher auch $\triangle CMN \sim \triangle cmn$ (3.)

folglich ist $CM : cm = CN : cn$

weil aber $\triangle CMB \sim \triangle cmb$, so ist auch

$CM : cm = BC : bc$

also $BC : bc = CN : cn$.

Da nun $BC : bc = CD : cd$ (p. h.)

so folgt $CD : cd = CN : cn$

also verwechselt $CD : CN = cd : cn$ (V. 16.)

und getrennt $DN : CN = dn : cn$ (V. 17.)

was bewiesen werden sollte.

3) Zusatz 1. Aehnliche Figuren werden durch ähnlich liegende Linien MN, mn in ähnliche Theile geschnitten, so daß, wenn $ABCDE \sim abcde$ und MN mit mn ähnlich liegend ist, auch

$MBCN \sim mbcn$ und $MAEDN \sim maedn$ seyn muß.

4) Zusatz 2. Aehnlich liegende Linien ähnlicher Figuren sind gleichnamigen Seiten dieser Figuren proportionirt. Es ist also auch

$MN : mn = AB : ab = BC : bc$ rc.

5) Lehrsatz. Aehnliche Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Linien derselben.

Beweis. Nach Nr. 4. ist

$AB : ab = MN : mn$

daher auch $\square AB : \square ab = \square MN : \square mn$ (22.)

Da aber $ABCDE \sim abcde$, so ist

$ABCDE : abcde = \square AB : \square ab$ (20.)

folglich ist auch $ABCDE : abcde = \square MN : \square mn$.

6) Zusatz. Hieraus folgt: Aehnliche, in Kreisen beschriebene Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser dieser Kreise.

Anmerkung. Dieser Satz ist der erste Lehrsatz in dem 12ten Buche der Elemente, wo derselbe als ein für sich dastehender Lehrsatz bewiesen wird, während er hier als eine unmittelbare Folgerung eines allgemeineren Satzes (Nr. 5.) sich ergiebt.

---

7) Lehnsatz. Sind zwei ungleiche Größen A und B gegeben, und man nimmt von der größeren A mehr als die Hälfte hinweg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte und so immer

fort, so kömmt man irgend einmal auf einen Rest, welcher kleiner ist als die gegebene kleinere Größe **B**.

Beweis. Es ist immer möglich, von **B** ein Vielfaches zu nehmen, welches größer ist als **A**, und es sey dieses bei dem n fachen von **B** der Fall, so daß

$$nB > A.$$

Nimmt man nun von **A** mehr als die Hälfte weg, von dem Reste mehr als die Hälfte und wiederholt dieses nmal: so wird hierdurch **A** in n Abschnitte getheilt, von welchen jeder folgende immer kleiner als der nächst vorhergehende ist; und es ist daher der letzte dieser Abschnitte x der kleinste von den sämmtlichen n Abschnitten, folglich ist er kleiner als der nte Theil von **A**.

Nun soll seyn $nB > A$

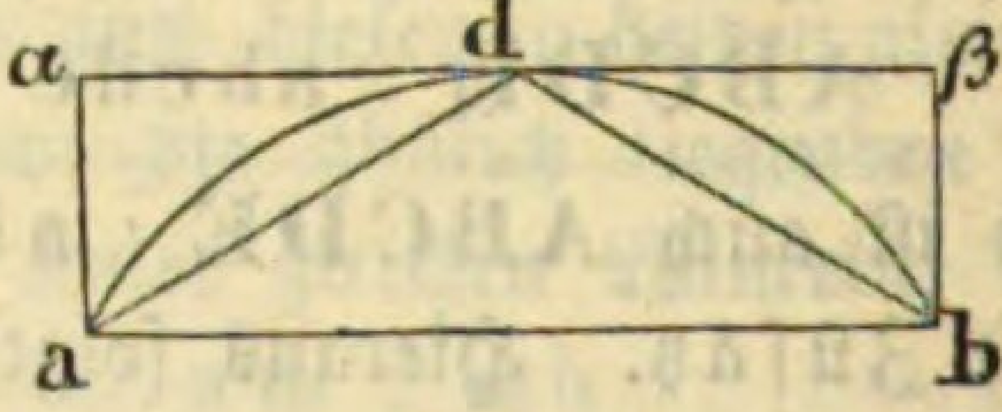
also $B > \frac{1}{n} A$

während $\frac{1}{n} A > x$

folglich ist um so mehr $B > x$.

Es bleibt also von **A** zuletzt ein Abschnitt x übrig, der kleiner als **B** ist.

8) Lehrsatz. Wird der zu einem Kreisabschnitte adb gehörige Bogen in d halbirt, und man zieht da, db, so ist das hierdurch gebildete Dreieck adb größer als die Hälfte des Kreisabschnittes.



Beweis. Man ziehe durch d die Tangente $\alpha\beta$, und durch a und b die Linie $a\alpha$ und $b\beta$ normal auf ab.

Da $\llcorner ad\alpha = \llcorner abd$ (III. 32.)

und weil der Bogen ab in d halbirt ist

$\llcorner abd = \llcorner bad$ (III. 27.)

so ist $\llcorner ad\alpha = \llcorner bad$

und daher $\alpha\beta$ parallel ab (I. 27.)

Folglich ist $ab\beta\alpha$ ein Parallelogramm, und

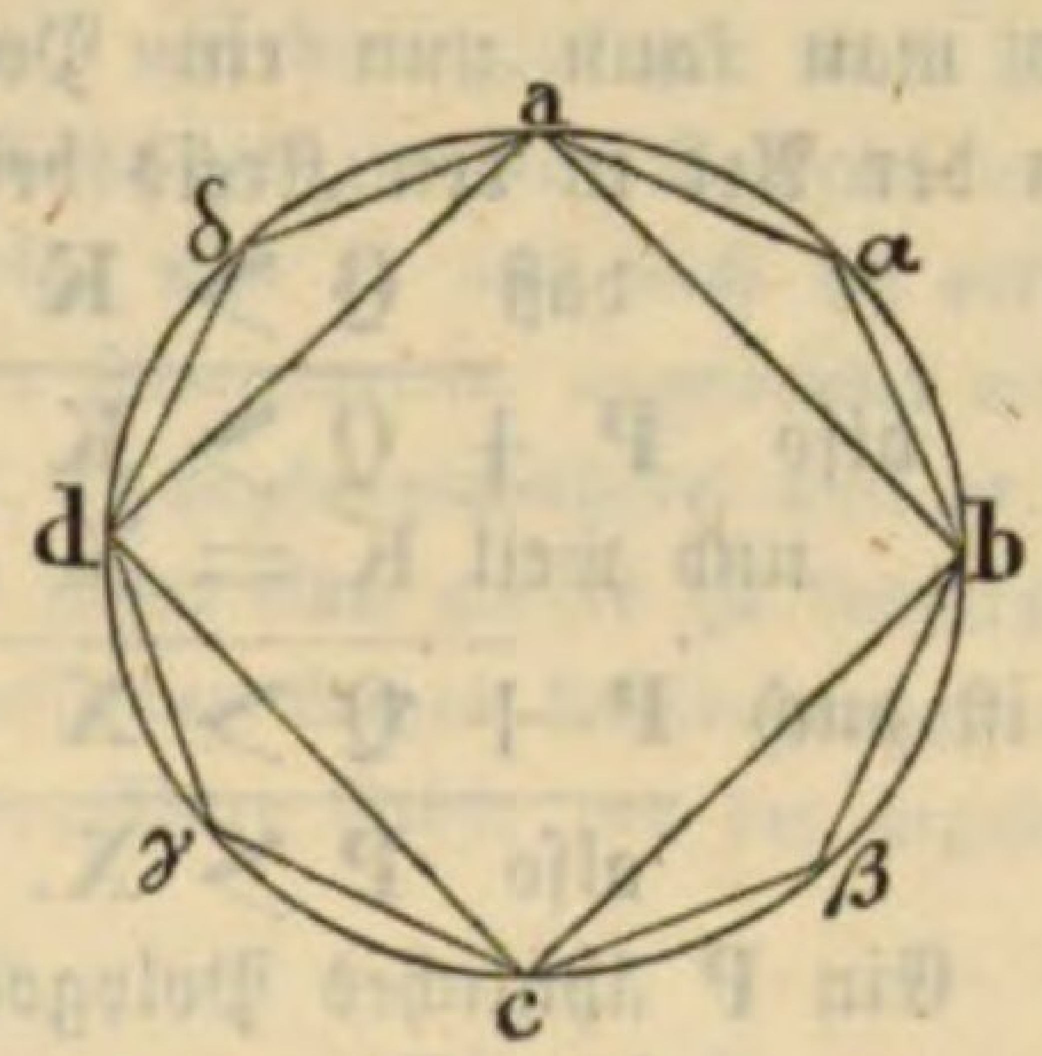
daher $ab\beta\alpha = 2 \,.\, \Delta adb$.

Nun ist $ab\beta\alpha >$ Ausschnitt adb

also ist auch $2 \,.\, \Delta abd >$ Ausschnitt adb

und daher $\Delta abd > \frac{1}{2}$ Ausschnitt adb.

9) Folgerung. Beschreibt man in einen Kreis ein Quadrat **abcd**, so ist dieses die Hälfte des Quadrats, das um den Kreis beschrieben werden kann, und es ist daher größer als die Hälfte des Kreises. Wird also das Quadrat **abcd** von dem Kreise weggenommen, so beibt weniger als die Hälfte des Kreises übrig, und es sind hiernach die Abschnitte $a\alpha b + b\beta c + c\gamma d + d\delta a$ kleiner als die halbe Kreisfläche.



Halbirt man nun ferner die Bogen ab, bc, cd, da in α, β, γ, δ, so ist

$$\Delta\, a\alpha b > \tfrac{1}{2} \text{ Abschnitt } a\alpha b$$

und es gilt dasselbe von den übrigen Abschnitten ebenfalls. Wird also von jedem Abschnitte das dazu gehörige Dreieck weggenommen, so sind die übrig bleibenden acht Abschnitte $a\alpha$, αb, $b\beta$ ꝛc. zusammen kleiner als die Hälfte der vier Abschnitte, durch welche sie entstanden sind. Nimmt man ferner von jedem dieser acht Abschnitte auf gleiche Weise ein Dreieck hinweg, so bleiben 16 Abschnitte, die zusammen kleiner als die Hälfte der 8 gleichen Abschnitte sind u. s. w.

Hieraus folgt nach Nr 7.: daß durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens zuletzt Abschnitte von dem Kreise übrig bleiben, die zusammen kleiner sind als irgend eine gegebene Fläche, wie klein diese auch seyn mag. Da man nun bei der Anwendung dieses Verfahrens ein regulaires Polygon in dem Kreise erhält, zuerst von 4, hierauf von 8, 16, 32 Seiten ꝛc.: so folgt, daß es möglich ist, in den Kreis ein regulaires Polygon hinein zu zeichnen, das von dem Kreise weniger verschieden ist, als irgend eine gegebene Fläche, wie klein diese Fläche auch seyn mag.

10) Lehrsatz. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Beweis. Man bezeichne den Durchmesser des einen Kreises mit d, seine Fläche mit k, den Durchmesser des anderen Kreises mit **D** und die Fläche desselben mit **K**, und setze nun: es sey

$$d^2 : D^2 = k : X$$

so ist entweder $X < K$ oder $X > K$ oder es ist $X = K$.

Erster Fall. Es sey $X < K$

so wird seyn $K = X + Q$

und man kann nun ein Polygon, dessen Fläche $= P$ seyn soll, von der Art in den Kreis beschreiben

daß $Q > K - P$ (nach Nr. 9.)

also $P + Q > K$

und weil $K = X + Q$

so ist auch $P + Q > X + Q$

also $P > X$.

Ein P ähnliches Polygon p beschreibe man in k, so ist

$d^2 : D^2 = p : P$ (nach Nr. 6.)

Da nun auch $d^2 : D^2 = k : X$

so ist $k : X = p : P$

und weil $k > p$, so ist auch $X > P$;

was der bereits erhaltenen Folgerung $X < P$ widerspricht, und da dieses aus der Annahme folgt $X < K$, so ist diese Annahme falsch. Es kann also nicht seyn

$X < K$.

Zweiter Fall. Es sey $X > K$

und es sey $D^2 : d^2 = K : Z$,

so kann nach dem ersten Falle nicht seyn $Z < k$. Nach der Voraussetzung ist aber

$d^2 : D^2 = k : X$

also $D^2 : d^2 = X : k$

also ist auch $K : Z = X : k$.

Da nun nicht seyn kann $Z < k$

so kann auch nicht seyn $K < X$

es ist also auch dieser zweite Fall nicht möglich.

Da hiernach weder seyn kann

$X < K$ noch $X > K$

so ist nothwendig $X = K$

und da $d^2 : D^2 = k : X$

so ist auch $d^2 : D^2 = k : K$.

Kreise verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Anmerkung. Nach Satz 20. verhalten sich ähnliche geradlinige Figuren wie die Quadrate gleichnamiger Seiten derselben; es konnte dieser Satz aber nicht unmittelbar auf Kreise angewendet werden, obgleich diese immer ähnlich sind, weil der bei Satz 20. gegebene Beweis davon abhängt, daß

die Figuren in Dreiecke sich zerlegen lassen, was bei Kreisen nicht anwendbar ist. Aus diesem Grunde mußte die Gültigkeit dieses Satzes für Kreise noch besonders bewiesen werden, wie hier geschehen ist. Diesen Beweis giebt Euklid bei dem zweiten Satze des zwölften Buches, und es ist derselbe besonders dadurch merkwürdig: weil er auch noch bei verschiedenen anderen Sätzen, besonders in der Stereometrie, angewendet werden kann. Man nennt diese Beweisart die Erschöpfungsmethode, weil es hierbei darauf ankömmt, für die gegebene Figur eine andere zu substituiren, für welche die Gültigkeit des zu beweisenden Satzes bereits nachgewiesen ist, und die weniger als irgend eine angebbare Größe von der gegebenen Figur verschieden ist.

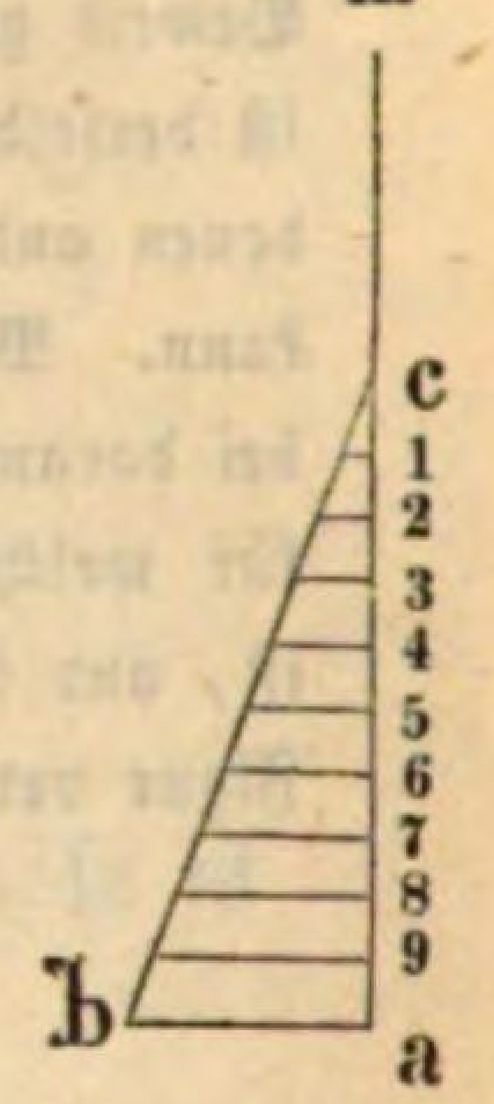
XXIX. Ueber den Gebrauch der Aufgaben von der Proportionalität der Linien bei der Construction der Maaßstäbe.

Durch die Aufgaben, Satz 9. bis 13., wird theoretisch nachgewiesen: wie es möglich ist, jede gegebene begrenzte gerade Linie nach jedem gegebenen Verhältnisse zu theilen, so wie eine dritte, vierte der mittleren Proportionale zu finden, wenn die übrigen Glieder der Proportion gegeben sind. Bei der Anwendung dieser Sätze stößt man jedoch öfters auf Schwierigkeiten, die in der Theorie natürlich nicht beachtet sind. Dergleichen Schwierigkeiten entstehen, wenn die gegebenen Linien entweder zu klein, oder zu groß sind.

Ist eine sehr kleine Linie gegeben, und soll diese in viele gleiche Theile getheilt werden, so würden die Theilstriche zusammen fallen, wenn man hierbei nach Anleitung, Satz 10., verfahren wollte; und doch kömmt gerade diese Aufgabe bei der Construction eines genauen Maaßstabes vor, der immer eine solche Einrichtung haben muß, daß man selbst die feinsten Theile auf demselben noch genau unterscheiden kann. Die Mittel, welche, um diesen Zweck zu erreichen, gewöhnlich angewendet werden, sollen daher hier angegeben werden. Diese Mittel bestehen darin: daß man entweder die feineren Theilstriche auf mehrere neben einander liegende Linien vertheilt, oder daß man zwei verschieden eingetheilte Linien mit einander verbindet. Das Erstere findet man bei allen sogenannten verjüngten Maaßstäben, und das Letztere ist die unter der Benennung Nonius bekannte Vorrichtung.

Construction des verjüngten Maaßstabes.

Errichtet man in dem Endpunkte a der ab die Normale am, und trägt von a aus auf am eine gewisse Anzahl, z. B. 10 gleiche Theile auf, verbindet den letzten Theilpunkt c mit b, und zieht durch die Theilstriche Parallelen mit ab: so ist



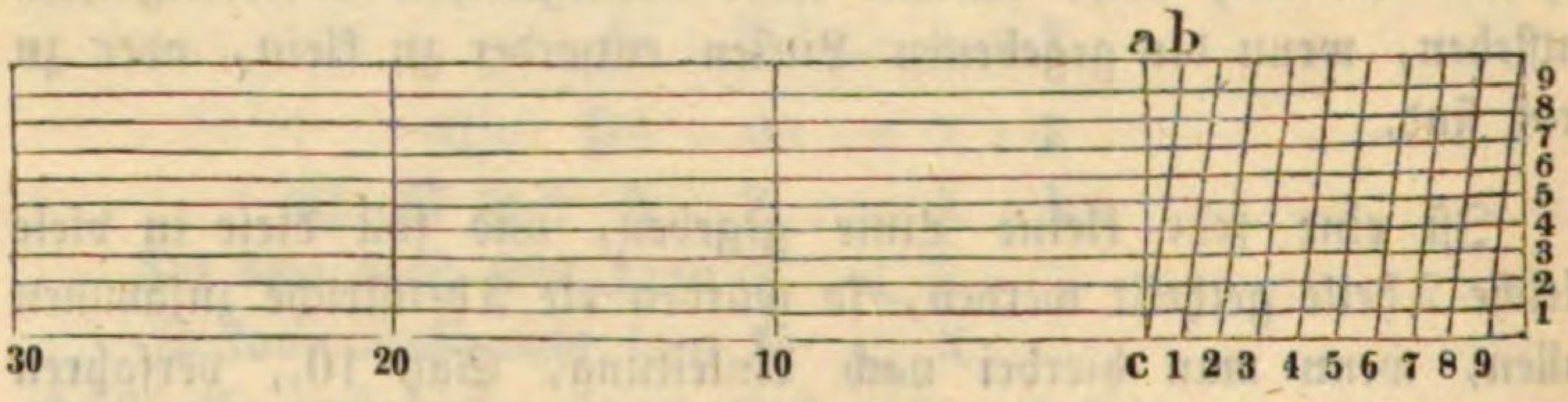
die Parallele bei 1 derselbe Theil von ab, wie c1 von ca
„ „ „ 2 „ „ „ „ c2 „ „
„ „ „ 3 „ „ „ „ c3 „ „

Da nun ist $c1 = \frac{1}{10}$, $c2 = \frac{2}{10}$, $c3 = \frac{3}{10}$ ꝛc. von ca, so ist auch die der ab parallele Linie bei

$$1 = \tfrac{1}{10},\ \text{bei } 2 = \tfrac{2}{10},\ \text{bei } 3 = \tfrac{3}{10}\ \text{von ab}$$

und man erhält daher durch diese Parallelen $\frac{1}{10}$ bis $\frac{9}{10}$ der Linie ab, ohne daß die Linie ab unmittelbar getheilt ist.

Ist nun ab die Einheit des Maaßstabes, so kann man durch diese Einrichtung die Länge einer Linie bis auf $\frac{1}{10}$ der Einheit genau ermitteln; und es ergiebt sich hieraus zugleich, daß, wenn man von a bis c eine andere Anzahl, z. B. 12 gleiche Theile aufträgt, die Länge einer Linie bis $\frac{1}{12}$ der Einheit genau sich bestimmen läßt.



Die gewöhnliche Einrichtung des verjüngten Maaßstabes läßt sich aus der beistehenden Figur unmittelbar erkennen. Bei diesem Maaßstabe ist ab die Einheit, und es ist diese Einheit auf der untersten Linie zuerst 10 Mal neben einander aufgetragen, und hierauf ist immer die Länge von 10 Einheiten zusammen angegeben. Hiernach ist auf dieser Linie

die Länge von 10 bis c = 10 Einheiten
„ „ „ 20 „ c = 20 „
„ „ „ 30 „ c = 30 „

die Länge	von	10	bis	1	=	11	Einheiten	
„	„	10	„	3	=	13	„	
„	„	10	„	5	=	15	„	
„	„	20	„	5	=	25	„	
„	„	30	„	7	=	37	„	ꝛc.

Die unterste Linie des Maaßstabes ist also allei ausreichend, um die Länge einer Linie auf eine Einheit genau zu bestimmen. Um aber die Längen bis auf $\frac{1}{10}$ der Einheit genau bestimmen zu können, sind in gleichen Abständen 10 Parallelen gezogen; und es ist, da **ab** = **c** 1 die Einheit ist, in **abc** der Theil zwischen **ca** und **cb** der, der untersten Linie nächsten Parallele = $\frac{1}{10}$, der zweiten = $\frac{2}{10}$, der dritten = $\frac{3}{10}$ der Einheit ꝛc., und auf diese Theile beziehen sich die links neben den Parallelen stehenden Zahlen. Während daher z. B. die Länge von 10 bis 3 = 13 Einheiten ist, so ist dieselbe, wenn man sie nimmt,

in der ersten Parallele = $13\frac{1}{10}$ = 13, 1
„ „ zweiten „ = $13\frac{2}{10}$ = 13, 2
„ „ dritten „ = $13\frac{3}{10}$ = 13, 3 u. s. w.

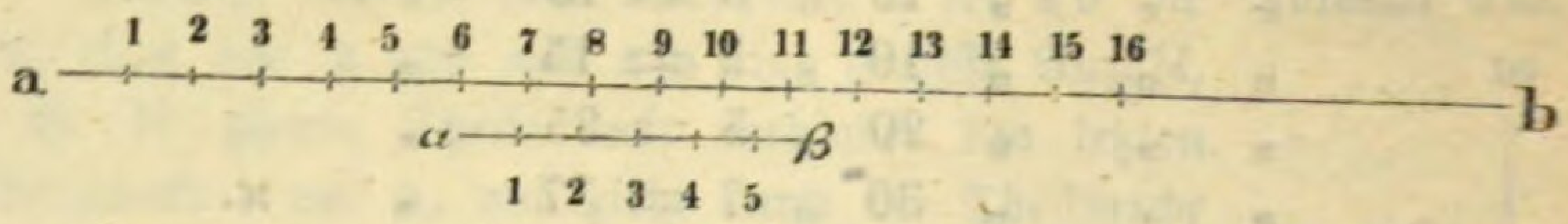
Geht man in der bei 10 errichteten Normale herauf bis zu der 5ten Parallele, und nimmt auf dieser die Länge bis zu der Linie, bei welcher unten 6 steht, so hat man eine Länge von $16\frac{5}{10}$ = 16,5 Einheiten u. s. f.

Soll umgekehrt eine Länge genommen werden = 27,3 = $27\frac{3}{10}$, so wird diese wegen der $\frac{3}{10}$ auf der dritten Parallele gefunden, wenn man den Abstand nimmt von 20 bis zu dem Durchschnittspunkte dieser Parallele mit der Linie, bei welcher unten die 7 steht.

Wird bei einem solchen Maaßstabe die demselben zum Grunde liegende Einheit **ab** für einen Fuß = 1′ angenommen, der in 10 Zoll getheilt wird, so erhält man durch diesen Maaßstab jede Linie auf einen Zoll = 1″ genau.

Ist die Länge von 10 Einheiten = 1″, der in 10 Linien getheilt wird = 100‴, so ist **ab** = 1‴, und der Maaßstab giebt jede Länge bis auf den 10ten Theil einer Linie genau.

Einrichtung des Nonius.



Ist **ab** ein Maaßstab, auf welchem die Einheiten angegeben sind, und trägt man auf einer besonderen Linie $\alpha\beta$ 5 dieser Einheiten auf und theilt diese in 6 gleiche Theile, ist also $\alpha\beta = 5$ Einheiten und $\alpha, 1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5\ \beta = \frac{1}{6}\ \alpha\beta$, so ist jeder Theil der Linie $\alpha\beta = \frac{5}{6}$ der Einheit. Fällt also α mit 6 des Maaßstabes zusammen, so ist auf **ab** die Länge

6 bis 7 = 1 Einheit

und auf $\alpha\beta$ die Länge α bis $1 = \frac{5}{6}$ „

also der Unterschied $= \frac{1}{6}$

und dieses ist der Abstand der 1 auf $\alpha\beta$ von 7 des Maaßstabes.

Ferner ist auf **ab** die Länge von 6 bis 8 = 2 Einheiten

und auf $\alpha\beta$ „ „ „ α bis $2 = 1\frac{4}{6}$ „

also der Unterschied $= \frac{2}{6}$,

welches der Abstand der 2 auf $\alpha\beta$ von 8 des Maaßstabes ist.

Eben so ist der Abstand

der 3 auf $\alpha\beta$ von 9 des Maaßstabes $= \frac{3}{6}$ Einheiten

„ 4 „ „ „ 10 „ „ $= \frac{4}{6}$ „

„ 5 „ „ „ 11 „ „ $= \frac{5}{6}$ „

Die Linie $\alpha\beta$ wird mit dem Maaßstabe so verbunden, daß sie sich an demselben verschieben läßt, und die Vorrichtung wird nun auf folgende Art benutzt:

Soll die Länge einer Linie durch diesen Maaßstab bestimmt werden, so legt man den Anfangspunkt derselben an **a**, und fällt nun der Endpunkt derselben mit einem Theilpunkte des Maaßstabes, z. B. mit 11, zusammen, so ist die Länge der Linie = 11 Einheiten. Liegt der Endpunkt der zu messenden Linie aber zwischen zwei Theilpunkten, z. B. zwischen 11 und 12, so verschiebt man $\alpha\beta$ so weit, bis β mit dem Endpunkte der Linie zusammen fällt. Ist dieses bereits der Fall, wenn 1 von $\alpha\beta$ mit 7 des Maaßstabes zusammentrifft, so beträgt die Länge der Linie $\frac{1}{6}$ mehr als 11 Einheiten. Muß $\alpha\beta$ so weit verschoben werden, bis 2 von $\alpha\beta$ mit 8 zusammentrifft, so beträgt die Länge der Linie $\frac{2}{6}$ mehr als

11 Einheiten u. s. w. Es geht also hieraus hervor: daß man mittelst dieser Vorrichtung die Länge einer Linie bis auf $\frac{1}{6}$ der Einheit genau messen kann.

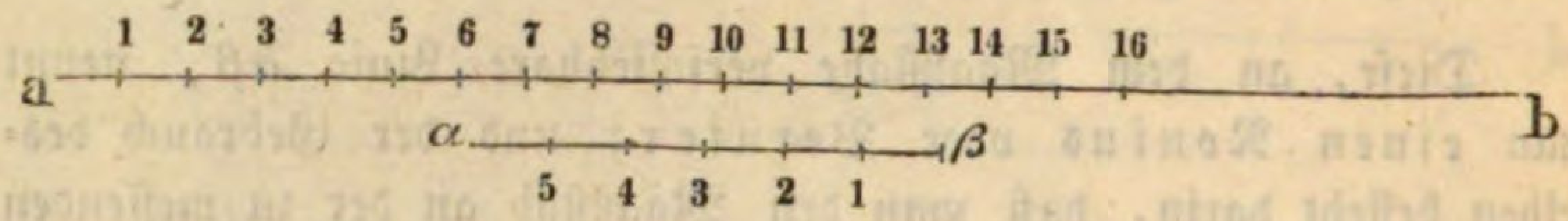
Diese, an dem Maaßstabe verschiebbare Linie $\alpha\beta$, nennt man einen Nonius oder Vernier; und der Gebrauch desselben besteht darin, daß man den Maaßstab an der zu messenden Linie so anlegt, daß α mit dem Anfangspunkte derselben zusammenfällt, und hierauf den Nonius $\alpha\beta$ so weit verschiebt, bis β mit dem Endpunkte der zu messenden Linie zusammentrifft. Hierauf sieht man nach, welcher Theilpunkt der $\alpha\beta$ mit einem Theilpunkte des Maaßstabes zusammenfällt; so giebt nun die bei diesem Theilpunkte der $\alpha\beta$ stehende Zahl an, um wie viel die zu messende Linie länger ist, als die Zahl auf dem Maaßstabe ausdrückt, über welche der Endpunkt der zu messenden Linie hinweggeht, ohne den nächstfolgenden Theilpunkt des Maaßstabes zu erreichen.

Werden zu diesem Behufe, wie in der obigen Zeichnung, 5 Einheiten des Maaßstabes auf dem Nonius in 6 gleiche Theile getheilt, so erhält man durch denselben jede Länge bis auf $\frac{1}{6}$ der Einheit genau. Theilt man auf dem Nonius 9 Einheiten des Maaßstabes in 10 gleiche Theile, so giebt der Nonius die Länge auf $\frac{1}{10}$ der Einheit genau. Will man mittelst des Nonius eine Länge auf $\frac{1}{20}$ der Einheit genau haben, so müssen 19 Einheiten des Maaßstabes in 20 gleiche Theile auf dem Nonius getheilt werden u. s. w.

Hieraus folgt ganz allgemein: wenn (n — 1) Einheiten des Maaßstabes auf dem Nonius in n gleiche Theile getheilt werden, so kann man mittelst desselben jede Länge bis auf $\frac{1}{n}$ der Einheit genau messen; und die auf dem Nonius angegebenen Zahlen folgen auf dem Nonius in derselben Richtung auf einander, wie auf dem Maaßstabe.

Die hier zuletzt beigefügte Bemerkung über die Richtung, in welcher auf dem Nonius die Zahlen auf einander folgen, ist deßwegen zu beachten, weil auch noch eine andere Construction des Nonius vorkömmt. Bei der oben angegebenen Einrichtung sind die Theile des Nonius kleiner, als die des Maaßstabes; man kann

die Theile des Nonius aber auch größer als die des Maaßstabes annehmen.



Ist ab der Maaßstab, und theilt man jetzt 7 Einheiten des Maaßstabes auf dem Nonius $\alpha\beta$ in 6 gleiche Theile, so ist jeder Theil des Nonius $= 1\frac{1}{6}$ Einheiten des Maaßstabes. Da nun die Länge

auf ab von 13 bis 12 = 1 Einheit ist
und auf $\alpha\beta$ von β bis $1 = 1\frac{1}{6}$ „

so ist der Unterschied $= \frac{1}{6}$

welches der Abstand der 1 auf $\alpha\beta$ von 12 des Maaßstabes ist.

Ferner ist die Länge

auf ab von 13 bis 11 = 2 Einheiten
und auf $\alpha\beta$ von β bis $2 = 2\frac{2}{6}$ „

also der Unterschied $= \frac{2}{6}$

und dieses ist der Abstand der 2 auf $\alpha\beta$ von 11 des Maaßstabes.

Eben so ist der Unterschied

der 3 auf $\alpha\beta$ von 10 des Maaßstabes $= \frac{3}{6}$
„ 4 „ „ „ 9 „ „ $= \frac{4}{6}$
„ 5 „ „ „ 8 „ „ $= \frac{5}{6}$.

Liegt also der Anfangspunkt einer zu messenden Linie in a, und ihr Endpunkt zwischen 13 und 14, und verschiebt man den Nonius, bis β mit dem Endpunkte der Linie zusammenfällt, und muß zu diesem Behufe $\alpha\beta$ so weit verschoben werden, daß 1 mit 12 zusammen trifft: so ist die zu messende Linie um $\frac{1}{6}$ größer als 13 Einheiten, sie ist um $\frac{2}{6}$ größer, wenn 2 mit 11 zusammentrifft 2c.

Hieraus folgt ganz allgemein: werden $(n + 1)$ Einheiten des Maaßstabes auf dem Nonius in n gleiche Theile getheilt, so kann man mittelst desselben jede Länge bis auf $\frac{1}{n}$ der Einheit genau messen, und die auf dem Nonius angegebenen Zahlen folgen in einer entgegengesetzten Richtung auf einander als bei dem Maaßstabe.

Anmerkung. Bei jedem guten Winkelmeßinstrument ist ein Nonius angebracht. Das Instrument besteht aus einem Kreise, auf welchem die

einzelnen Grade und Theile derselben angegeben sind; doch geht hier die Eintheilung nicht weiter, als höchstens bis auf $\frac{1}{12}$ Grad, also bis auf 5 Minuten, und der Nonius dient nun dazu, um auch einzelne Minuten und Theile derselben genau messen zu können.

Giebt der getheilte Rand des Instruments z. B $\frac{1}{12}$ Grad oder 5 Minuten unmittelbar an, und werden nun 29 solche Theile auf dem Nonius in 30 gleiche Theile getheilt, so ist jeder Theil des Nonius $\frac{29}{30}$ von 5 Minuten; und der Unterschied zwischen einem Theile des Randes und einem Theile des Nonius ist daher $= \frac{1}{30}$ von 5 Minuten $= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ Minute oder 10 Secunden. Mittelst dieser Vorrichtung kann man also bei dieser Voraussetzung einen Winkel auf 10 Secunden genau messen. Eben diese Genauigkeit erhält man auch, wenn bei der obigen Voraussetzung 31 Theile des getheilten Randes auf dem Nonius in 30 gleiche Theile getheilt werden.

Der Maaßstab, durch welchen eine Linie sich genau messen läßt, wird auch in dem Falle benutzt, wenn eine Linie getheilt werden soll, die so groß ist, daß die in der Theorie angegebenen Regeln sich nicht anwenden lassen; wie dieses der Fall ist, wenn eine auf dem Felde gemessene Linie nach bestimmten Verhältnissen zu theilen ist. Für solche Linien sucht man entweder die Theile durch Rechnung zu ermitteln, oder man trägt dieselben nach dem verjüngten Maaßstabe auf, und nimmt nun die Theilung nach den in den Sätzen 9 bis 13 angegebenen Regeln vor.

Werden von einer großen geradlinigen Figur, z. B. von einer Figur auf dem Felde eine hinreichende Anzahl Stücke gemessen, um dieselbe construiren zu können, und verzeichnet man diese Figur nun mit Hülfe eines verjüngten Maaßstabes: so erhält man diese Figur hierdurch der Form nach, aber verjüngt, und zwar um so kleiner, je kleiner die dem Maaßstabe zum Grunde liegende Einheit angenommen wird. Man erhält auf diese Weise eine der gegebenen ähnliche Figur auf einem kleineren Raume: und da ähnliche Figuren wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten sich verhalten (20.), so verhält sich auch die Fläche der gegebenen Figur zu der Fläche der ihr ähnlich construirten, wie das Quadrat der Einheit des Maaßstabes, nach welchem die Seiten der gegebenen Figur gemessen sind, zu dem Quadrate der Einheit von dem Maaßstabe, nach welchem man die ihr ähnliche Figur construirt. Nimmt man z. B. bei der Construction den Decimalzoll als die Länge einer Ruthe an, welche 10 Decimalfuß à 10 Zoll hält, so ist die Einheit der con=

struirten Figur $= \frac{1}{100}$ von der Einheit der gemessenen, und daher verhält sich die Fläche der gegebenen Figur zu der Fläche der construirten, wie $1^2 : (\frac{1}{100})^2 = 1 : \frac{1}{10000}$; die verzeichnete Figur hat also, wenn die Einheit um das 100fache verjüngt wird, nur $\frac{1}{10000}$ der Fläche von der gegebenen. Aehnliche, nach verschiedenen Maaßstäben aufgetragene Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der ihnen zum Grunde liegenden Maaßstäbe. Soll also eine bereits construirte Figur nach einem bestimmten Verhältnisse verjüngt werden, so kann man den hierzu erforderlichen Maaßstab aus der gegebenen Figur hiernach finden; nur muß hierbei darauf Rücksicht genommen werden, ob das Verhältniß auf die gegebene Länge oder auf die Fläche sich bezieht.

Bezieht das gegebene Verhältniß sich bloß auf die Länge, so haben die Maaßstäbe dasselbe Verhältniß. Soll z. B. eine gegebene Figur so verjüngt werden, daß die Seiten $\frac{2}{3}$ der Länge von den Seiten der gegebenen Figur erhalten, so muß auch der Maaßstab derselben $\frac{2}{3}$ von der Länge des Maaßstabes der gegebenen Figur erhalten, und die Flächen verhalten sich alsdann wie

$$1^2 : (\tfrac{2}{3})^2 = 1 : \tfrac{4}{9} = 9 : 4.$$

Bezieht das gegebene Verhältniß sich aber auf die Flächen, so haben die Quadrate der Maaßstäbe dieses Verhältniß, und es läßt sich hieraus die Länge des Maaßstabes durch Rechnung finden. Soll z. B. die Fläche der zu construirenden Figur $\frac{2}{3}$ von der Fläche der gegebenen betragen, und man setzt die Länge der Einheit des zu der zu construirenden Figur gehörigen Maaßstabes $= x$ für die Länge der Einheit des Maaßstabes der gegebenen Figur $= a$, so muß seyn

$$1 : \tfrac{2}{3} = a^2 : x^2$$

und daher $x^2 = \frac{2\,a^2}{3} = \frac{6\,a^2}{9}$

folglich wird $x = \sqrt{\frac{6\,a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

und weil $\sqrt{6} = 2{,}4495$

so wird $x = \frac{a}{3} \times 2{,}4495 = a \times 0{,}8165$

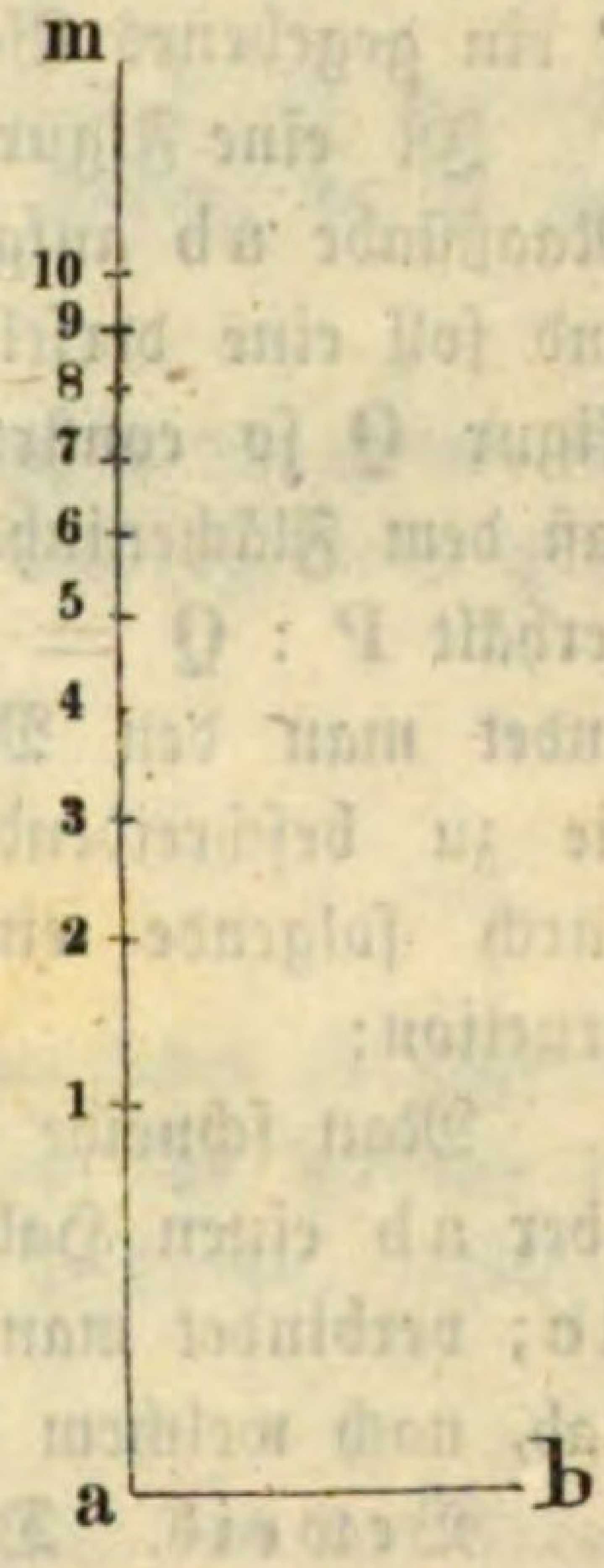
und es ist daher $a : x = 1 : 0{,}8165$.

Auf diese Weise läßt sich die Länge des Maaßstabes durch

Rechnung finden; man kann denselben aber auch durch eine geometrische Construction ermitteln, oder allgemein auf einem sogenannten quadratischen Maaßstabe abnehmen.

Einrichtung und Gebrauch des quadratischen Maaßstabes.

Errichtet man auf ab eine Normale am, nimmt a 1 = ab; a 2 = b 1; a 3 = b 2; a 4 = b 3 ꝛc., so ist, wie bereits Aufg. 118. Seite 160. bewiesen worden ist



$$(a\,2)^2 = 2\,(ab)^2$$
$$(a\,3)^2 = 3\,(ab)^2$$
$$(a\,4)^2 = 4\,(ab)^2$$
$$(a\,5)^2 = 5\,(ab)^2$$

Ist daher ab die Seite einer Figur **P**, und a 3 die, derselben gleichnamige Seite einer derselben ähnlichen Figur **Q**: so ist

$$P : Q = (ab)^2 : (a\,3)^2 \quad (20.)$$
$$= (ab)^2 : 3\,(ab)^2$$

also $P : Q = 1 : 3$
und dadurch $Q = 3\,P$.

Hieraus folgt: wenn ab die Seite einer Figur **P** ist, und es ist die derselben gleichnamige Seite q einer ähnlichen Figur **Q** gegeben, so ergiebt sich unmittelbar, ein Wievielfaches **Q** von **P** ist, wenn man die Linie q auf dem Maaßstabe am abmißt. Wird der Anfangspunkt der q an a angelegt und reicht nun der Endpunkt derselben bis 5, so ist $Q = 5\,P$: reicht der Endpunkt von q bis 7, so ist $Q = 7\,P$ ꝛc.

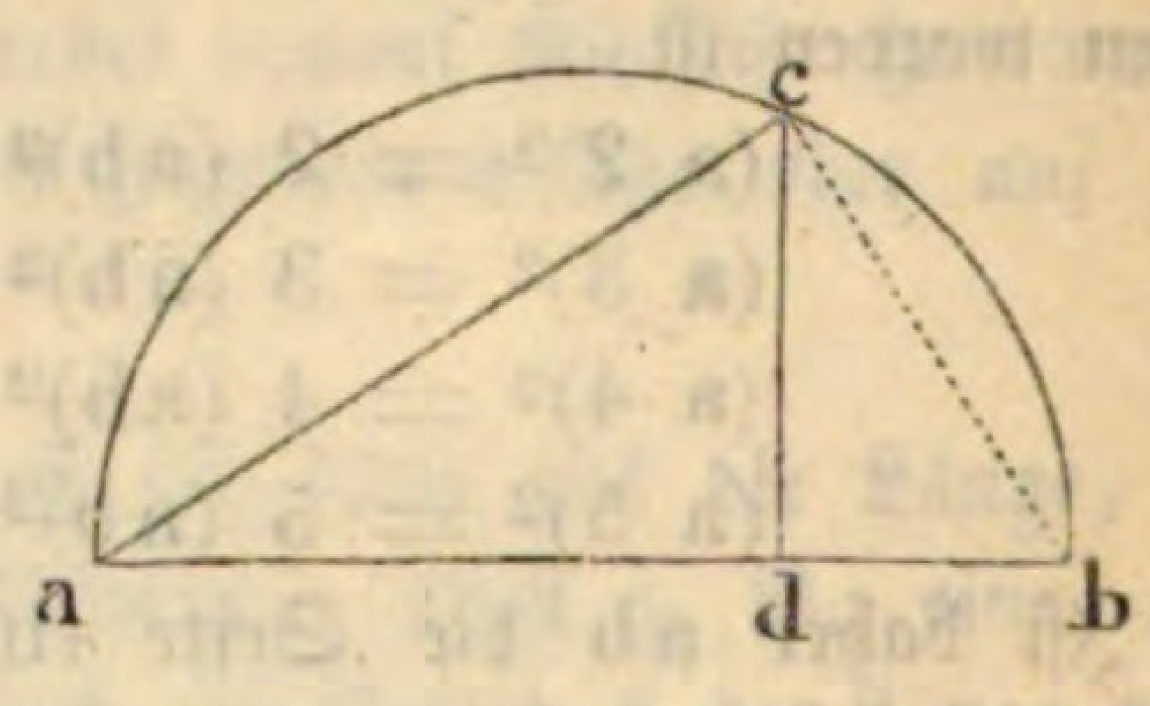
Soll umgekehrt die Seite q einer Figur **Q** gefunden werden, welche der **P** ähnlich und deren Fläche $= 5\,P$ ist, und ist die der q homologe Seite der $P = ab$, so ist $q = a\,5$.

Da ferner ähnliche Figuren sich auch wie die Quadrate der Einheiten ihrer Maaßstäbe verhalten: so ist, wenn ab die Einheit ist für den Maaßstab von **P**, die Einheit des Maaßstabes

für $Q = a\,2$, wenn $Q = 2\,P$ seyn soll
$= a\,3$ „ $Q = 3\,P$ „ „
$= a\,4$ „ $Q = 4\,P$ „ „

Allgemein folgt, daß, wenn P ∾ Q und P zu Q, wie 2 zu 5 sich verhalten soll, die homologen Seiten dieser Figuren, und also auch die Einheiten ihrer Maaßstäbe sich verhalten müssen wie a 2 zu a 5, und so für jedes andere Verhältniß. Man kann also mit Hülfe des Maaßstabes am, welcher ein quadratischer Maaßstab genannt wird, wenn eine Seite oder die Einheit des Maaßstabes einer Figur P gegeben ist, die gleichnamige Seite oder die Einheit des Maaßstabes einer ähnlichen Figur Q finden, welche zu P ein gegebenes Verhältniß hat.

Ist eine Figur P nach dem Maaßstabe ab aufgetragen und und soll eine derselben ähnliche Figur Q so construirt werden, daß dem Flächeninhalt nach sich verhält P : Q = m : n: so findet man den Maaßstab für die zu beschreibende Figur Q durch folgende einfache Construction:



Man schneide ab in d so, daß ab : ad = m : n, beschreibe über ab einen Halbkreis, und errichte in d auf ab die Normale dc; verbindet man a mit c, so ist die Linie ac der gesuchte Maaßstab, nach welchem die Figur Q construirt werden muß.

Beweis. Da ab : ac = ac : ad (8.)

so ist ab : ad = $(ab)^2 : (ac)^2$

also ab : ad = m : n = P : Q

folglich P : Q = $(ab)^2 : (ac)^2$

Da nun die Figuren wie die Quadrate ihrer Mgaßstäbe sich verhalten, und ab der Maaßstab der Figur P seyn soll, so muß ac der Maaßstab seyn für die zu construirende Figur Q.

Fortsetzung der Aufgaben.

§. 30.

Aufgaben von der Construction und dem Gebrauch der verschiednen Maaßstäbe.

Aufgabe 501. Eine Seite p einer Figur P ist gegeben; man soll die Seite q einer ähnlichen Figur Q finden, die 3 Mal so groß als dieselbe ist.

Auflösung. Nimm auf dem quadratischen Maaßstabe die Linien a 1 und a 3, und suche zu diesen und der gegebenen p die 4te Proportionale x, so daß

$$a\,1 : a\,3 = p : x \quad (12.)$$

so ist $x = q$ die gesuchte Seite.

Aufgabe 502. Die Einheit a des Maaßstabes ist gegeben, nach welchem eine Figur P aufgetragen ist; man soll hieraus die Einheit des Maaßstabes einer ähnlichen Figur Q finden, welche 5 Mal so groß als P ist.

Aufgabe 503. Eine Figur P ist gegeben, und der Maaßstab derselben, dessen Einheit = m ist; es soll der Maaßstab der ähnlichen Figur Q gefunden werden, und es soll P zu Q wie 3 zu 5 sich verhalten.

Auflösung. Auf dem quadratischen Maaßstabe nehme man die Längen a 3 und a 5, suche zu diesen und der gegebenen m die 4te Proportionale, so daß

$$a\,3 : a\,5 = m : x$$

so ist x die Einheit des gesuchten Maaßstabes.

Aufgabe 504. Von einer Figur P ist die Seite p gegeben; man soll die Seite q einer ähnlichen Figur Q finden, daß P zu Q wie 7 zu 4 sich verhalte.

Aufgabe 505. Eine Figur P ist gegeben, von welcher eine Seite = p; es soll Q der P ähnlich construirt werden, daß die Fläche von $Q = \frac{5}{8} P$ werde.

Auflösung. Da seyn soll $Q = \frac{5}{8} P$

so ist auch $8\,Q = 5\,P$

und daher $P : Q = 8 : 5$

wenn also q die gesuchte der p homologe Seite seyn soll, so ist auf dem quadratischen Maaßstabe $a\,8 : a\,5 = p : q$.

Aufgabe 506. Die Seite p einer Figur P ist gegeben; es soll die gleichnamige Seite q der ähnlichen Figur Q durch Rechnung gefunden werden, und es soll seyn $Q = \frac{7}{10} P$.

Auflösung. Es ist $P : Q = p^2 : q^2$ (20.)

also $P : \frac{7}{10} P = p^2 : q^2$

und daher $10 : 7 = p^2 : q^2$

$$\text{folglich ist } q^2 = \frac{7\,p^2}{10} = \frac{70\,p^2}{100}$$

$$\text{und daher } q = \sqrt{\frac{70\,p^2}{100}} = \frac{p}{10} \sqrt{70}$$

und weil $\sqrt{70} = 8{,}367$, so ist

$$q = \frac{p}{10} \times 8{,}367 = 0{,}8367 \times p.$$

Aufgabe 507. Man kennt die Einheit m des Maaßstabes, nach welchem eine Figur P aufgetragen ist; es soll hieraus durch Rechnung die Einheit des Maaßstabes gefunden werden, nach welchem die ähnliche Figur Q aufgetragen werden muß, wenn $Q = 2\frac{1}{2}$ Mal so groß als P seyn soll.

Auflösung. Wird die gesuchte Einheit = x gesetzt, so findet man $x = 1{,}58 \times m$.

Aufgabe 508. Die gleichnamigen Seiten p und q der ähnlichen Figuren P und Q sind in Zahlen gegeben; man soll hieraus berechnen, wie die Figuren P und Q ihrer Größe nach zu einander sich verhalten.

Auflösung. Es ist $P : Q = p^2 : q^2$.

Anmerkung. Sind p^2 und q^2 große Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man einen Näherungswerth für das Verhältniß von P zu Q mittelst der Kettenbrüche aufsuchen.

Aufgabe 509. Die Seite p der Figur **P** ist = 17,8 und die gleichnamige Seite q der ähnlichen Figur **Q** = 35,5; wie verhalten sich die Figuren **P** und **Q** zu einander?

Antwort. Die Figuren verhalten sich ungefähr wie 4 : 7, oder genauer, wie 35 : 61.

Aufgabe 510. Eine Figur ist nach zwei verschiedenen Maaßstäben aufgetragen, und es ist die Einheit des einen Maaßstabes der Pariser Zoll von 12 französischen Linien, und die des anderen der preußische Zoll von 11,6 französischen Linien; wie verhalten sich beide Figuren ihrer Größe nach zu einander?

Auflösung. Werden die Flächen der Figuren mit **P** und **Q** bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} P : Q &= 12^2 : 11{,}6^2 \\ &= 144 : 134{,}56 \\ &= 9 : 8{,}41 \\ &= 900 : 841 \end{aligned}$$

die nach dem französischen Maaßstabe aufgetragene Figur verhält sich daher zu der, nach dem preußischen aufgetragenen, ungefähr wie 15 : 14, oder genauer wie 46 : 43.

Aufgabe 511. Auf einem Maaßstabe sind Sechstel-Zolle angegeben; man soll für denselben einen Nonius construiren, so daß mit Hülfe desselben die Längen bis auf $\frac{1}{10}$ Linie genau gemessen werden können.

Auflösung. Der Zoll hat 12 Linien, also ist $\frac{1}{6}$ Zoll = 2 Linien = 20 Zehntel. Der Nonius muß daher so construirt werden, daß man durch denselben $\frac{1}{20}$ der Einheit des Maaßstabes, welche $\frac{1}{6}$ Zoll ist, finden kann. Man muß also entweder 19 Einheiten von $\frac{1}{6}$ Zoll oder 21 solche Einheiten auf dem Nonius in 20 gleiche Theile theilen. In dem ersten Falle folgen die Zahlen des Nonius in derselben Richtung auf einander, wie bei dem Maaßstabe, und in dem andern Falle müssen sie in entgegengesetzter Richtung auf einander folgend angebracht werden.

Aufgabe 512. Auf einem Maaßstabe sind Viertel-Zolle angegeben, und es hält jeder Zoll 10 Linien; man soll einen Nonius für diesen Maaßstab construiren, durch welchen die Längen bis auf $\frac{1}{10}$ Linie genau gefunden werden können.

Auflösung. Die Einheit des Maaßstabes ist $= \frac{1}{4}$ Zoll $= \frac{1}{4} \times 10 = 2\frac{1}{2}$ Linien $= 2\frac{1}{2} \times 10$ Zehntel $= 25$ Zehntel-Linien. Daher müssen auf dem Nonius 24 oder 26 Theile des Maaßstabes, von welchen jeder $= \frac{1}{4}$ Zoll ist, in 25 gleiche Theile getheilt werden.

Aufgabe 513. Auf dem getheilten Rande eines Winkelmeßinstruments sind Viertel-Grade angegeben; man soll einen Nonius damit verbinden, durch welchen die Winkel auf eine Minute genau sich bestimmen lassen.

Auflösung. Da der Grad 60 Minuten hält, so ist $\frac{1}{4}$ Grad $= 15$ Minuten. Auf dem Nonius muß man daher 14 oder 16 Viertel-Grade in 15 gleiche Theile theilen.

Aufgabe 514. Ein Winkelmeßinstrument giebt unmittelbar Zwölftel-Grade an; es soll ein Nonius damit verbunden werden, durch welchen jeder Winkel auf 10 Secunden genau sich ermitteln läßt.

Auflösung. Es ist $\frac{1}{12}$ Grad $= 5$ Minuten $= 5 \,.\, 60 = 300$ Secunden $= 30 \times 10$ Secunden. Daher müssen auf dem Nonius 29 oder 31 Theile, von welchen jeder ein Zwölftel-Grad ist, in 30 gleiche Theile getheilt werden.

Aufgabe 515. Auf dem getheilten Rande eines Winkelmeßinstruments sind Zwanzigstel-Grade angegeben; man soll einen Nonius damit verbinden, durch welchen die Winkel auf 5 Secunden genau sich bestimmen lassen.

Auflösung. Es ist $\frac{1}{20}$ Grad $= 3$ Minuten $= 3 \,.\, 60$ Secunden $= \frac{3 \,.\, 60}{5} = 36$ Mal 5 Secunden. Auf dem Nonius müssen daher 35 oder 37 Theile des Randes in 36 gleiche Theile getheilt werden.

Aufgabe 516. Mit einem Maaßstabe, auf welchem Fünftel-Zoll angegeben sind, ist ein Nonius verbunden, auf welchem 21 Theile des Maaßstabes in 20 gleiche Theile getheilt sind. Welche Genauigkeit giebt dieser Nonius, wenn der Zoll in 10 Linien getheilt wird?

Auflösung. Jeder Theil des Nonius ist $\frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20}$ von einem Theile des Maaßstabes, der $= \frac{1}{5}$ Zoll ist. Jeder Theil des Nonius ist also um $\frac{1}{20} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{100}$ Zoll $= \frac{1}{100} \times 10$

Linien = $\frac{1}{10}$ Linie größer als ein Theil des Maaßstabes. Folglich giebt der Nonius die Längen bis auf ein $\frac{1}{10}$ Linie genau.

Aufgabe 517. Auf einem Maaßstabe sind Achtel-Zoll angegeben, und es ist mit demselben ein Nonius verbunden, auf welchem 29 Theile des Maaßstabes in 30 gleiche Theile getheilt sind; welche Genauigkeit giebt dieser Nonius, wenn der Zoll in 12 Linien getheilt wird?

Auflösung. Jeder Theil des Nonius ist = $\frac{29}{30}$ = 1 — $\frac{1}{30}$ der Einheit des Maaßstabes. Der Unterschied beider Theile ist also $\frac{1}{30}$ von $\frac{1}{8}$ Zoll, und es ist dieser Unterschied daher = $\frac{1}{30} \times \frac{1}{8} \times$ 12 Linien = $\frac{12}{240}$ = $\frac{1}{20}$ Linie. Folglich giebt der Nonius die Längen bis auf $\frac{1}{20}$ Linie genau.

Aufgabe 518. Auf einem Winkelmeßinstrument sind Viertel-Grade angegeben, und auf dem damit verbundenen Nonius sind 44 solche Theile in 45 gleiche Theile getheilt; welche Genauigkeit gewährt dieser Nonius?

Auflösung. Es ist jeder Theil des Nonius = $\frac{44}{45}$ = 1 — $\frac{1}{45}$ von einem Theile des Randes; der Unterschied ist also = $\frac{1}{45} \times \frac{1}{4}$ Grad = $\frac{1}{45} \times \frac{1}{4} \times 60$ Minuten = $\frac{60}{180}$ = $\frac{1}{3}$ Minuten = 20 Secunden. Mittelst des Nonius wird also jeder Winkel auf 20 Secunden genau gefunden.

Aufgabe 519. Auf einem Transporteur sind halbe Grade angegeben, und es ist mit demselben ein Nonius verbunden, auf welchem 16 von diesen halben Graden in 15 gleiche Theile getheilt sind; mit welcher Genauigkeit kann man durch diesen Transporteur einen Winkel messen?

Auflösung. Jeder Theil des Nonius ist = $\frac{16}{15}$ = 1 + $\frac{1}{15}$ von einem halben Grade. Der Unterschied ist also $\frac{1}{15} \times \frac{1}{2}$ Grad = $\frac{1}{15} \times$ 30 Minuten = 2 Minuten. Mit Hülfe eines solchen Transporteurs wird also jeder Winkel auf 2 Minuten genau gefunden.

Aufgabe 520. Auf einem Winkelmeßinstrumente sind Zwanzigstel-Grade angegeben, und auf dem damit verbundenen Nonius sind 46 Theile des Randes in 45 gleiche Theile getheilt; welche Genauigkeit läßt sich hierdurch erreichen?

Auflösung. Es ist ein Theil des Nonius $= \frac{46}{45} = 1 + \frac{1}{45}$ von einem Theile des Randes, also von $\frac{1}{20}$ Grad. Der Unterschied ist folglich =
$\frac{1}{45} \times \frac{1}{20}$ Grad $= \frac{1}{45} \times 3$ Minuten $= \frac{1}{15}$ Minute $= \frac{1}{15} \times 60$ Secunden $= 4$ Secunden. Mittelst dieser Vorrichtung kann also jeder Winkel auf 4 Secunden genau gefunden werden.

XXX. Das Wesen der Aufgaben von der Construction ähnlicher Figuren.

Die Construction ähnlicher Figuren ist das Wesentlichste bei dem Gebrauche der Geometrie. So ist z. B. das Auftragen einer auf dem Felde gemessenen Figur, mittelst eines verjüngten Maaßstabes, nichts Anderes, als das Entwerfen einer der gemessenen ähnlichen Figur. Die Aufgaben, durch welche gelehrt wird, wie ähnliche Figuren sich construiren lassen, müssen daher zu den wichtigsten der ganzen Geometrie gerechnet werden.

Ist eine Figur gegeben, und soll eine ihr ähnliche verzeichnet werden, so muß von der zu construirenden entweder eine Seite gegeben seyn, oder sie ist ihrer Größe nach bestimmt. Das Verfahren, durch welches in beiden Fällen die verlangte Figur gefunden wird, ist in den Sätzen 18 und 25 angegeben. Für die Anwendung sind hierbei folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Ist eine Figur bereits construirt, nnd soll eine derselben ähnliche Figur über einer gegebenen Linie verzeichnet werden, so läßt sich hierbei unmittelbar das in dem 18ten Satze angegebene Verfahren anwenden; welches dem Wesen nach darin besteht, daß man die Figur in Dreiecke zerlegt, und jedes derselben aus einer gegebenen Seite und den beiden anliegenden Winkeln verzeichnet. Eine hierbei anwendbare Abkürzung ist in der Anmerkung zu Satz 18. angegeben, und es besteht dieselbe darin: daß man der gegebenen Seite eine, der ihr gleichnamigen Seite der gegebenen Figur parallele Lage giebt, und nun die Seiten und gezogenen Diagonalen parallel abschiebt.

Diese Aufgabe findet ihre Anwendung, wenn eine gegebene geometrische Zeichnung, z. B. eine Karte oder ein Plan, verjüngt oder vergrößert werden soll.

2) Ist die Figur, für welche eine ähnliche construirt werden soll, nicht unmittelbar auf dem Papier gegeben, sondern sind statt

dessen die erforderlichen Bestimmungsstücke (in Zahlen ausgedrückt) bekannt, kennt man also die Länge der zu den Bestimmungsstücken gehörigen Seiten und die zu denselben gehörigen Winkel ihrer Größe nach: so wird die Construction mit Hülfe des verjüngten Maaßstabes und des Transporteurs ausgeführt. Die Seiten werden nach dem Maaßstabe aufgetragen, und die Winkel mit Hülfe des Transporteurs an den gehörigen Stellen angesetzt. Hierbei gilt allgemein als Regel, daß von einer n seitigen Figur (2 n — 3) von einander unabhängige Bestimmungsstücke gegeben seyn müssen, wenn dieselbe soll construirt werden können. Da übrigens die in Zahlen gegebenen Seiten oder Diagonalen der Figur mit Hülfe des Maaßstabes als Linien sich angeben lassen, und die ihrer Größe nach gegebenen Winkel mittelst des Transporteurs sich unmittelbar angeben lassen: so kömmt es bei der Auflösung einer solchen Aufgabe immer bloß darauf an, aus unmittelbar in hinreichender Anzahl gegebenen Bestimmungsstücken einer Figur, diese zu construiren, wozu bereits vielfach die Anleitung gegeben ist, und ins besondere findet man die hierbei anwendbaren Sätze, §. 2. Seite 116, §. 4. Seite 127 und §. 6. Seite 137 ꝛc.

Diese Aufgaben finden ihre Anwendung, wenn eine auf dem Felde dadurch aufgenommene Figur, daß man Seiten und Winkel derselben gemessen hat, nun aufgetragen und hierdurch eine Zeichnung derselben entworfen werden soll.

Anmerkung. Ist die auf dem Felde aufzunehmende Figur nicht zu groß, so vermeidet man es, Winkel zu messen, sondern man mißt statt derselben Diagonalen, und hat so den Vortheil, daß bei dem Auftragen der Transporteur nicht gebraucht wird, sondern nun jedes der Dreiecke, aus welchen die Figur besteht, durch die drei gegebenen Seiten desselben construirt werden kann.

Soll eine Figur construirt werden, die einer gegebenen ähnlich ist und die eine bestimmte Größe hat, so kann dieses zwar immer nach Anleitung des 25sten Satzes geschehen, indessen können hier noch folgende Fälle unterschieden werden:

3) Ist die Größe der zu entwerfenden Figur in Zahlen gegeben, so muß auch der Inhalt der Figur, welcher sie ähnlich werden soll, in Zahlen gegeben seyn; und man kann nun eine Seite der zu entwerfenden Figur durch den Satz finden: ähnliche Figuren verhalten sich ihrer Größe nach zu einander, wie die Quadrate

gleichnamiger Seiten derselben. Es können also hierbei die Aufgaben 501 — 10. angewandt werden, und die Aufgabe wird hierdurch auf den Fall Nr 1. zurückgeführt.

Diese Aufgabe findet ihre Anwendung, wenn man auf dem Felde eine Figur von einer bestimmten Form abstecken will, die eine gegebene Größe haben soll.

4) Sind endlich, wie bei dem 25sten Satze, zwei Figuren **C** und **D** wirklich gegeben, und soll die zu construirende der einen **C** ähnlich, und der andern **D** gleich werden, so läßt sich im Allgemeinen die Aufgabe nach der Anleitung in dem Zusatze zu Satz 25. lösen; und es kann diese Auflösung in einzelnen Fällen abgekürzt werden, wenn die Form, welche die Figur erhalten soll, von der Art ist, daß eine einfache Formel für ihren Inhalt sich angeben läßt.

Diese Aufgabe läßt sich vielfach bei der Auflösung schwieriger Aufgaben dadurch benutzen, daß man die zu lösende Aufgabe umkehrt, und hierdurch eine Figur erhält, die der gesuchten ähnlich ist. Mehrere Anwendungen hiervon enthalten die Aufgaben in der folgenden Beilage.

Die beiden Aufgaben Satz 18. und 25. sind, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, rein praktisch; die noch übrigen Aufgaben aber, Satz 28. und 29., dienen als Grundlage zur Erweiterung der Theorie. Der eigentliche Zweck derselben ist: eine für alle Fälle anwendbare Methode zu begründen, durch welche alle geometrischen Aufgaben sich lösen lassen, die, algebraisch behandelt, zu einer quadratischen Gleichung führen. Diese Aufgaben schließen sich daher unmittelbar an die beiden Aufgaben Satz 11. und 14. des 2ten Buches an, durch welche eben dieser Zweck für den Fall erreicht wird, wenn eine Aufgabe zu einer einfachen quadratischen Gleichung von einer der Formen führt

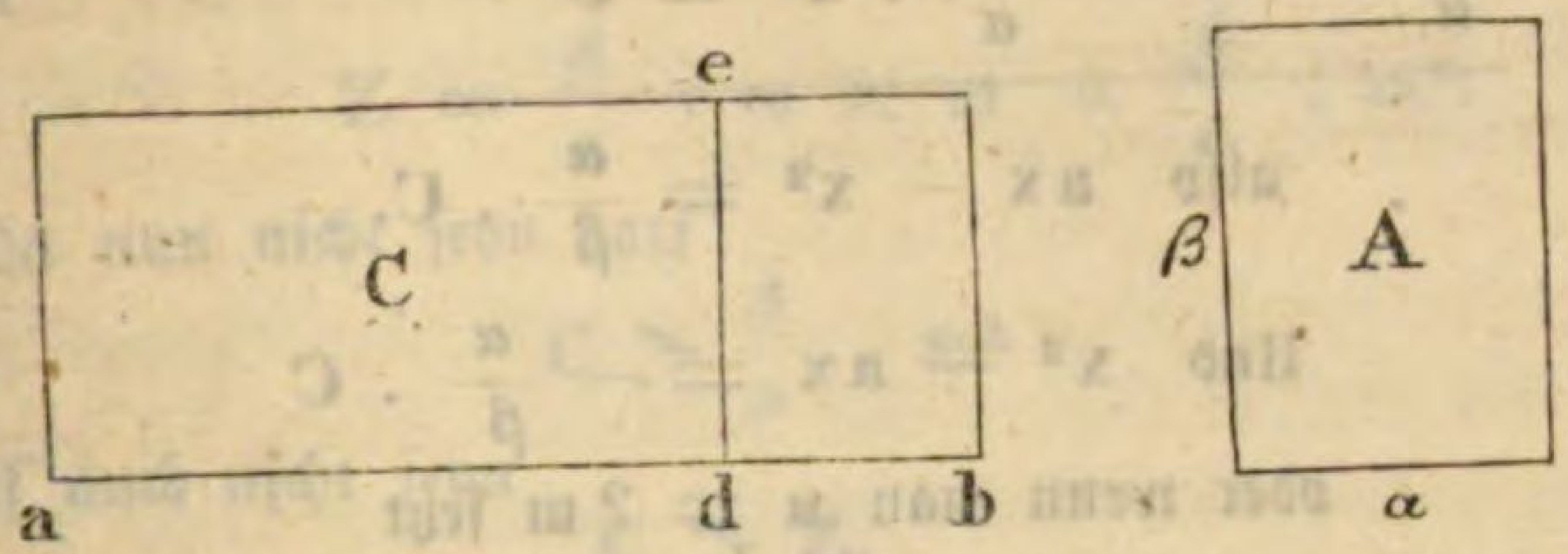
$$x^2 + ax = A$$
$$x^2 - ax = A$$
und $$ax - x^2 = A$$

wie in der Beilage **X.** Seite 206 u. f. nachgewiesen wird.

Die Aufgaben Satz 28. und 29. des 6ten Buches, sollen dazu dienen: eine Aufgabe auch in dem Falle auflösen zu können, wenn x^2 mit einem Coëfficienten von der allgemeinen Form $\frac{\beta}{\alpha}$ versehen ist, wo β und α gegebene Linien sind. Es enthalten diese Aufgaben daher die des zweiten Buches als besondere Fälle unter sich.

Die Aufgabe Satz 28. lautet:

Es soll an einer gegebenen Linie ab ein Parallelogramm ae entworfen werden, das einer gegebenen Figur C gleich, und dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramme A ähnlich ist.



Wird hier A als ein Rechteck angenommen, dessen Seiten α und β sind, so ist auch C ein Rechteck; und es ist nun, da die Ergänzung be $\sim$ A seyn soll

$$\alpha : \beta = bd : de$$

und daher für bd = x

$$\alpha : \beta = x : (de)$$

$$\text{folglich ist } (de) = \frac{\beta x}{\alpha}.$$

Setzt man nun die gegebene Linie ab = a, so ist, weil bd = x seyn soll, ad = a — x

$$\text{und da } ad \times de = C$$

$$\text{so ist auch } (a - x) \cdot \frac{\beta x}{\alpha} = C$$

und dieses giebt die quadratische Gleichung

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot ax - \frac{\beta}{\alpha} x^2 = C,$$

welches die Gleichung Nr. 3., Seite 210, in einer allgemeineren Form ist; und man erhält hieraus den dort berücksichtigten Fall, wenn A ein Quadrat ist; denn in diesem Falle wird $\alpha = \beta$, und die Gleichung wird

$$ax - x^2 = C.$$

Zusatz. Diese Gleichung sowohl, als die allgemeinere

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot ax - \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 = C$$

führt nicht in allen Fällen zu einem reellen Resultate, und es ist daher nothwendig, die Bedingungen festzustellen, unter welchen sie benutzt werden kann. Dieses nun geschieht durch den der Aufgabe

Satz 28. vorhergehenden Lehrsatz, Satz 27., der aus der allgemeinen Gleichung sich, wie folgt, ableiten läßt.

Die allgemeine Gleichung ist

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot ax - \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 = C$$

$$\text{also} \quad ax - x^2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot C.$$

$$\text{Und} \quad x^2 - ax = - \frac{\alpha}{\beta} \cdot C$$

oder wenn man $a = 2m$ setzt

$$x^2 - 2mx = - \frac{\alpha}{\beta} \cdot C$$

$$\text{hierzu} \quad m^2 = m^2$$

$$\text{giebt} \quad x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot C$$

$$\text{also} \quad (x - m)^2 = m^2 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot C$$

$$\text{und weil} \quad m^2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot m^2$$

$$(x - m)^2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot m^2 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot C$$

$$\text{nämlich es ist} \quad (x - m)^2 = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot m^2 - C\right)$$

Da nun hieraus folgt $x - m = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot m^2 - C\right)}$ so ergiebt sich zugleich, daß nicht seyn darf

$$C > \frac{\beta}{\alpha} \cdot m^2$$

weil sonst der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ wird, und daher alsdann x keinen reellen Werth erhalten kann.

Die Beschränkung für den Gebrauch der Gleichung, zu welcher die Aufgabe Satz 28. führt, ist also: es darf nicht seyn

$$C > \frac{\beta}{\alpha} \cdot m^2.$$

Da nun aber $ab = a = 2m$ gesetzt wurde, so ist m die halbe Linie ab; und beschreibt man über diese halbe Linie ein Rechteck, ähnlich A, und setzt die zweite Seite dieses Rechtecks $= z$: so ist

$$\alpha : \beta = \mathrm{m} : \mathrm{z}$$

$$\text{alſo } \mathrm{z} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathrm{m}$$

und daher iſt, wenn man den Inhalt dieſes Rechtecks mit Z bezeichnet

$$\mathrm{Z} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathrm{m} \times \mathrm{m} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathrm{m}^2.$$

Da nun nicht ſeyn darf

$$\mathrm{C} > \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathrm{m}^2$$

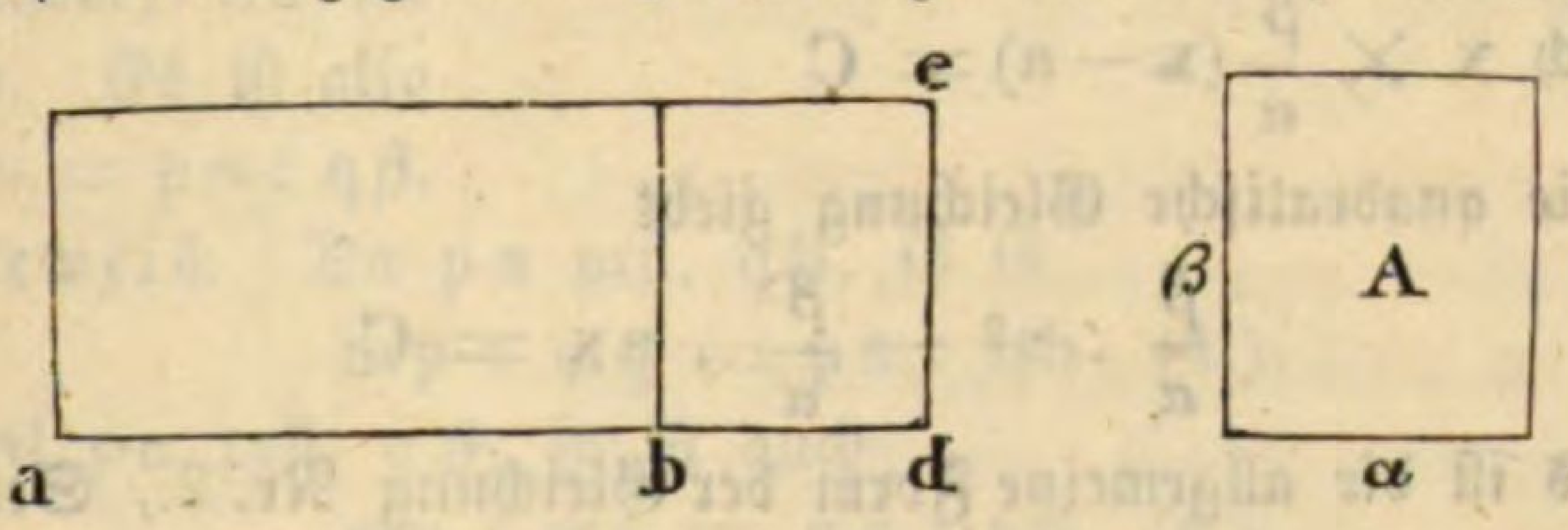
ſo darf auch nicht ſeyn

$$\mathrm{C} > \mathrm{Z}.$$

Das an ab zu entwerfende Rechteck = C, deſſen Ergänzung ähnlich A ſeyn ſoll, darf alſo nicht größer ſeyn, als das der Ergänzung und alſo auch A ähnliche Rechteck Z, welches über der halben Linie ab beſchrieben werden kann; und dieſes iſt der 27ſte Satz.

Die Aufgabe Satz 29. lautet:

Es ſoll an einer gegebenen Linie ab ein Parallelogramm ae entworfen werden, das einer gegebenen Figur C gleich, und deſſen Ueberſchuß einem gegebenen Parallelogramme A ähnlich ſey.



Wird hier, wie bei der vorigen Aufgabe, A als ein Rechteck angenommen, deſſen Seiten α und β ſind, ſo iſt auch C ein Rechteck; und es iſt nun, da der Ueberſchuß be $\sim$ A ſeyn ſoll

$$\alpha : \beta = \mathrm{bd} : \mathrm{de}$$

$$\text{und daher für } \mathrm{bd} = \mathrm{x}$$

$$\alpha : \beta = \mathrm{x} : (\mathrm{de})$$

$$\text{folglich iſt } (\mathrm{de}) = \frac{\beta \mathrm{x}}{\alpha}.$$

Setzt man alſo die gegebene Linie ab = a, ſo iſt ad = x + a; und da

$$\mathrm{ad} \times \mathrm{de} = \mathrm{C}$$

$$\text{ſo iſt auch } (\mathrm{x} + \mathrm{a}) \times \frac{\beta \mathrm{x}}{\alpha} = \mathrm{C}$$

und dieses giebt die quadratische Gleichung

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot ax = C$$

welches die Gleichung Nr. 1., Seite 210, in einer allgemeinen Form ist; und man erhält hieraus den dort angegebenen Fall, wenn der Ueberschuß ein Quadrat werden soll, wenn also $\alpha = \beta$ ist. Bei dieser Voraussetzung wird die Gleichung

$$x^2 + ax = C.$$

Auf diesen Zusammenhang dieser Aufgaben des sechsten Buches mit denen des zweiten Buches wird übrigens ausdrücklich durch die Aufgabe Satz 30. aufmerksam gemacht, welche den 11ten Satz des zweiten Buches enthält und nachweiset, wie diese Aufgabe bloß einen besonderen Fall von dem 29sten Satze begreift.

Zusatz. Setzt man in dem Rechteck $ae = C$ die verlängerte Linie $ad = x$, so wird, weil $ab = a$ seyn soll, $bd = x - a$; und da $\alpha : \beta = bd : de$

so ist $\alpha : \beta = x - a : (de)$

also $(de) = \frac{\beta}{\alpha}(x - a)$.

Und da $ad \times de = C$

so ist auch $x \times \frac{\beta}{\alpha}(x - a) = C$

welches die quadratische Gleichung giebt

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot ax = C$$

und dieses ist die allgemeine Form der Gleichung Nr. 2., Seite 210.

Anmerkung. Aus der hier mitgetheilten Erläuterung geht hervor: wie die beiden Aufgaben Satz 28. und 29. benutzt werden können, um jede geometrische Aufgabe mittelst derselben zu lösen, die, algebraisch behandelt, zu einer der quadratischen Gleichungen führt

1) $\frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot ax = C$

2) $\frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot ax = C$

3) $\frac{\beta}{\alpha} \cdot ax - \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 = C$

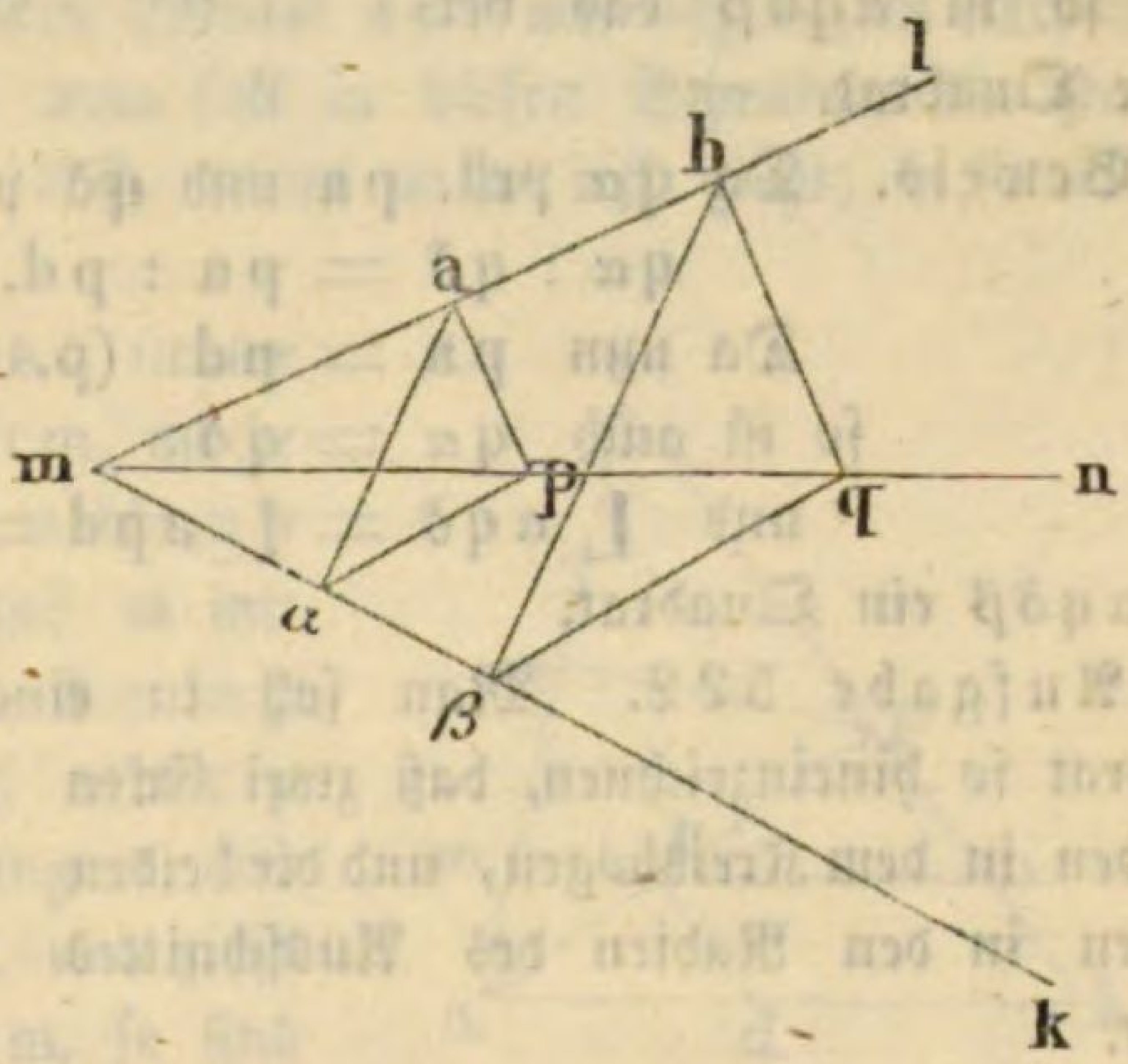
wo a, α und β gegebene Linien, und C eine gegebene Fläche ist.

XXXI. Aufgaben, die mit Hülfe der Sätze des sechsten Buches sich lösen lassen.

§. 31.

Aufgaben, deren Auflösungen von einfachen Proportionen abhängen.

Gehen drei gerade Linien von einem Punkte m aus, und werden in der einen mn dieser Linien beliebig zwei Punkte p und q angenommen, und zieht man von diesen Punkten pa und qb parallel an ml und $p\alpha$, $q\beta$ parallel an mk; so daß also ist pa parallel qb und $p\alpha$ parallel $q\beta$: so stehen die ersteren dieser beiden Linien in demselben Verhältnisse zu einander, wie die letzteren. Es ist also $pa : qb = p\alpha : q\beta$.



Beweis. Da pa prll. qb, so ist

$$mp : mq = pa : qb \quad (4.)$$

und weil $p\alpha$ prll. $q\beta$, so ist auch

$$mp : mq = p\alpha : q\beta \quad (4.)$$

und folglich $pa : qb = p\alpha : q\beta$ (V. 11.)

Zusatz. Da $pa : qb = p\alpha : q\beta$

und $\llcorner ap\alpha = \llcorner bq\beta$

so ist, wenn man $a\alpha$ und $b\beta$ zieht

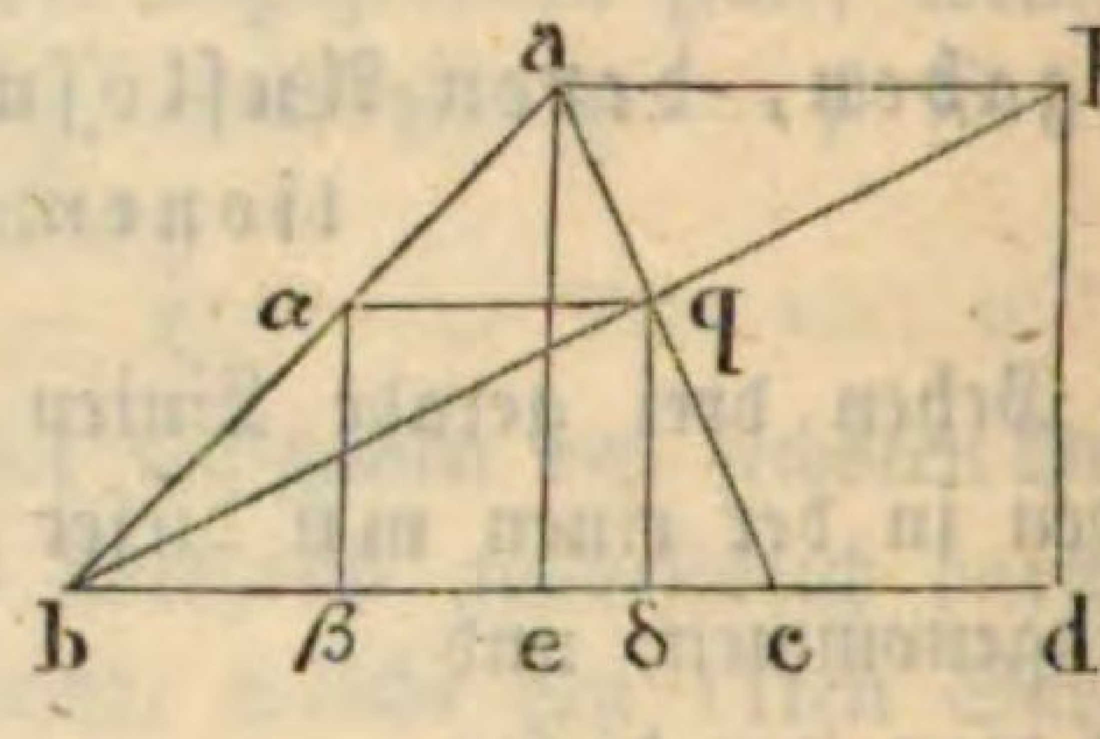
$$\Delta ap\alpha \backsim bq\beta \quad (5.)$$

und es ist daher $ap : bq = a\alpha : b\beta$

und $a\alpha$ prll. $b\beta$.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz läßt sich bei der Auflösung vieler Aufgaben mit gutem Erfolge benutzen, wie aus den Aufgaben des gegenwärtigen Paragraphen, deren Auflösungen auf diesem Satze beruhen, sich ergiebt.

Aufgabe 521. Ein Dreieck abc ist gegeben; man soll ein Quadrat beschreiben, dessen eine Seite in bc liegt, und von welchem zwei Ecken in den Seiten ab und ac des Dreiecks sich befinden.



Auflösung. Ziehe die Normale ae des Dreiecks, nimm ed = ae, vollende das Quadrat aedp, ziehe bp und durch q die qα prll. pa und qδ prll. pd, und ziehe endlich αβ prll. ae: so ist αqδβ das verlangte Quadrat.

Beweis. Da qα prll. pa und qδ prll. pd, so ist

$$q\alpha : q\delta = pa : pd.$$

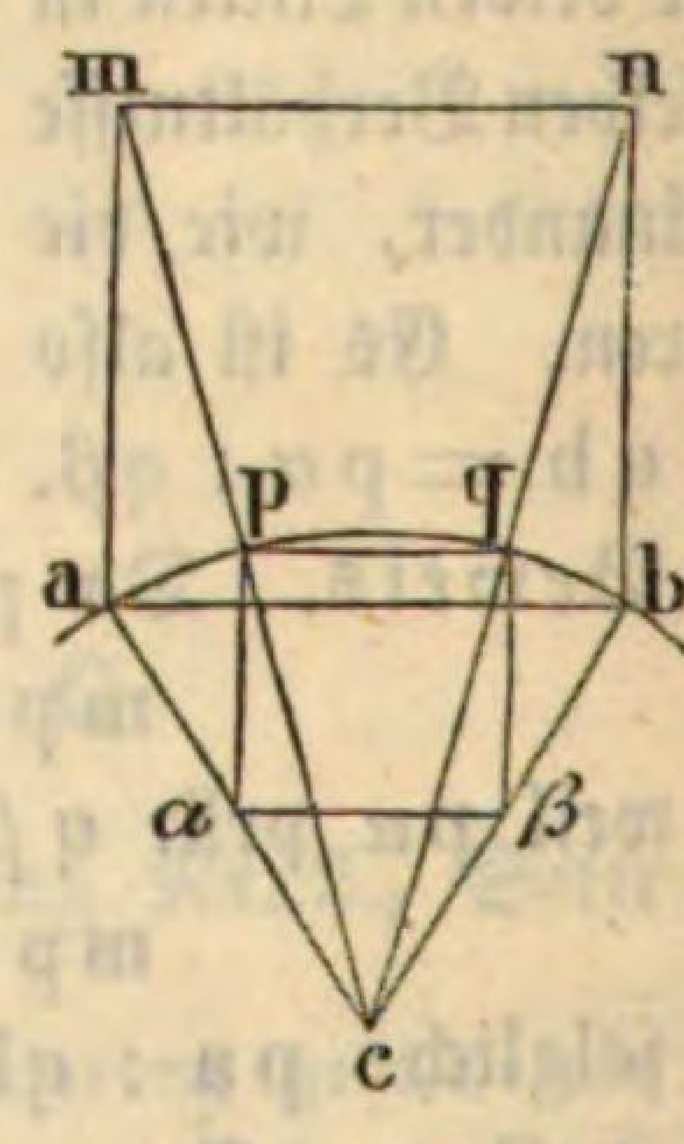
Da nun $pa = pd$ (p. c.)

so ist auch $q\alpha = q\delta$

und $\llcorner \alpha q \delta = \llcorner apd = R$

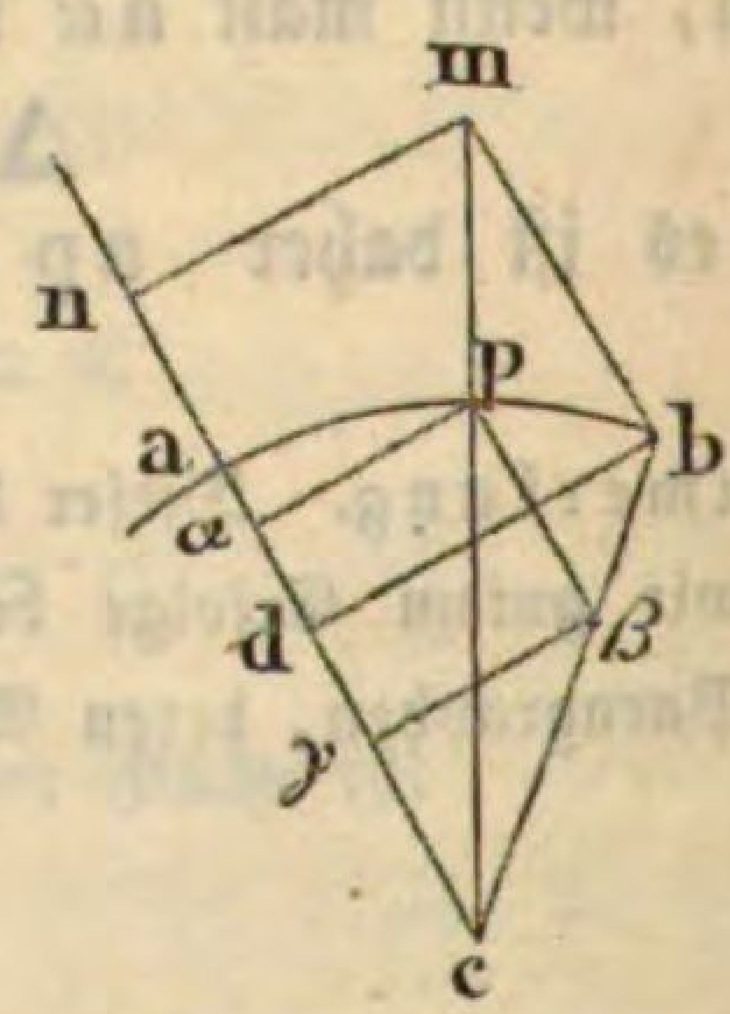
also αqδβ ein Quadrat.

Aufgabe 522. Man soll in einen Kreisausschnitt ein Quadrat so hineinzeichnen, daß zwei Ecken desselben in dem Kreisbogen, und die beiden übrigen in den Radien des Ausschnittes liegen.



Auflösung. Ziehe die Sehne ab des Ausschnittes acb, beschreibe über ab das Quadrat abnm, und ziehe cm, cn: so schneiden diese Linien den Bogen ab in p und q, so daß pq die Seite des gesuchten Quadrates wird.

Aufgabe 523. Man soll in einen Kreisausschnitt ein Quadrat so hineinzeichnen, daß eine Seite des Quadrats in dem Radius ca liegt, eine Ecke in cb, und eine in dem Bogen ab.

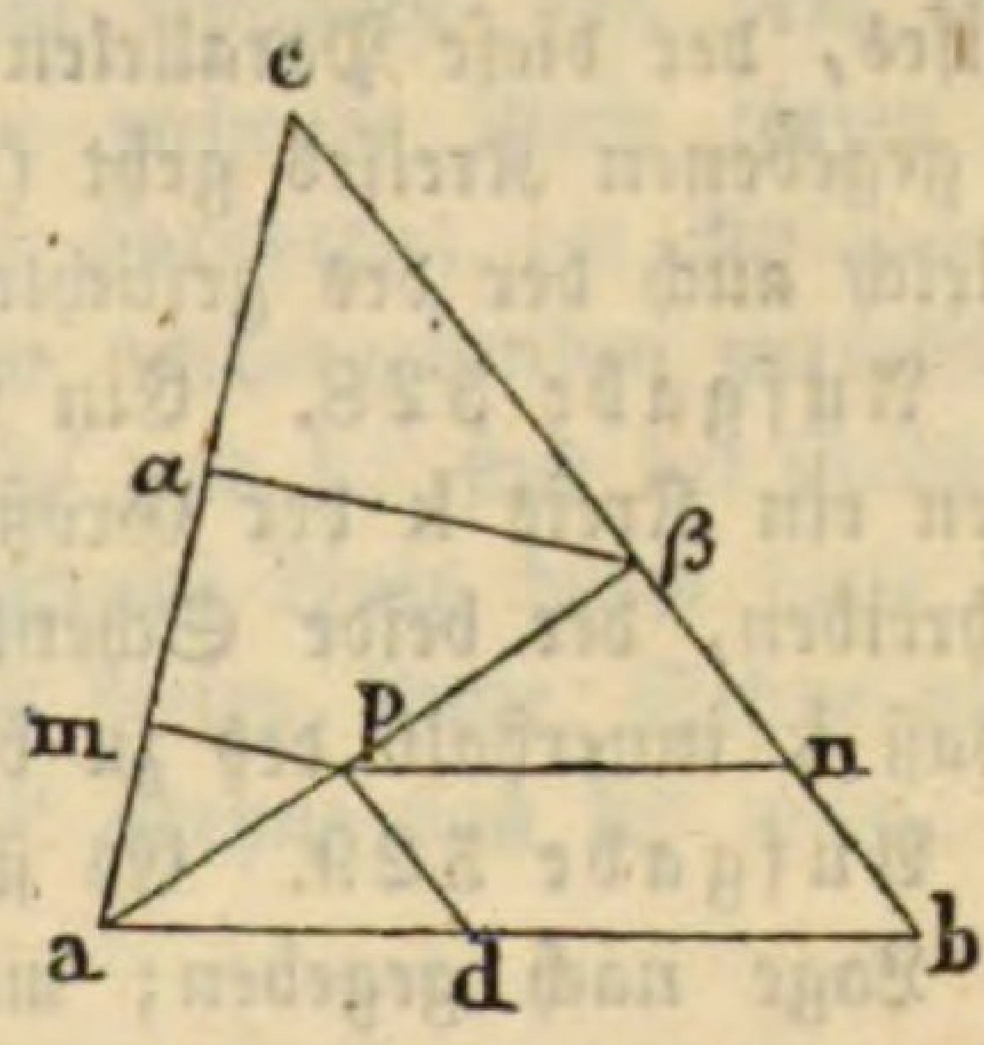


Auflösung. Von b fälle auf ac die Normale bd, verlängere ca, nimm dn = bd, und vollende das Quadrat bdnm. Verbindet man nun c mit m und zieht durch p die pα parallel mn, und pβ parallel mb, und endlich auch βγ parallel mn, so ist pαγβ das gesuchte Quadrat.

Aufgabe 524. In einen Kreisabschnitt soll man ein Quadrat hineinzeichnen, so daß die eine Seite des Quadrats in der Sehne des Abschnittes liegt, und zwei Ecken desselben in dem dazu gehörigen Kreisbogen.

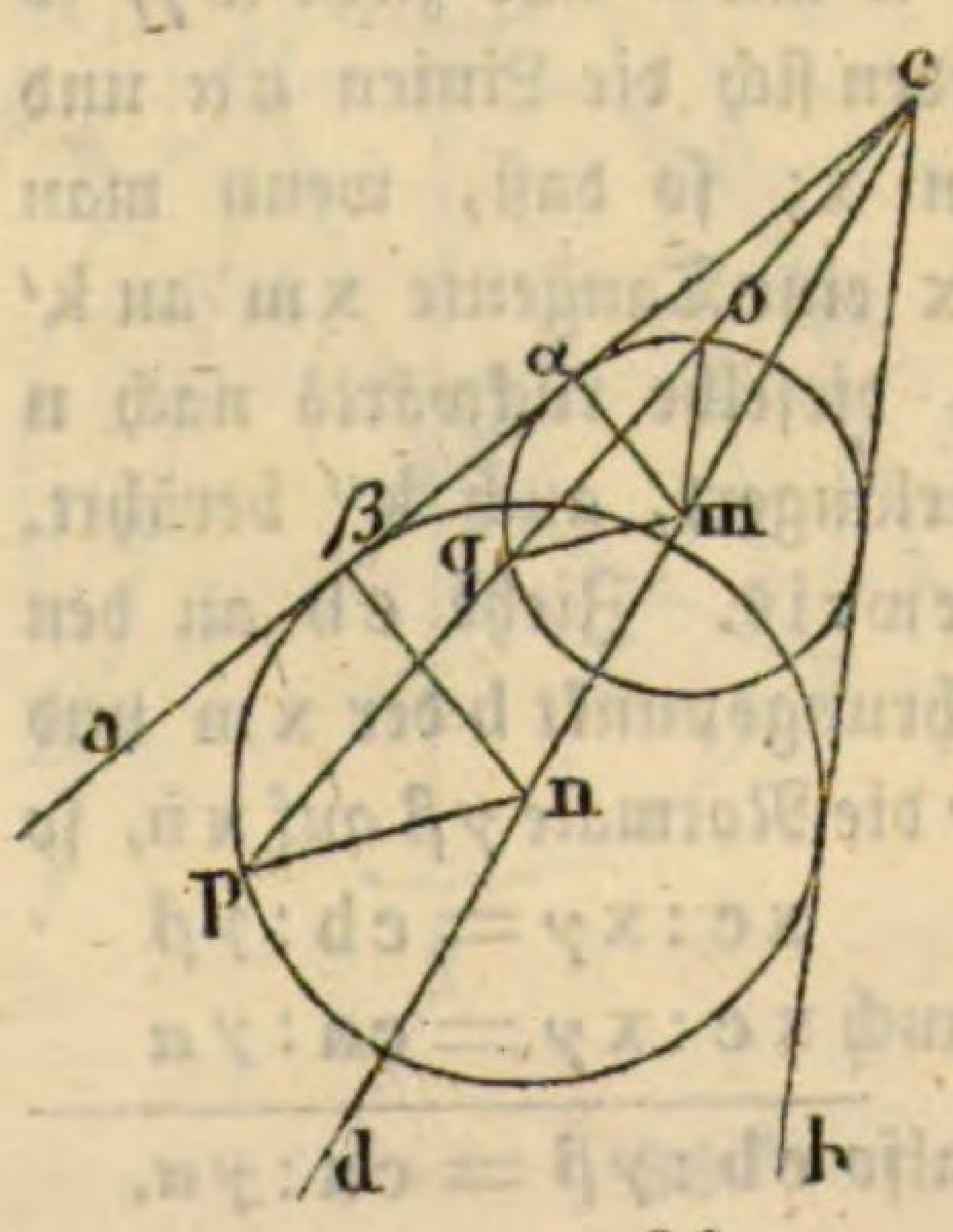
Auflösung. Wird über der ganzen Sehne ein Quadrat beschrieben, und verbindet man die außerhalb der Sehne liegenden beiden Ecken desselben mit dem Halbirungspunkte der Sehne: so schneiden diese Verbindungslinien den Kreisbogen in den beiden Punkten, in welchen das zu beschreibende Quadrat den Kreisbogen trifft.

Aufgabe 525. Ein Winkel **acb** mit begrenzten Schenkeln **ca** und **cb** ist gegeben; man soll in diesen Schenkeln die Punkte α und β so bestimmen, daß, wenn man $\alpha\beta$ zieht, $\alpha\beta = \alpha a = \beta b$ wird.



Auflösung. In **ac** nehme man beliebig einen Punkt m, mache **bn** = **am**, ziehe durch n die **np** prll. **ba**, und schlage aus m mit **ma** einen Bogen, der die **bn** in p schneidet. Wird hierauf **a** mit **p** verbunden und **ap** verlängert, bis sie die **bc** in β schneidet, und zieht man hierauf $\alpha\beta$ prll. **pm**, so sind die hierdurch bestimmten Punkte β und α die gesuchten.

Aufgabe 526. Innerhalb eines Winkels ist ein Punkt **p** gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Umfang durch **p** geht, und der beide Schenkel des Winkels berührt.



Auflösung. Halbire den gegebenen Winkel **acb** durch die Linie **cd**. Von irgend einem Punkte **m** der **cd** fälle die Normale $m\alpha$ auf den einen Schenkel **ca**, und beschreibe mit $m\alpha$ einen Kreis, so berührt dieser beide Schenkel des Winkels (VI. 4.). Man ziehe **cp** und hierauf **qm**; wird nun durch **p** die **pn** parallel **qm** gezogen,

so ist n der Mittelpunkt und np der Radius des zu beschreibenden Kreises.

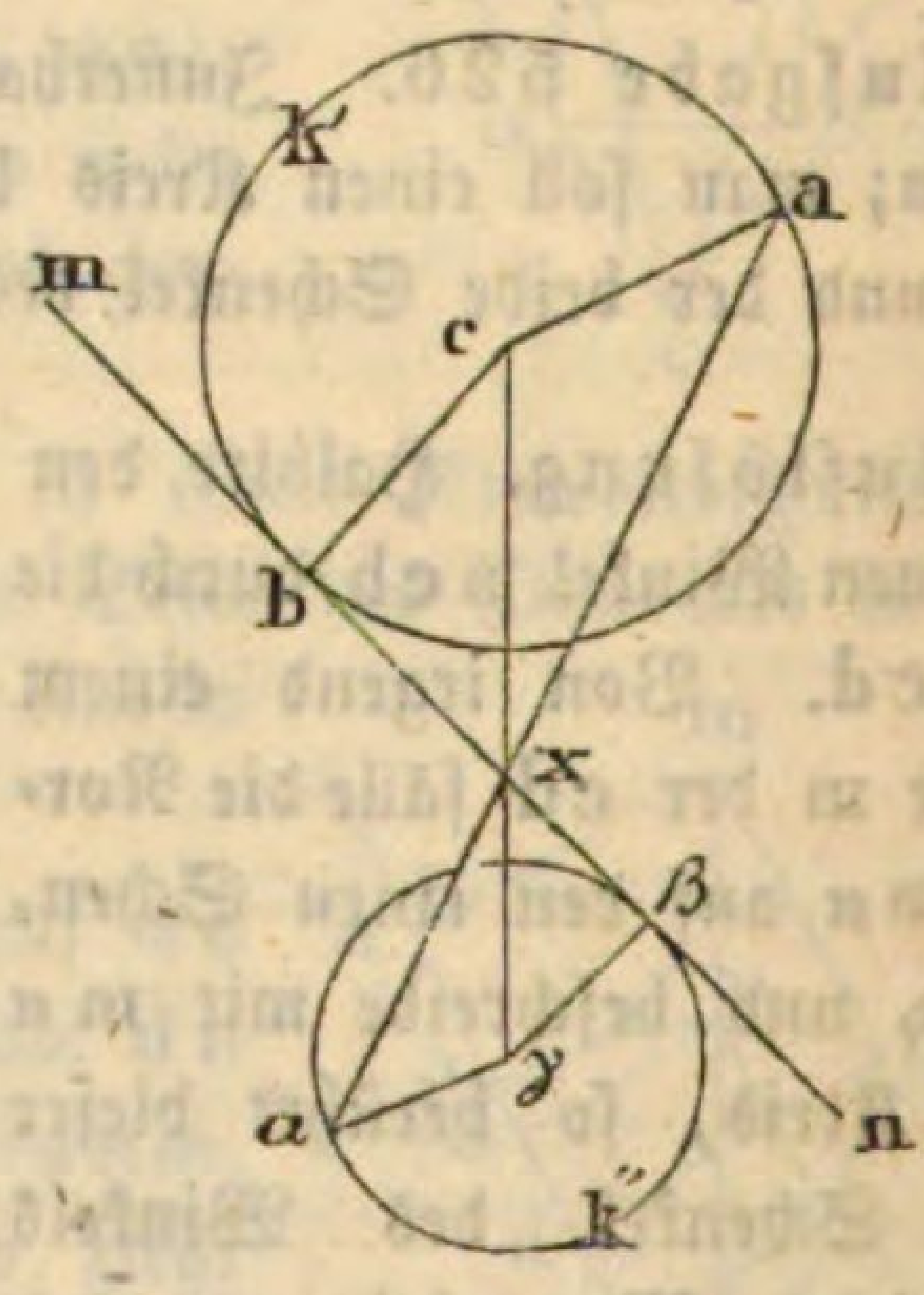
Anmerkung. Es giebt auch einen zweiten Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Mittelpunkt desselben wird gefunden, wenn man mo zieht und durch p eine Parallele mit mo, bis sie die cd trifft.

Aufgabe 527. Ein Winkel ist gegeben und innerhalb desselben ein Kreis k der Größe und Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, der k und beide Schenkel des Winkels berührt, so daß k und der beschriebene Kreis außer einander liegen.

Auflösung. Ist R der Radius von k, so ziehe man mit beiden Schenkeln des Winkels Parallelen in einem Abstande = R, die außerhalb des Winkels liegen; und suche den Mittelpunkt des Kreises, der diese Parallelen berührt, und durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht (Aufg. 526.), so ist dieser Mittelpunkt zugleich auch der des gesuchten Kreises.

Aufgabe 528. Ein Winkel ist gegeben und innerhalb desselben ein Kreis k der Größe und Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, der beide Schenkel des Winkels berührt, und auch k, so daß k innerhalb des zu beschreibenden Kreises liegt.

Aufgabe 529. Es sind zwei Kreise k′ und k″ der Größe und Lage nach gegeben; man soll zwischen denselben eine gerade Linie durchziehen, die beide Kreise berührt.



Auflösung. Man ziehe die Radien ca und $\gamma\alpha$ prll., aber in entgegengesetzter Lage, verbinde a mit α und ziehe $c\gamma$, so schneiden sich die Linien $a\alpha$ und $c\gamma$ in x; so daß, wenn man von x eine Tangente xm an k′ zieht, dieselbe rückwärts nach n zu verlängert, auch k″ berührt.

Beweis. Ziehe cb an den Berührungspunkt b der xm und von γ die Normale $\gamma\beta$ auf xn, so ist $xc : x\gamma = cb : \gamma\beta$
aber auch $xc : x\gamma = ca : \gamma\alpha$

also $cb : \gamma\beta = ca : \gamma\alpha$.

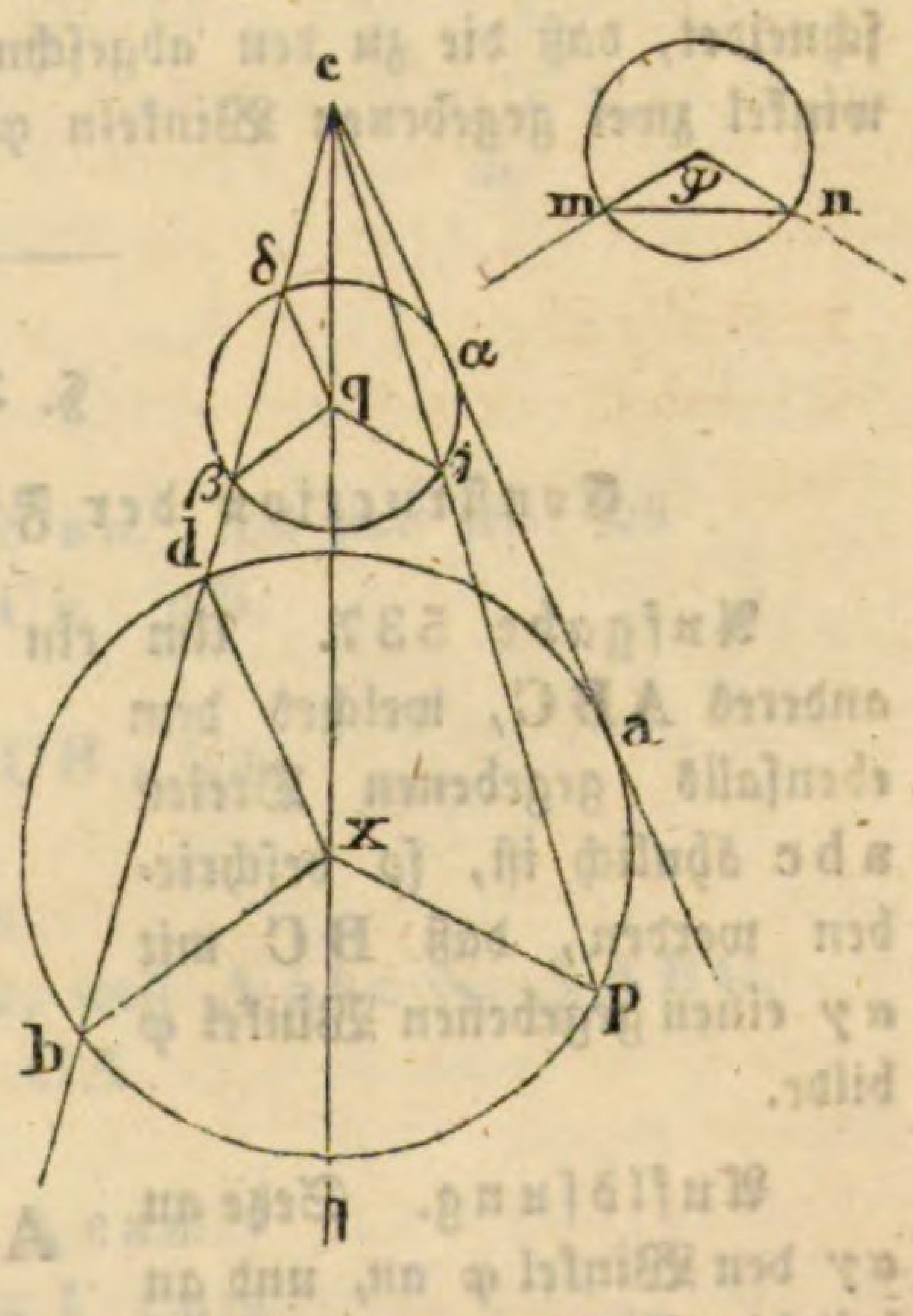
Da nun $cb = ca$, so ist auch $\gamma\beta = \gamma\alpha$, also $\gamma\beta$ ein Radius des Kreises k'', und da $\gamma\beta$ normal auf xn steht, so ist xn Tangente dieses Kreises.

Aufgabe 530. Zwei Kreise k' und k'' sind der Größe und Lage nach gegeben; es soll eine gerade Linie gezogen werden, die beide Kreise so berührt, daß beide auf einer und derselben Seite dieser Linie liegen.

Aufgabe 531. Zwei Kreise k' und k'' sind der Größe und Lage nach gegeben; es soll eine gerade Linie so gezogen werden, daß sie den Kreis k' berührt, und k'' so schneidet, daß ein der Größe nach gegebenes Stück, $= S$ der Linie, Sehne dieses Kreises wird.

Analysis. Da S der Größe nach gegeben ist, so ist auch der Abstand dieser Sehne von dem Mittelpunkte des Kreises k'' gegeben; und beschreibt man in diesem Abstande von dem Mittelpunkte einen Kreis, so muß die zu ziehende Linie diesen Kreis berühren, aber auch k' soll die Linie berühren; die Aufgabe läßt sich daher immer auf eine der beiden vorhergehenden zurückführen.

Aufgabe 532. Zwei Kreise k' und k'' sind der Größe und Lage nach gegeben; es soll eine gerade Linie durch diese Kreise gezogen werden, so daß ein Stück S' dieser Linie Sehne von k', und ein ebenfalls gegebenes Stück S'' Sehne von k'' wird.



Aufgabe 533. Es ist ein Winkel acb gegeben, und ein Punkt p; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Umfang durch den Punkt p geht, der den einen Schenkel ca des Winkels acb berührt, und den andern Schenkel cb so schneidet, daß der zu dem abgeschnittenen Bogen gehörige Centriwinkel einem ebenfalls gegebenen Winkel φ gleich ist.

Auflösung. Aus dem Scheitel des gegebenen Winkels φ beschreibe mit einem beliebigen Radius einen Kreis und ziehe die Sehne mn. Hierauf beschreibe

man mit demselben Radius einen Kreis $\alpha\delta\beta$, der ca berührt und cb so schneidet, daß ein Stück $\beta\delta$ = mn Sehne dieses Kreises wird (Aufg. 237.). Verbindet man nun c mit p, zieht von c durch den Mittelpunkt q eine Linie, zieht den Radius $q\gamma$, und durch p derselben parallel die px, welche die cl in x schneidet, so ist x der Mittelpunkt und xp der Radius des gesuchten Kreises.

Aufgabe 534. Es ist ein Winkel gegeben, und ein Punkt p; man soll einen Kreis beschreiben, dessen Umfang durch p geht, und der die Schenkel des gegebenen Winkels so schneidet, daß die auf den abgeschnittenen Bogen stehenden Centriwinkel zwei ebenfalls gegebenen Winkeln φ' und φ'' gleich sind.

Auflösung. So wie die vorige Aufgabe auf Aufg. 237. zurückgeführt werden kann, eben so läßt sich die gegenwärtige auf Aufgabe 242. zurückführen.

Aufgabe 535. Ein Winkel ist gegeben, und ein Kreis k der Größe und Lage nach; es soll ein Kreis beschrieben werden, der k und einen Schenkel des Winkels berührt, den anderen Schenkel aber so schneidet, daß der zu dem abgeschnittenen Bogen gehörige Centriwinkel einem ebenfalls gegebenen Winkel φ gleich ist.

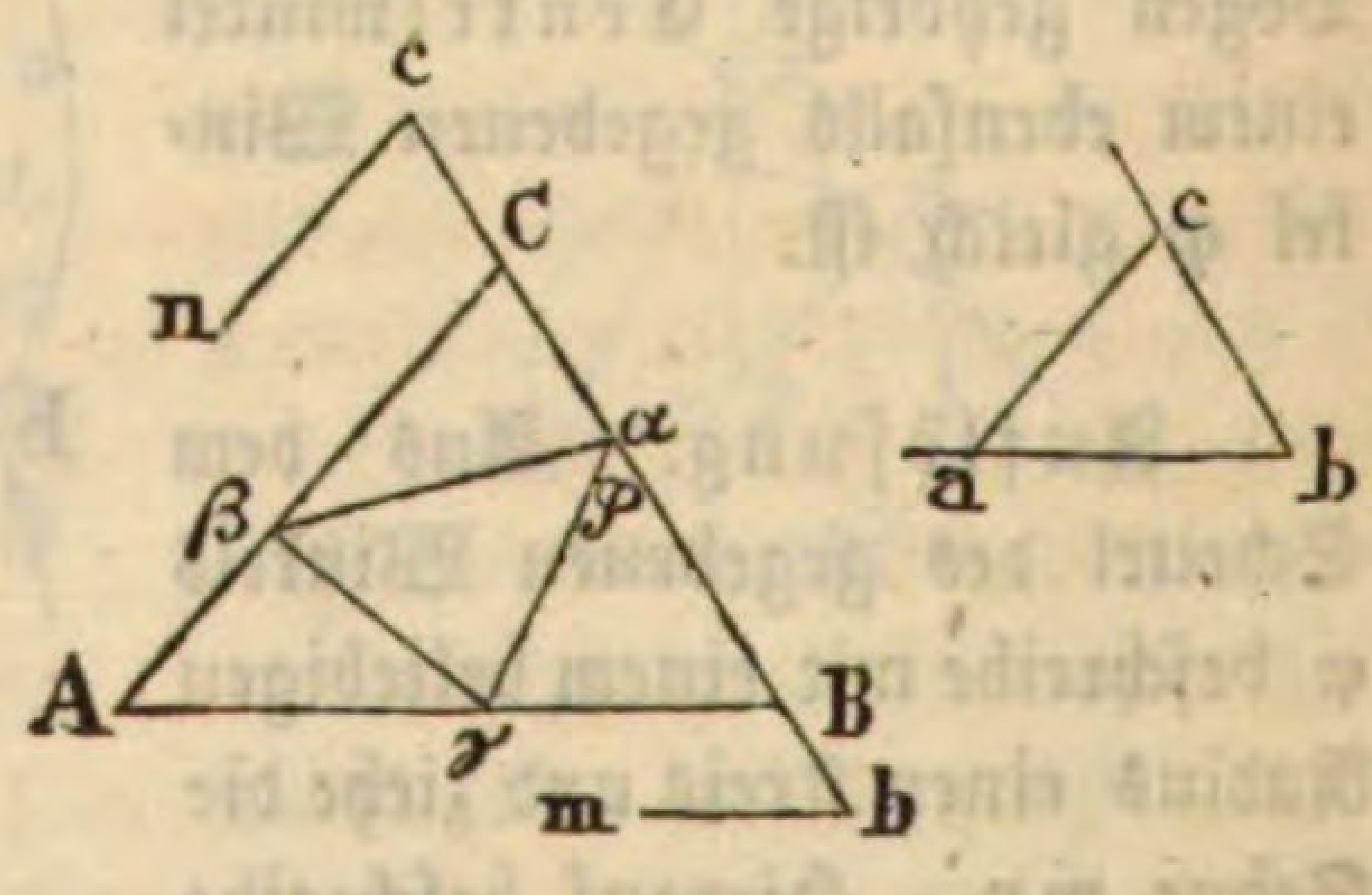
Aufgabe 536. Ein Winkel ist gegeben, und ein Kreis k der Größe und Lage nach; man soll einen Kreis beschreiben, der k berührt, die beiden Schenkel des gegebenen Winkels aber so schneidet, daß die zu den abgeschnittenen Bogen gehörigen Centriwinkel zwei gegebenen Winkeln φ' und φ'' gleich seyen.

---

§. 32.

Construction der Figuren in Figuren.

Aufgabe 537. Um ein gegebenes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ soll ein anderes ABC, welches dem ebenfalls gegebenen Dreieck abc ähnlich ist, so beschrieben werden, daß BC mit $\alpha\gamma$ einen gegebenen Winkel φ bilde.



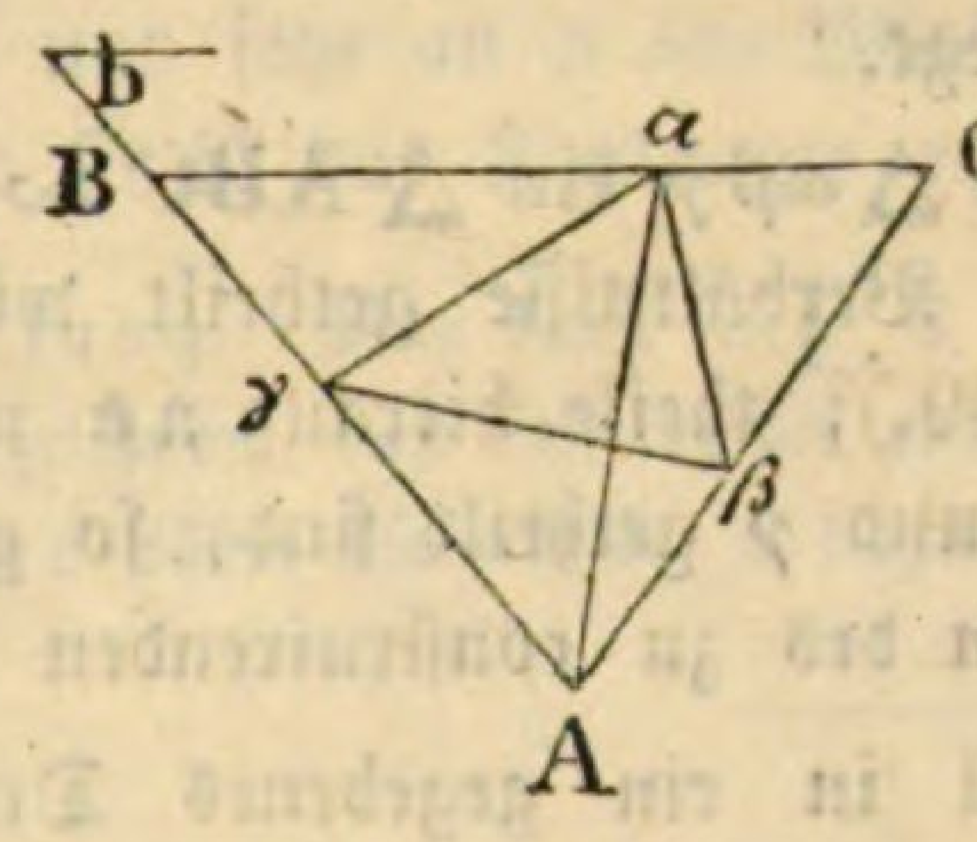
Auflösung. Setze an $\alpha\gamma$ den Winkel φ an, und an beliebige Punkte der angesetzten

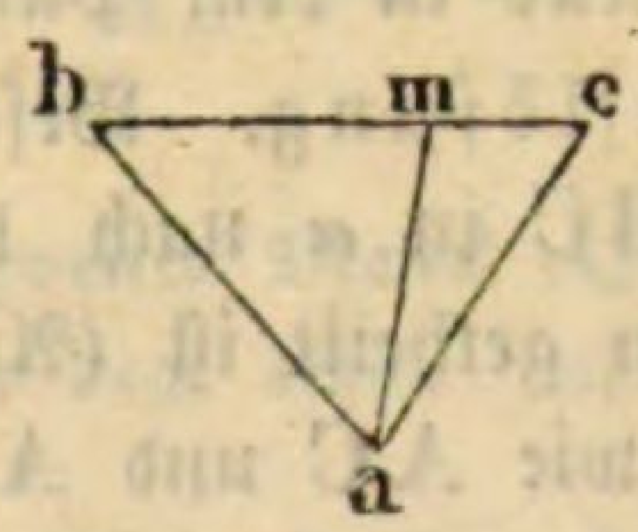
Linie die Winkel c und b; ziehe hierauf durch β eine Linie prll. cn und durch γ eine Linie prll. bm, so wird hierdurch das verlangte Dreieck ABC erhalten.

Aufgabe 538. Man soll in ein Dreieck abc ein Dreieck hineinzeichnen, das einem anderen gegebenen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ähnlich ist, und das eine solche Lage hat, daß die der $\alpha\gamma$ gleichnamige Seite die bc unter einem gegebenen Winkel schneide.

Auflösung. Beschreibe um $\Delta\,\alpha\beta\gamma$ das $\Delta\,ABC \sim \Delta\,abc$ so daß $\angle\, B\alpha\gamma = \varphi$ (Aufg. 537.); theile hierauf bc nach demselben Verhältniß, nach welchem BC in α getheilt ist, ba nach dem Verhältniß wie BA in γ, und ac so wie AC in β getheilt ist: so geben die drei Theilpunkte die Ecken des hineinzuzeichnenden Dreiecks.

Aufgabe 539. Um ein gegebenes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ soll ein dem gegebenen $\Delta\,abc$ ähnliches Dreieck ABC so verzeichnet werden, daß BC in α nach demselben Verhältnisse getheilt werde, nach welchem bc in m getheilt ist.





Analysis. Ziehe am und aα. Da nun seyn soll

$$cm : mb = C\alpha : \alpha B,$$

so ist auch verbunden

$$cb : cm = CB : C\alpha,$$

also verwechselt

$$cb : CB = cm : C\alpha$$

aber $cb : CB = ca : CA$, weil $\Delta\,abc \sim \Delta\,ABC$.

Folglich ist $cm : C\alpha = ca : CA$

und da $\angle\, C = \angle\, c$

so ist $\Delta\, CA\alpha \sim \Delta\, cam$

und daher $\angle\, CA\alpha = \angle\, cam$

und aus gleichen Gründen $\angle\, BA\alpha = \angle\, bam$.

Nun ist $\triangle$ **abc** und der Punkt m gegeben, also auch die Winkel **cam** und **bam**, folglich sind auch die Winkel gegeben **CA**α und **BA**α; aber auch $\triangle \alpha\beta\gamma$ ist gegeben, und daher $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ und $\llcorner\ \beta\alpha\gamma$; folglich kennt man von dem Viereck $\alpha\beta A\gamma$, zwei Seiten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, den von denselben eingeschlossenen Winkel $\beta\alpha\gamma$, und die Winkel $\beta A\alpha$ und $\gamma A\alpha$, welche die Diagonale αA mit den unbekannten Seiten bildet; folglich ist das Viereck $\alpha\beta A\gamma$ gegeben (Aufg. 318.), und hierdurch auch das um $\alpha\beta\gamma$ zu beschreibende Dreieck **ABC**.

Auflösung. Aus $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\llcorner\ \beta\alpha\gamma$, $\llcorner\ \beta A\alpha = \llcorner$ **cam** und $\llcorner\ \gamma A\alpha = \llcorner$ **bam**, beschreibe das Viereck $\alpha\beta A\gamma$ (Aufgabe 318.); an irgend einen Punkt der verlängerten $A\gamma$ setze den Winkel **b** des gegebenen Dreiecks **abc** an, und ziehe mit dem zweiten Schenkel dieses Winkels durch α eine Parallele: so erhält man hierdurch das um $\alpha\beta\gamma$ zu beschreibende Dreieck **ABC** in der der Bedingung der Aufgabe entsprechenden Lage.

Aufgabe 540. In ein gegebenes Dreieck **abc** soll ein dem ebenfalls gegebenen $\triangle \alpha\beta\gamma$ ähnliches Dreieck so hineingezeichnet werden, daß die der α gleichnamige Spitze des hinein zu zeichnenden Dreiecks in dem Punkte m liegt.

Auflösung. Beschreibe um $\triangle \alpha\beta\gamma$ ein $\triangle$ **ABC** $\sim \triangle$ **abc**, so daß **BC** in α nach demselben Verhältnisse getheilt wird, wie **bc** in m getheilt ist (Aufgabe 539.); theile hierauf **ac** und **ab**, eben so wie **AC** und **AB** in β und γ getheilt sind, so geben die Theilpunkte die Lage für die Ecken des zu construirenden Dreiecks.

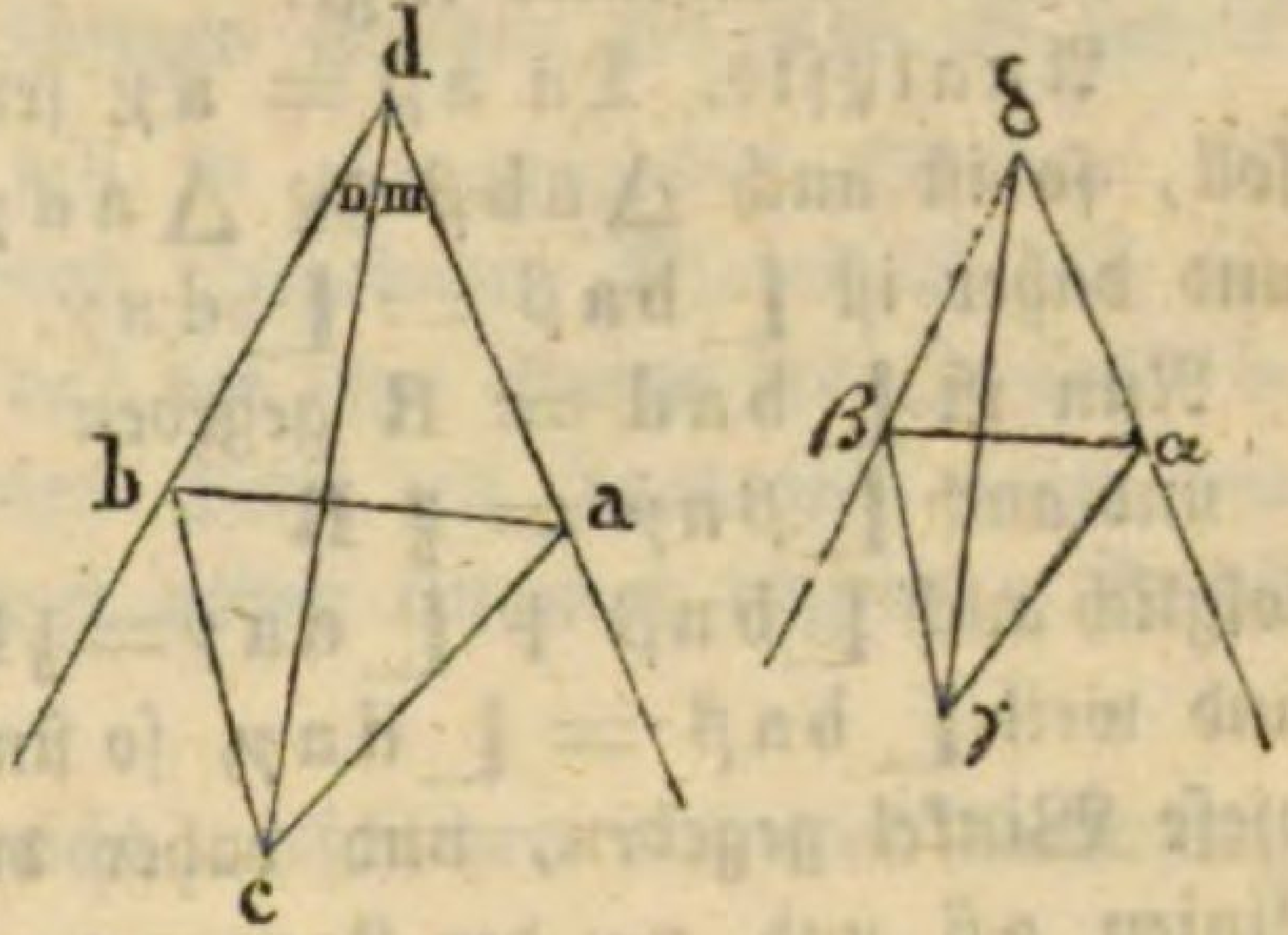
Aufgabe 541. Man soll in ein gegebenes Dreieck ein gleichseitiges Dreieck so eintragen, daß die eine Ecke desselben in einem bestimmten Punkte des Umfanges von dem gegebenen liegt.

Aufgabe 542. Man soll um ein gegebenes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ein dem $\triangle$ **abc** ähnliches **ABC** so beschreiben, daß **BC** in dem Punkte α halbirt wird.

Aufgabe 543. In ein gegebenes Dreieck soll ein ähnliches beschrieben werden, dessen eine Ecke in einem bestimmten Punkte des Umfanges von dem gegebenen liegt, und die anderen beiden Ecken sollen in den beiden übrigen Seiten des gegebenen Dreiecks liegen.

Aufgabe 544. Man soll in ein gegebenes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ein dem $\triangle$ **abc** ähnliches so verzeichnen, daß zwei Seiten dieses Dreiecks mit der einen Seite des gegebenen gleiche Winkel bilden.

Aufgabe 545. Es ist ein Winkel gegeben und ein Punkt; man soll, von diesem Punkte aus, zwei Linien an beide Schenkel des Winkels so ziehen, daß, wenn man die Punkte, in welchen diese Linien die Schenkel treffen, mit einander verbindet, das hierdurch gebildete Dreieck einem gegebenen Dreieck ähnlich wird.

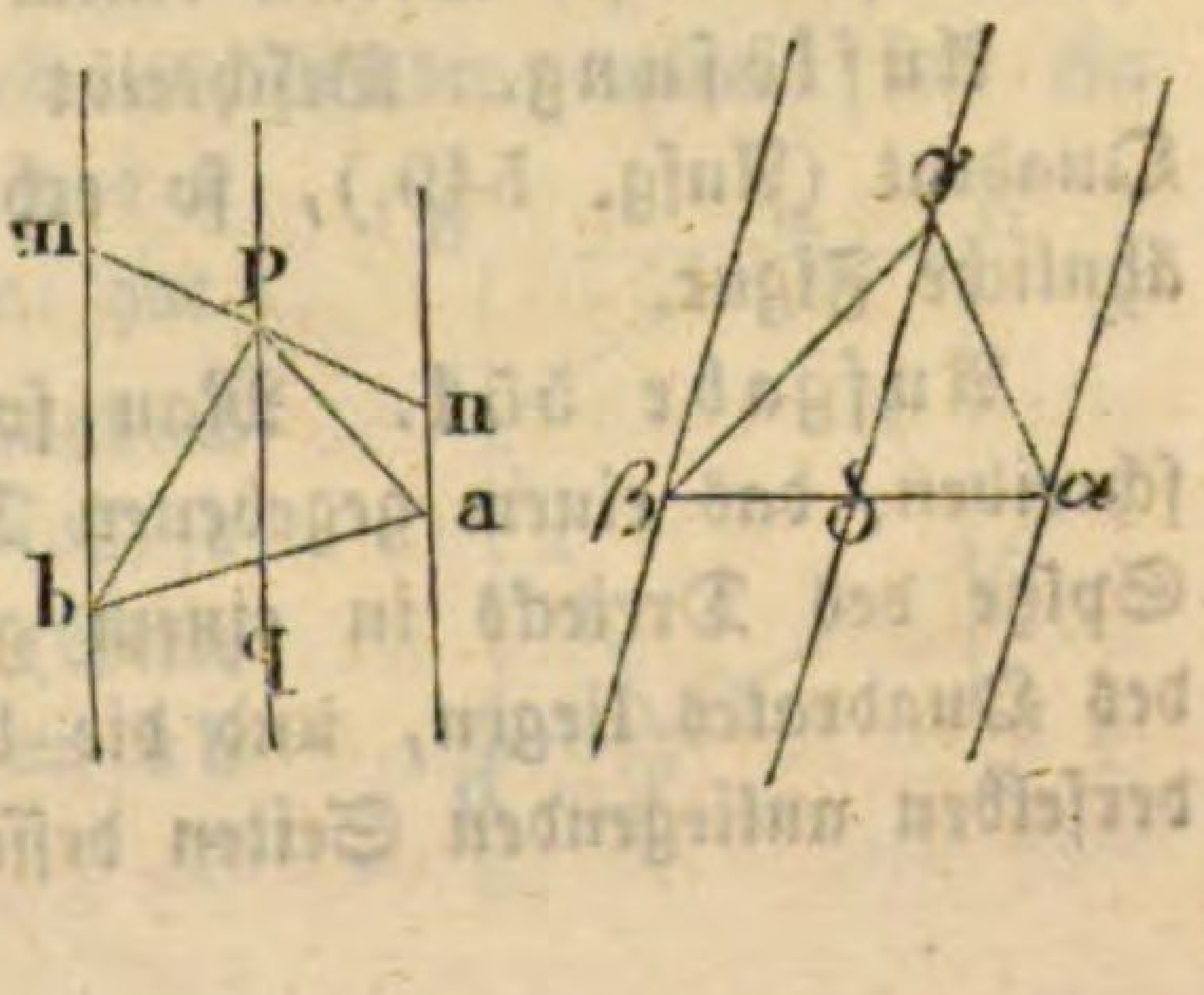


Analysis. Ist adb der gegebene Winkel, c der gegebene Punkt, und abc das gesuchte Dreieck $\sim \Delta \alpha\beta\gamma$, so sind die Winkel m und n gegeben; und vollendet man das Viereck $\alpha\gamma\beta\delta \sim$ acdb, so ist auch $\llcorner \alpha\delta\gamma =$ m und $\llcorner \beta\delta\gamma =$ n. Da nun auch $\Delta \alpha\beta\gamma$ gegeben ist, so ist das Viereck $\alpha\gamma\delta\beta$ gegeben; folglich auch das gesuchte Viereck acdb, in welchem die gegebene Linie cd gleichnamig $\gamma\delta$ ist.

Auflösung. Beschreibe das Viereck $\alpha\gamma\beta\delta$ (Aufg. 318.), ziehe cd und setze an c den Winkel dca $= \llcorner \delta\gamma\alpha$ und $\llcorner$ dcb $= \delta\gamma\beta$: so ist das Verlangte geschehen.

Anmerkung. Man kann in $\llcorner$ d noch ein zweites Dreieck $\sim \Delta \alpha\beta\gamma$ so einzeichnen, daß dasselbe die entgegengesetzte Lage erhält, also daß der Punkt c näher als ab bei d liegt.

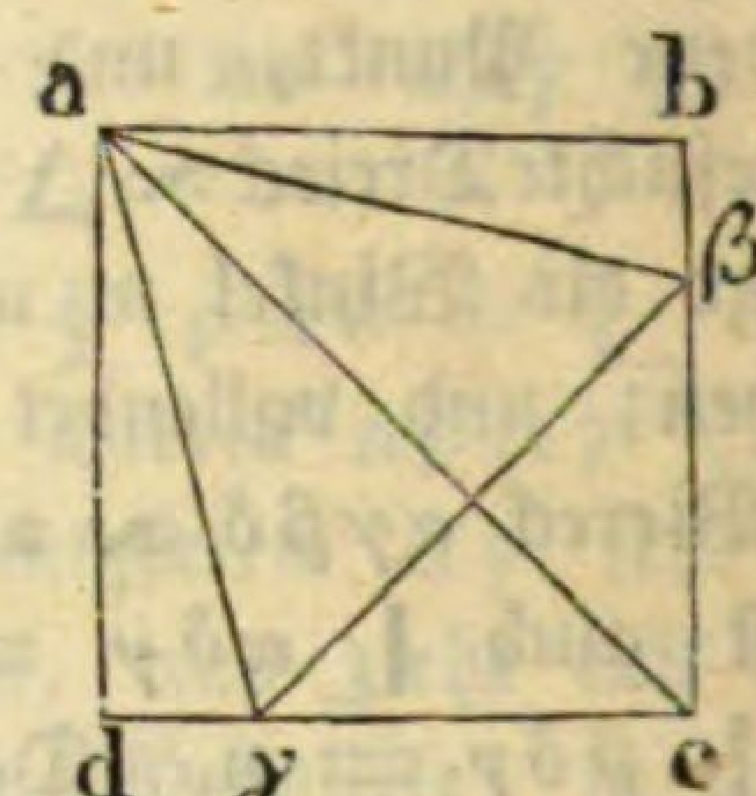
Aufgabe 546. Zwei parallele Linie sind gegeben und zwischen denselben ein Punkt; man soll ein Dreieck beschreiben, von welchem die eine Spitze in dem gegebenen Punkte und die anderen beiden in den gegebenen parallelen Linien liegen, und das einem gegebenen Dreiecke ähnlich sey.



Auflösung. Durch den gegebenen Punkt p ziehe beliebig eine Linie mn, bis sie beide Parallelen trifft; theile die Grundlinie $\alpha\beta$ des gegebenen Dreiecks in δ nach demselben Verhältniß, wie mn in p getheilt ist, und verbinde

γ mit δ. Wird hierauf durch p eine Linie pq prll. den gegebenen Parallelen gezogen, und an p Winkel $qpa = \angle \delta\gamma\alpha$ und $\angle qpb = \angle \delta\gamma\beta$ angesetzt, so ist, wenn man nun ab zieht, Δabc das verlangte Dreieck.

Aufgabe 547. Man soll in ein Quadrat abcd ein gleichseitiges Dreieck $\alpha\beta\gamma$ so einzeichnen, daß eine Ecke desselben in der Ecke a des Quadrates liege.



Analysis. Da $a\beta = a\gamma$ seyn soll, so ist auch $\Delta ab\beta \cong \Delta ad\gamma$, und daher ist $\angle ba\beta = \angle da\gamma$.

Nun ist $\angle bad = R$ gegeben und auch $\angle \beta a\gamma = \frac{2}{3} R$ folglich auch $\angle ba\beta + \angle da\gamma = \frac{1}{3}R$ und weil $\angle ba\beta = \angle da\gamma$, so sind diese Winkel gegeben, und daher die Linien $a\beta$ und $a\gamma$ der Lage und Größe nach.

Aufgabe 548. Das gleichseitige Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist gegeben; man soll ein Quadrat um dasselbe beschreiben, dessen eine Ecke in a liegt, und von welchem zwei Seiten durch die Punkte β und γ gehen.

Aufgabe 549. Um irgend ein gegebenes Dreieck $a\beta\gamma$ soll ein Quadrat beschrieben werden, dessen eine Ecke in a liegt, und von welchem zwei Seiten durch die Punkte β und γ gehen.

Analysis. Zieht man ac (Fig. Aufg. 547.), so ist $\angle ac\beta = \angle ac\gamma = \frac{1}{2} R^0$ gegeben; da nun auch $\Delta a\beta\gamma$ gegeben ist, so ist das Viereck $a\beta c\gamma$ gegeben (Aufg. 318.), und hierdurch das Quadrat.

Aufgabe 550. In ein Quadrat soll ein Dreieck beschrieben werden, dessen eine Ecke in einer Ecke des Quadrats liegt, und von welchem die beiden übrigen Ecken in Seiten dieses Quadrats liegen, und es soll dieses Dreieck einem gegebenen ähnlich seyn.

Auflösung. Beschreibt man um das gegebene Dreieck ein Quadrat (Aufg. 549.), so erhält man eine der zu entwerfenden ähnliche Figur.

Aufgabe 551. Man soll in ein Quadrat ein Dreieck beschreiben, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist; und es soll eine Spitze des Dreiecks in einem gegebenen Punkte der einen Seite des Quadrates liegen, und die beiden übrigen Spitzen in zwei an derselben anliegenden Seiten desselben.

Auflösung. Diese ist nicht verschieden von der Auflösung der Aufgabe 546.

Aufgabe 552. Um ein gegebenes Dreieck soll ein Quadrat beschrieben werden, so daß die eine Seite desselben in dem Punkte, wo sie die eine Spitze des Dreiecks trifft, nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird, und die beiden an dieser Seite anliegenden Seiten sollen durch die beiden übrigen Spitzen des Dreiecks gehen.

Aufgabe 553. Man soll in ein gegebenes Quadrat ein Dreieck hineinzeichnen, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, und das eine solche Lage hat, daß die eine Spitze des Dreiecks in einem gegebenen Punkte der einen Seite des Quadrates liegt, und die beiden andern Spitzen in zwei neben einander liegenden Seiten desselben.

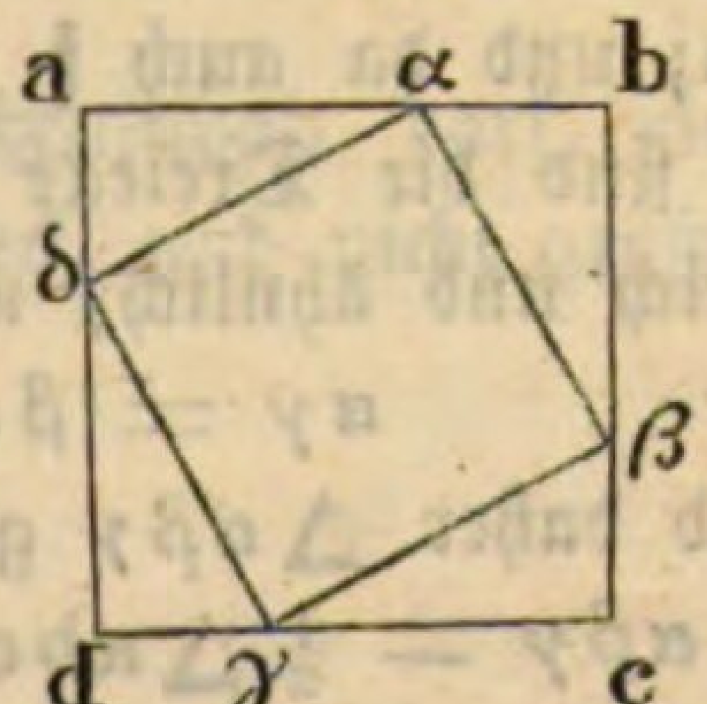
Auflösung. Diese ist nicht verschieden von der Auflösung der Aufgabe 545.

Aufgabe 554. Drei gerade Linien sind der Lage nach gegeben, und in der einen dieser Linien ein Punkt; man soll ein Dreieck beschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist, dessen eine Spitze in dem gegebenen Punkte liegt, und dessen andere beide Spitzen in den beiden übrigen gegebenen Linien liegen.

Aufgabe 555. Drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, sind der Lage nach gegeben; man soll ein Quadrat beschreiben, von welchem die eine Ecke in dem einen dieser Punkte liegt, und zwei einander gegenüber liegende Seiten desselben sollen durch die beiden übrigen Punkte gehen.

Aufgabe 556. Drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, sind der Lage nach gegeben; man soll ein Quadrat beschreiben, von welchem drei Seiten durch diese Punkte gehen, und es soll eine Seite desselben in dem gegebenen Punkte nach einem bestimmten Verhältnisse getheilt werden.

Aufgabe 557. In ein gegebenes Quadrat **abcd** soll ein anderes $\alpha\beta\gamma\delta$ beschrieben werden, das $\frac{2}{3}$ von dem Flächeninhalte des gegebenen hat.



Analysis. Da **abcd** ein Quadrat ist, und auch $\alpha\beta\gamma\delta$ ein solches seyn soll, so muß seyn $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta$ (Seite 152 Nr. 6.), daher ist $\alpha a + a\delta = ab$ gegeben.

Ferner ist $abcd = \alpha\beta\gamma\delta + 4 . \Delta a\alpha\delta$
und $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{2}{3} abcd$ (p. h.).

Folglich ist die Fläche gegeben von $4 . \Delta a\alpha\delta = \frac{1}{3} abcd$; also kennt man die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks $a\alpha\delta$, und die Summe der beiden Katheten desselben $a\alpha + a\delta = ab$, und daher auch das Dreieck selbst (Aufg. 162. Seite 212), und folglich $a\alpha$, wodurch α der Lage nach bestimmt ist, und daher auch die Punkte β, γ und δ.

Aufgabe 558. In ein Quadrat soll ein anderes hinein gezeichnet werden, das einen gegebenen Flächeninhalt hat.

Determination. Die Fläche darf nicht kleiner seyn als die Hälfte des gegebenen Quadrates, und nicht größer als das ganze Quadrat.

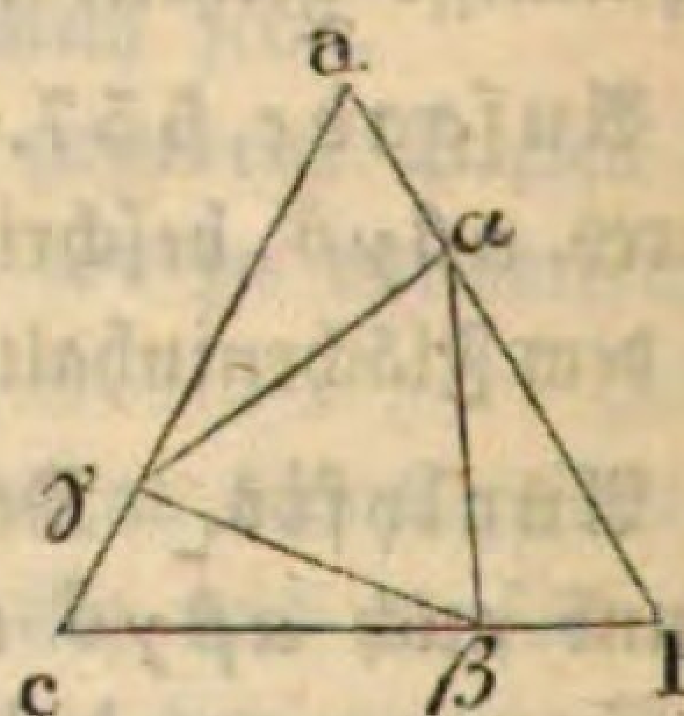
Aufgabe 559. Um ein gegebenes Quadrat soll man ein anderes beschreiben, das $1\frac{1}{4}$ Mal so groß als das gegebene ist.

Analysis. Gegeben das Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. Aufg. 557.), gesucht das Quadrat $abcd$, und es soll seyn $abcd = 1\frac{1}{4} \times \alpha\beta\gamma\delta$, also $4 \times \Delta\alpha a\delta = \frac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta$ gegeben; aber auch $\alpha\delta$ ist gegeben, folglich kennt man von dem Dreieck $a\alpha\delta$ die Hypotenuse $\alpha\delta$ und die Fläche, und daher das Dreieck (Aufgabe 122. Seite 162).

Aufgabe. 560. Um ein gegebenes Quadrat soll ein anderes beschrieben werden, das einen gegebenen Flächeninhalt hat.

Determination. Die Fläche darf nicht kleiner seyn als das gegebene Quadrat, und nicht größer als dieses Quadrat zwei Mal genommen.

Aufgabe 561. Man soll in ein gegebenes gleichseitiges Dreieck abc ein ebenfalls gleichseitiges Dreieck hinein zeichnen, welches halb so groß als das gegebene ist;



Analysis. Nimmt man $a\alpha = b\beta = c\gamma$, so ist auch $\alpha b = \beta c = \gamma a$; und da auch $\llcorner a = \llcorner b = \llcorner c$, so sind die Dreiecke $\alpha a\gamma$, $\beta b\alpha$, $\gamma c\beta$ gleich und ähnlich, und es ist also

$$\alpha\gamma = \beta\alpha = \gamma\beta$$

und daher $\Delta\alpha\beta\gamma$ gleichseitig. Da $\Delta\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}\Delta abc$ seyn soll, so muß auch seyn $3 \times \Delta a\alpha\gamma = \frac{1}{2}\Delta abc$, also $\Delta a\alpha\gamma = \frac{1}{6}\Delta abc$.

Nun ist $\Delta abc : \Delta a\alpha\gamma = ab \times ac : a\alpha \times a\gamma$ (23.)

und $\Delta abc : \Delta a\alpha\gamma = 6 : 1$

folglich ist $ab \times ac : a\alpha \times a\gamma = 6 : 1$

und daher $\frac{ab \times ac}{6} = a\alpha \times a\gamma$.

Da aber $ac = ab$ und $a\gamma = \alpha b$, so ist auch

$$\frac{ab \times ab}{6} = a\alpha \times \alpha b.$$

Folglich ist ab in α so zu theilen, daß das Rechteck $a\alpha \times \alpha b$ einem gegebenen Rechteck $ab \times \frac{ab}{6}$ gleich werde, und es ist daher der Punkt α gegeben, und somit auch die Punkte β und γ.

Auflösung. Suche die mittlere Proportionale x zwischen der Seite ab des gegebenen Dreiecks und dem 6ten Theile derselben (13.), und schneide hierauf ab in α, so daß $a\alpha \times \alpha b = x^2$ wird (Aufg. 2. Seite 209), so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 562. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck soll ein ebenfalls gegebenes gleichseitiges Dreieck hineingezeichnet werden, das einen gegebenen Flächeninhalt hat.

Determination. Die Fläche darf nicht größer seyn als das gegebene Dreieck, und nicht kleiner als der 4te Theil desselben.

Aufgabe 563. Um ein gegebenes gleichseitiges Dreieck soll ein anderes ebenfalls gleichseitiges Dreieck beschrieben werden, das zwei Mal so groß als das gegebene ist.

Auflösung. Beschreibt man in ein gleichseitiges Dreieck ein anderes, das halb so groß ist als dasselbe, so erhält man hierdurch eine der zu entwerfenden ähnliche Figur.

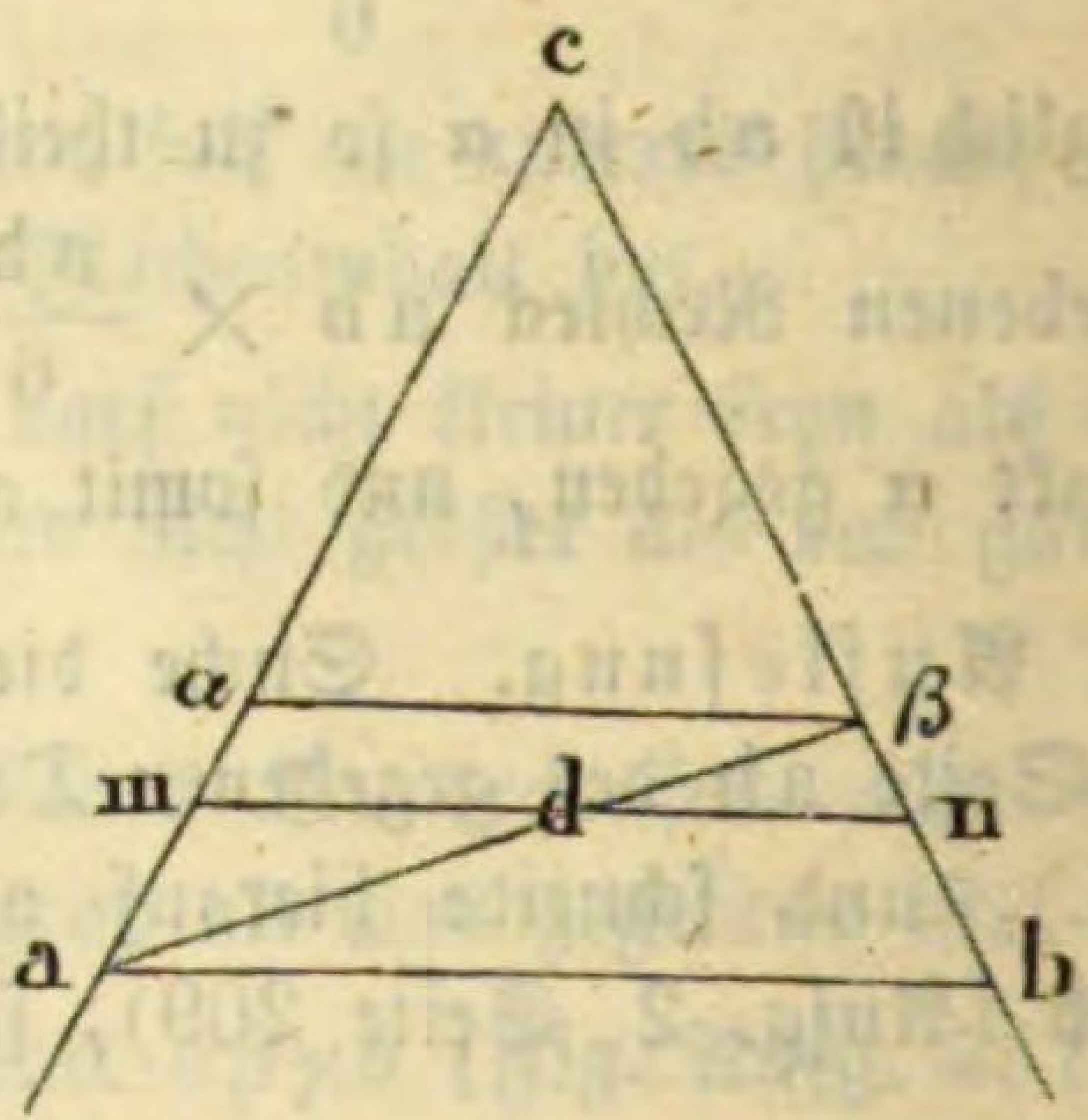
Aufgabe 564. Um ein gleichseitiges Dreieck soll ein anderes, ebenfalls gleichseitiges Dreieck beschrieben werden, welches einen gegebenen Flächeninhalt hat.

Determination. Der gegebene Flächeninhalt darf nicht kleiner seyn, als das gegebene gleichseitige Dreieck, und nicht größer, als dieses Dreieck vier Mal genommen.

§. 33.

Fortsetzung der Aufgaben von Figuren in Figuren.

Aufgabe 565. Ein Winkel acb mit gleich großen Schenkeln ist gegeben; man soll auf beiden Schenkeln die gleich großen Stücken $a\alpha$ und $b\beta$ so abschneiden, daß wenn $\alpha\beta$ gezogen wird, diese Linie so groß, als die beiden abgeschnitenen Stücke zusammen, ist.



Auflösung. Von a und b aus schneide auf den Schenkeln die beliebigen gleich großen Stücke am, bn, ab, ziehe mn und nimm auf dieser Linie md = 2 (am) = 2 (bn). Von a ziehe durch d eine Linie, so ist, wenn bc von derselben in β getroffen wird, $b\beta$ das abzuschneidende Stück; nimmt man also $a\alpha = b\beta$ und zieht $\alpha\beta$, so ist das Verlangte geschehen.

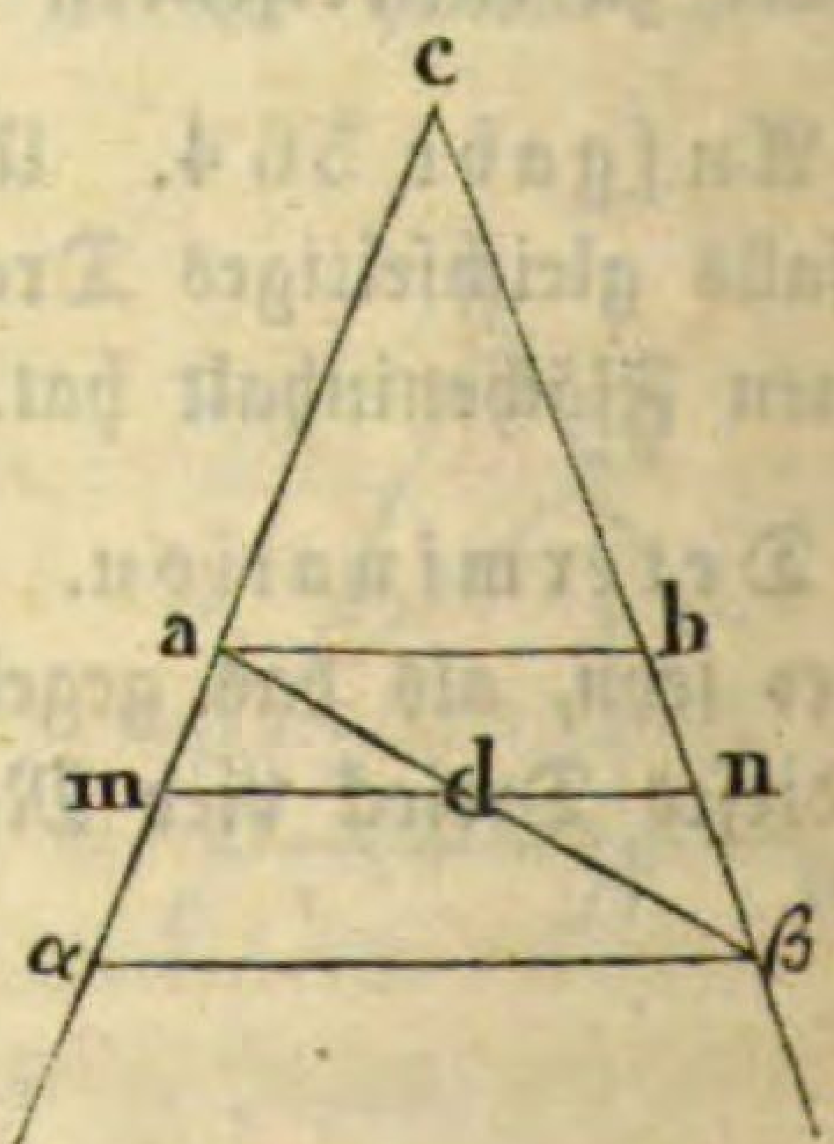
Beweis. Da ac = bc, am = bn und $a\alpha = b\beta$, so sind die Linien ab, mn, $\alpha\beta$ parallel. Hiernach ist

$$am : a\alpha = md : \alpha\beta \quad (5.)$$

Da nun $md = 2\,(am)$ (p. c.)

so ist auch $\alpha\beta = 2\,(a\alpha)$
und weil $b\beta = a\alpha$
so ist ebenfalls $\alpha\beta = 2\,(b\beta)$
und daher auch $\alpha\beta = a\alpha + b\beta$.

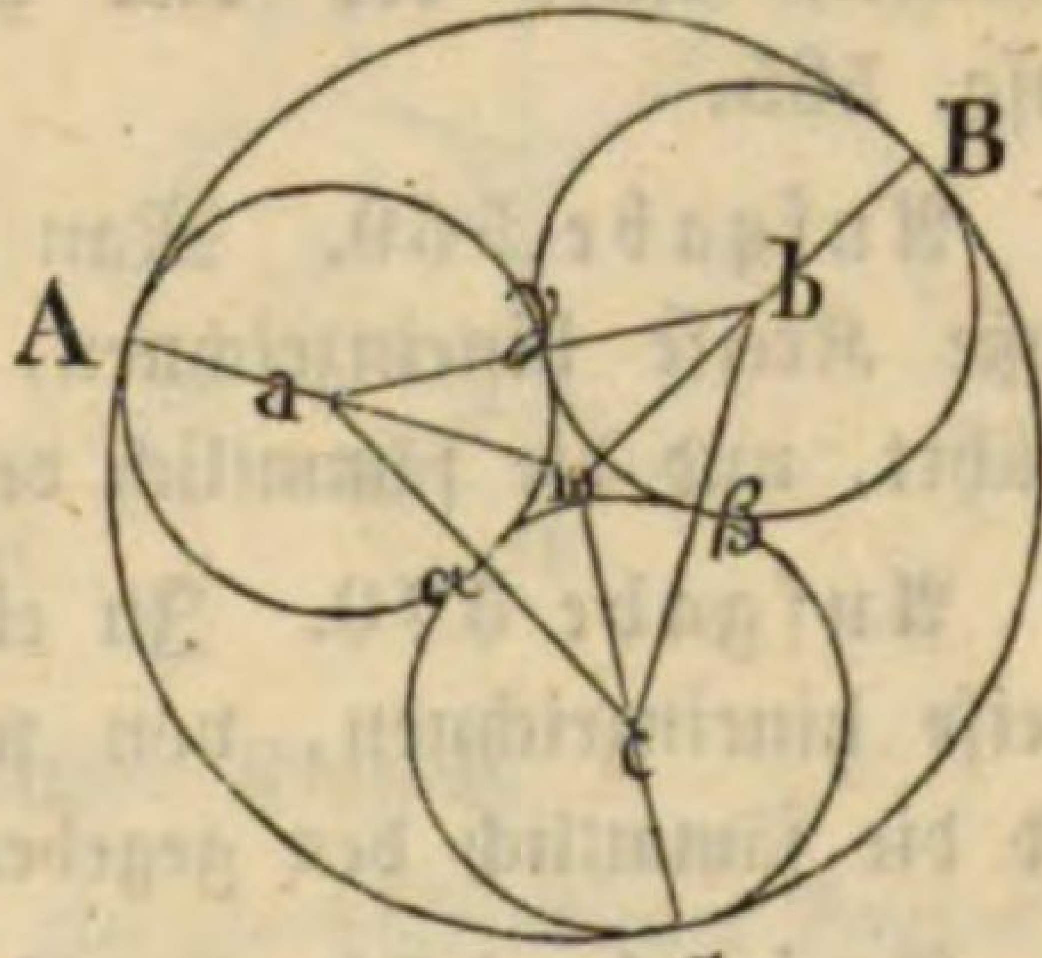
Aufgabe. 566. Man soll von einem Winkel, dessen Schenkel gleich groß sind, diese um gleichviel verlängern; so daß, wenn man hierauf die Endpunkte verbindet, die Verbindungslinie so groß ist, wie die Verlängerungen beider Schenkel zusammen.



Auflösung. Ist acb der gegebene Winkel, so nehme man auf den Verlängerungen der Schenkel am = bn von beliebiger Größe, ziehe mn und schneide auf dieser Linie md = 2 (am) = 2 (bn) ab. Wird hierauf von a durch

d eine Linie gezogen, welche die Verlängerung von cb in β schneidet, und man nimmt aα = bβ, und zieht $\alpha\beta$, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 567. Man soll in einen gegebenen Kreis drei gleich große Kreise hineinzeichnen, die den gegebenen und sich gegenseitig berühren.



Analysis. Sind die Kreise beschrieben, und man verbindet die Mittelpunkte a, b, c derselben durch ab, bc und ca, so sind α, β und γ die gegenseitigen Berührungspunkte (III. 12.); und es ist daher, wenn man den gemeinschaftlichen Radius der, in den gegebenen hinein gezeichneten Kreise = r setzt, ab = 2 r, bc = 2 r und ca = 2 r, also abc ein gleichseitiges Dreieck. Berühren die Kreise den gegebenen in A, B, C, so ist auch aA = bB = cC = r; und wenn m der Mittelpunkt des gegebenen Kreises ist, so sind maA, mbB und mcC ebenfalls gerade Linien (III. 11.). Hiernach ist ma = mb = mc, also m der Mittelpunkt des Kreises, der um das gleichseitige Dreieck abc beschrieben werden kann, und es ist daher

$$\llcorner amb = \llcorner bmc = \llcorner cma \text{ gegeben.}$$

Auch ist mA = mB = mC gegeben,
und aA = bB = aγ = bγ = r
also ab = aA + bB

und eben so bc = bB + cC und ca = cC + aA.
folglich kömmt es bloß darauf an, in dem gleichschenkligen Winkel AmB die Punkte a und b so zu bestimmen, daß aA = bB und ab = aA + bB wird, was durch Aufg. 565. geschehen kann; und es sind daher die Mittelpunkte a, b, c der zu beschreibenden Kreise der Lage nach bestimmt, und hierdurch auch die Radien aA = bB = cC der Größe nach.

Auflösung. Theile des gegebenen Kreises Umfang in A, B und C in drei gleiche Theile; ziehe mA, mB, mC; und suche hierauf die Punkte a, b, c, so daß aA = cB = cC, und zugleich aA + bB = ab, bB + cC = bc, cC + aA = ca (Aufg. 565.): so sind a, b, c die Mittelpunkte, und aA = bB = cC ist der gemeinschaftliche Radius der zu beschreibenden Kreise.

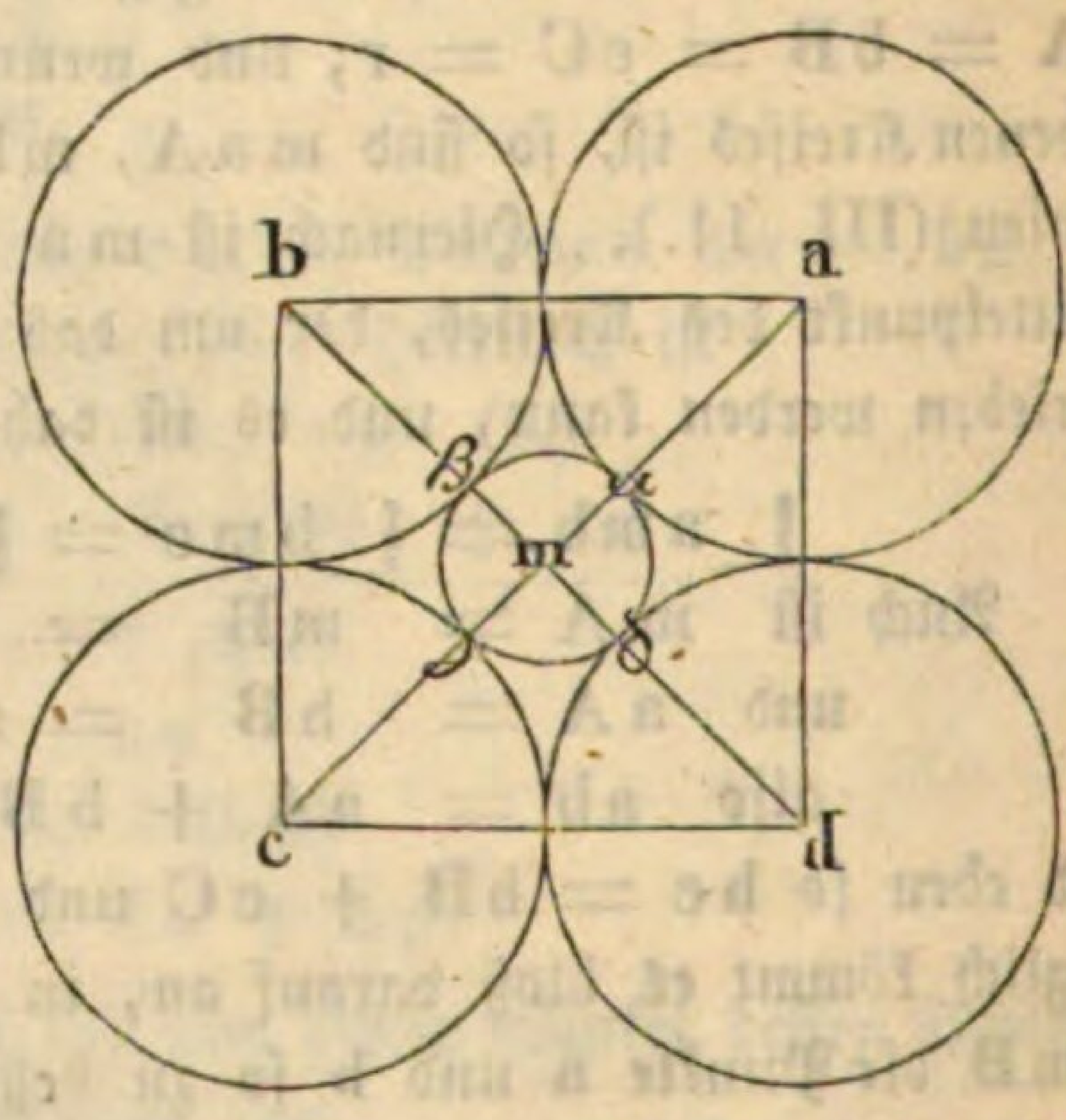
Aufgabe 568. Man soll in einen gegebenen Kreis vier gleich große Kreise hineinzeichnen, die denselben berühren, und von welchen jeder zwei der übrigen Kreise ebenfalls berührt.

Auflösung. Theile des Kreises Umfang in 4 gleiche Theile, ziehe Radien an die Theilpunkte, und verfahre hierauf mit den Schenkeln eines der vier hierdurch erhaltenen Winkel wie bei Aufg. 565.

Aufgabe 569. Man soll in einen gegebenen Kreis fünf gleich große Kreise hineinzeichnen, von welchen jeder zwei der übrigen berührt, und die sämmtlich den gegebenen Kreis berühren.

Aufgabe 570. In einen gegebenen Kreis soll man n gleiche Kreise hineinzeichnen, von welchen jeder zwei der übrigen berührt, und die sämmtlich den gegebenen Kreis berühren.

Aufgabe 571. Es ist ein Kreis gegeben; man soll vier gleich große Kreise beschreiben, die außerhalb desselben liegend, ihn berühren, und von welchen jeder zwei der übrigen ebenfalls berührt.



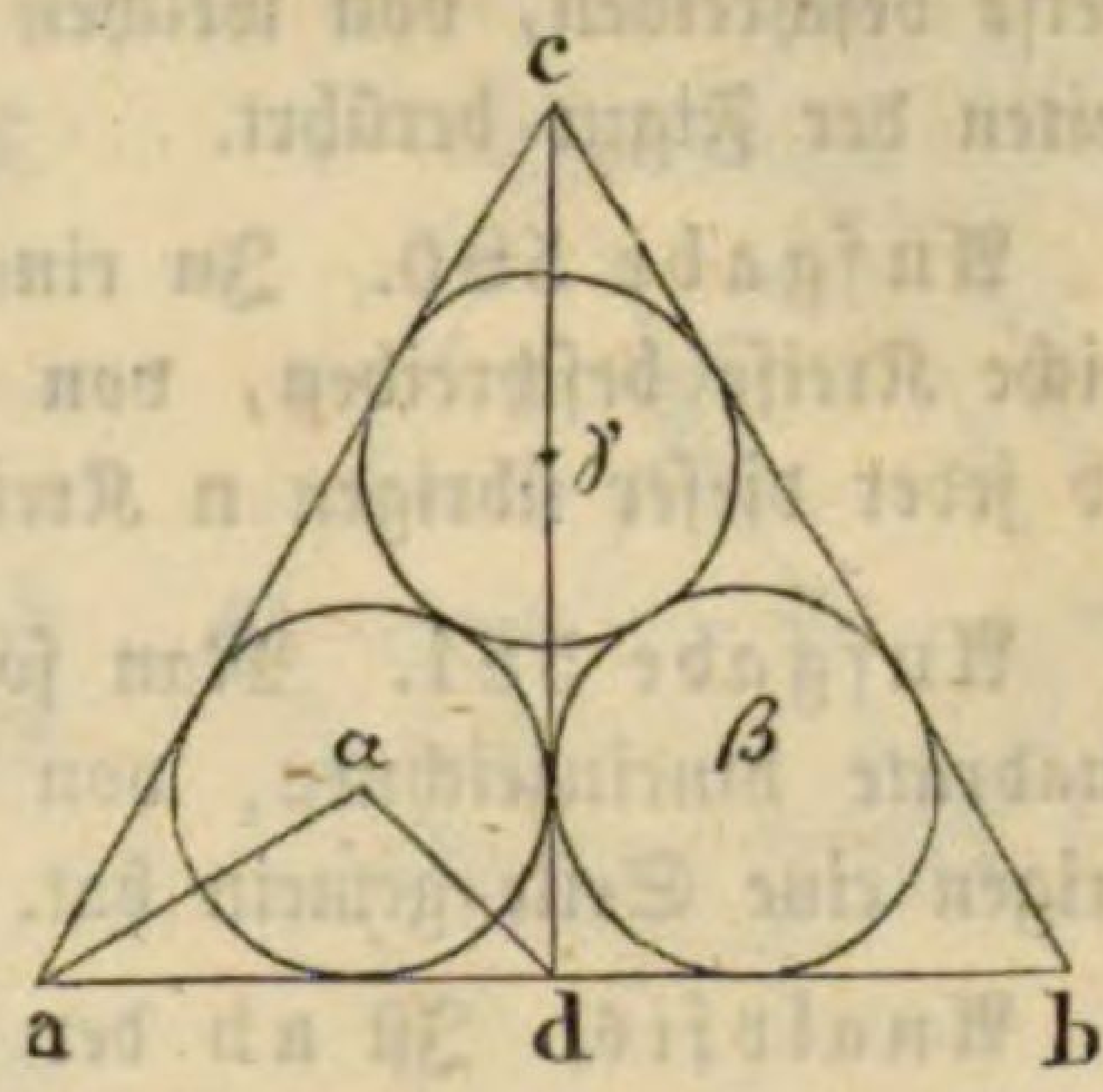
Auflösung. Ist m der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so theile den Umfang in α, β, γ, δ in 4 gleiche Theile; ziehe die Radien $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$, und verlängere die gleich großen Schenkel eines Winkels $\alpha m \beta$ um gleichviel, so daß $\alpha a = \beta b$, und zugleich $\alpha a + \beta b = ab$ wird (Aufg. 566.): so sind a und b die Mittelpunkte, und $a\alpha = b\beta$ die Radien zweier der vier Kreise, die um den gegebenen beschrieben werden sollen.

Aufgabe 572. Man soll um einen gegebenen Kreis drei gleich große Kreise beschreiben, die sich gegenseitig und den gegebenen Kreis berühren.

Aufgabe 573. Es sollen n gleich große Kreise um einen gegebenen beschrieben werden, die denselben berühren, und von welchen jeder zwei der übrigen ebenfalls berührt.

Aufgabe 574. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck sollen drei gleich große Kreise hineingezeichnet werden, die sich gegenseitig

berühren, und von welchen jeder zwei Seiten des Dreiecks ebenfalls berührt.



Auflösung. Ziehe von c die Normale cd auf die Grundlinie ab, halbire die Winkel bei a und d durch $a\alpha$ und $d\alpha$, so schneiden sich diese Halbirungslinien in dem Mittelpunkte α des einen Kreises, und es wird eben so der Mittelpunkt β des zweiten Kreises gefunden; und nimmt man auf cd das Stück $c\gamma = a\alpha$, so ist γ der Mittelpunkt des dritten Kreises.

Aufgabe 575. Man soll in ein gleichschenkliges Dreieck drei Kreise beschreiben, die sich gegenseitig berühren, und von welchen jeder zwei Seiten des Dreiecks ebenfalls berührt.

Auflösung. Die beiden Kreise, welche die Grundlinien berühren, sind gleich groß, und ihre Mittelpunkte werden wie bei der vorigen Aufgabe gefunden, wodurch alsdann der Mittelpunkt des dritten Kreises bestimmt ist.

Aufgabe 576. Man soll in ein Quadrat vier gleich große Kreise hinein zeichnen, von welchen jeder zwei der übrigen und zwei Seiten des Quadrats berührt.

Auflösung. Der gemeinschaftliche Radius dieser Kreise ist der vierte Theil von der Seite des Quadrats.

Aufgabe 577. In ein Quadrat sollen fünf gleich große Kreise so hineingezeichnet werden, daß der eine dieser Kreise die vier übrigen berührt, und jeder dieser letztern zwei Seiten des Quadrates.

Auflösung. Setzt man die Seite des Quadrates $= q$, die halbe Diagonale desselben $= d$, und den gemeinschaftlichen Radius der zu beschreibenden Kreise $= x$, so findet die Proportion statt:

$$d : \tfrac{1}{2}q = d - 2x : x$$

also ist $d : q = d - 2x : 2x$

und daher $d + q : q = d : 2x$

wodurch x bestimmt ist.

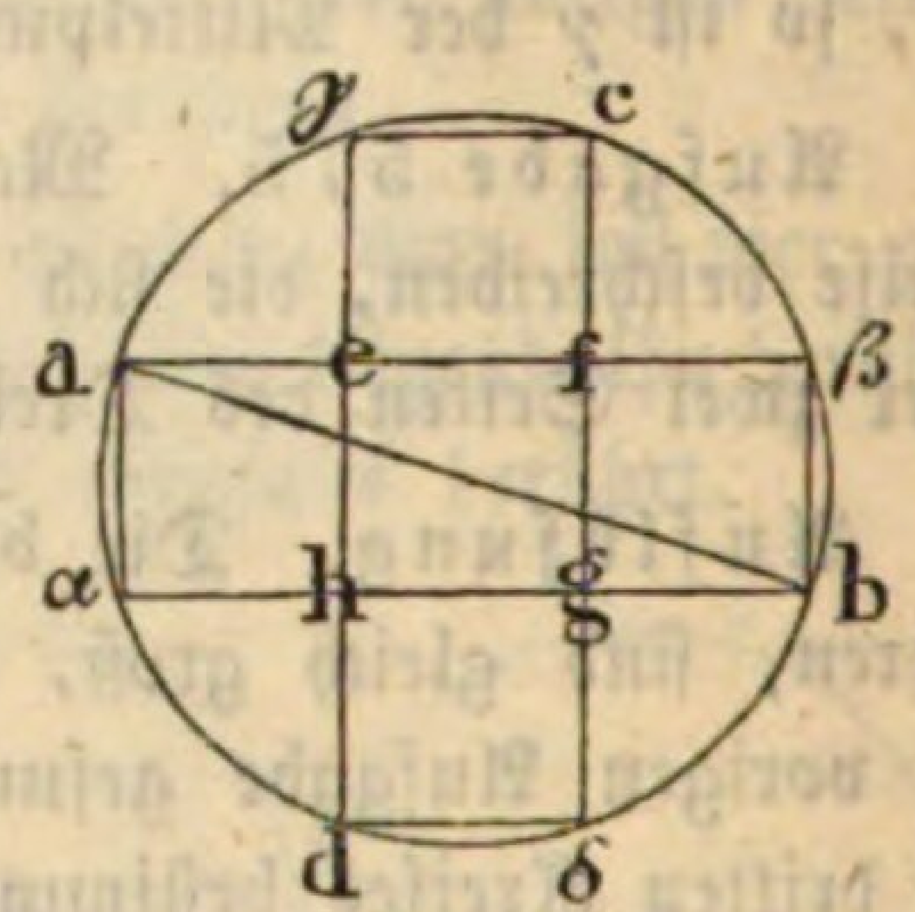
Aufgabe 578. In ein regulaires Fünfeck sollen fünf gleiche Kreise beschrieben werden, von welchen jeder zwei der übrigen und zwei Seiten des Fünfecks berührt.

Aufgabe 579. Man soll in ein regulaires neck n gleiche Kreise beschreiben, von welchen jeder zwei der übrigen, und zwei Seiten der Figur berührt.

Aufgabe 580. In ein regulaires neck soll man (n + 1) gleiche Kreise beschreiben, von welchen einer alle übrigen berührt, und jeder dieser übrigen n Kreise zwei Seiten der Figur.

Aufgabe 581. Man soll in einen Kreis fünf gleich große Quadrate hineinzeichnen, von welchen das mittlere mit jedem der übrigen eine Seite gemein hat.

Analysis. Ist ab der Durchmesser des gegebenen Kreises, und sind ah = hf = fb drei der fünf gleichen Quadrate, so ist $a\beta b\alpha$ ein Rechteck, in welchem die eine Seite $a\beta$ drei Mal so groß als die andere βb ist; und die Diagonale ab dieses Rechtecks ist der Durchmesser des gegebenen Kreises. Beschreibt man also irgend ein Rechteck, in welchem die eine Seite drei Mal so groß als die andere ist, so ist dieses ähnlich $a\beta b\alpha$, und da von diesem die Diagonale ab gegeben ist, so kann dasselbe beschrieben werden (18.), wodurch die Seite der in den Kreis zu beschreibenden Quadrate gefunden wird.



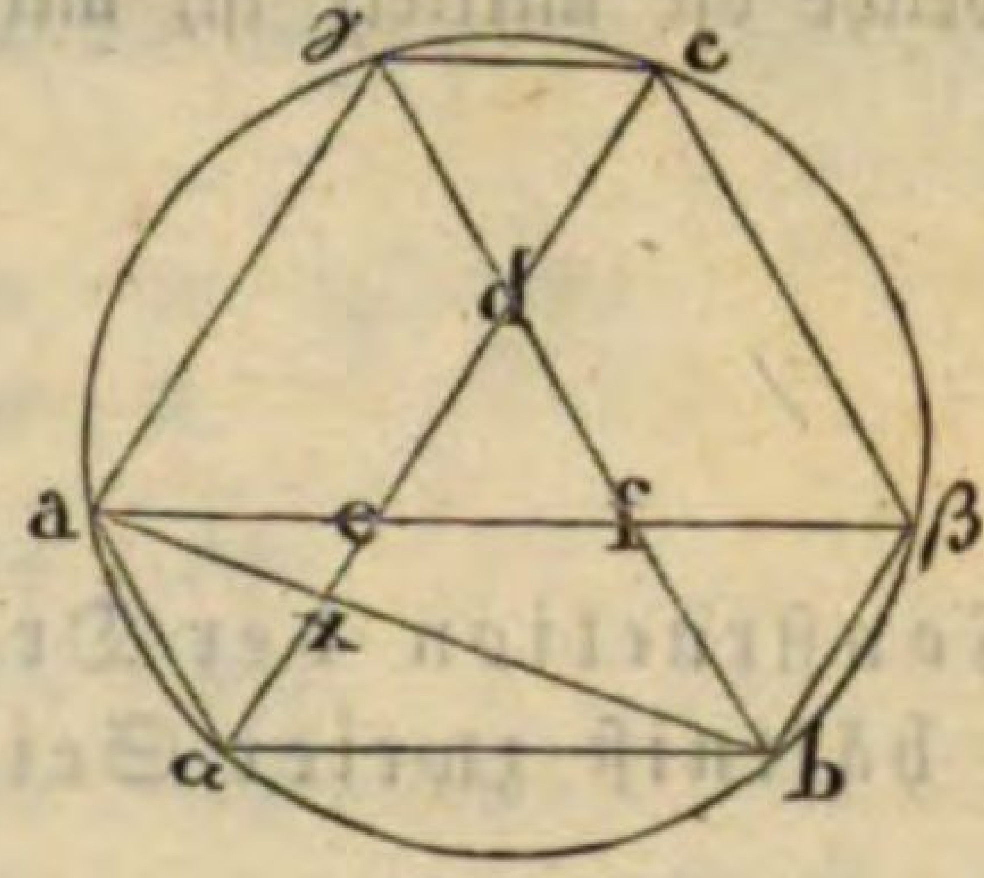
Aufgabe 582. Man soll in einen gegebenen Kreis 5 gleich große Quadrate so hineinzeichnen, daß das mittlere mit jedem der übrigen eine Ecke gemein hat, und daher mit den verlängerten Seiten des mittleren Quadrates die Seiten der übrigen zusammenfallen.

Auflösung. Der dritte Theil von dem Durchmesser des gegebenen Kreises ist die Diagonale der Quadrate, die in denselben in der angegebenen Art sich hineinzeichnen lassen.

Aufgabe 583. Es sollen vier gleich große gleichseitige Dreiecke in einen gegebenen Kreis hineingezeichnet werden, von welchen das mittlere Dreieck mit jedem der übrigen eine Seite gemein hat.

Aufgabe 584. Man soll in einen Kreis vier gleich große gleichseitige Dreiecke so hineinzeichnen, daß jedes der drei äußeren mit dem mittleren eine Ecke gemein hat, und also die Seiten der

äußeren Dreiecke in den Verlängerungen der Seiten des mittleren liegen.



Analysis. Da die vier gleichseitigen Dreiecke $a\alpha e$, $b\beta f$, $c\gamma d$ und edf einander gleich sind, so ist $e\alpha = de$ und $fb = df$; also ist $d\alpha = db = 2\,(de)$, und daher auch $\alpha b = 2\,(ef) = 2\,(a\alpha)$, und eben so ist

$$\beta c = 2\,(b\beta)$$
und $\gamma c = 2\,(c\gamma)$.

Da nun $a\alpha = b\beta = c\gamma$, so ist auch $\alpha b = \beta c = \gamma a$; folglich sind auch die zu diesen Sehnen gehörigen Bogen gleich groß; es ist also

Bogen αb = Bogen βc = Bogen γa.
Da nun auch „ $a\alpha$ = „ $b\beta$ = „ $c\gamma$

so ist Bogen ab = Bogen bc = Bogen ca;

des Kreises Umfang ist also in a, b und c in drei gleiche Theile getheilt. Daher ist die Sehne ab gegeben.

Da Bogen ac = Bogen bc, so ist auch

$$\llcorner a\alpha c = \llcorner b\alpha c \quad \text{(III. 27.)}$$

Folglich ist $\llcorner a\alpha b$ durch αc halbirt, und es ist daher in $\Delta\, a\alpha b$

$$bx : xa = b\alpha : \alpha a \quad (3.)$$
und weil $b\alpha = 2\,(\alpha a)$

$$bx : xa = 2 : 1$$
und verbunden $ba : xa = 3 : 1$.

Folglich ist $xa = \frac{1}{3}(ab)$, und daher x gegeben. Nun ist auch c gegeben, also cx und daher α der Lage nach, wodurch $a\alpha$ der Größe und Lage nach bestimmt ist.

Auflösung. Theile des Kreises Umfang in a, b und c in drei gleiche Theile, ziehe ab, nimm $ax = \frac{1}{3}\,(ab)$; ziehe cx und verlängere dieselbe, bis sie den Kreis in α trifft; verbinde a mit α und trage nun $b\beta = c\gamma = a\alpha$ in den Kreis; und ziehe die Verbindungslinien $a\beta$, $b\gamma$ und $c\alpha$, so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 585. Man soll in einen Kreis sechs regulaire fünfseitige Figuren so hinein zeichnen, daß die eine dieser Figuren mit jeder der übrigen eine Seite gemein hat.

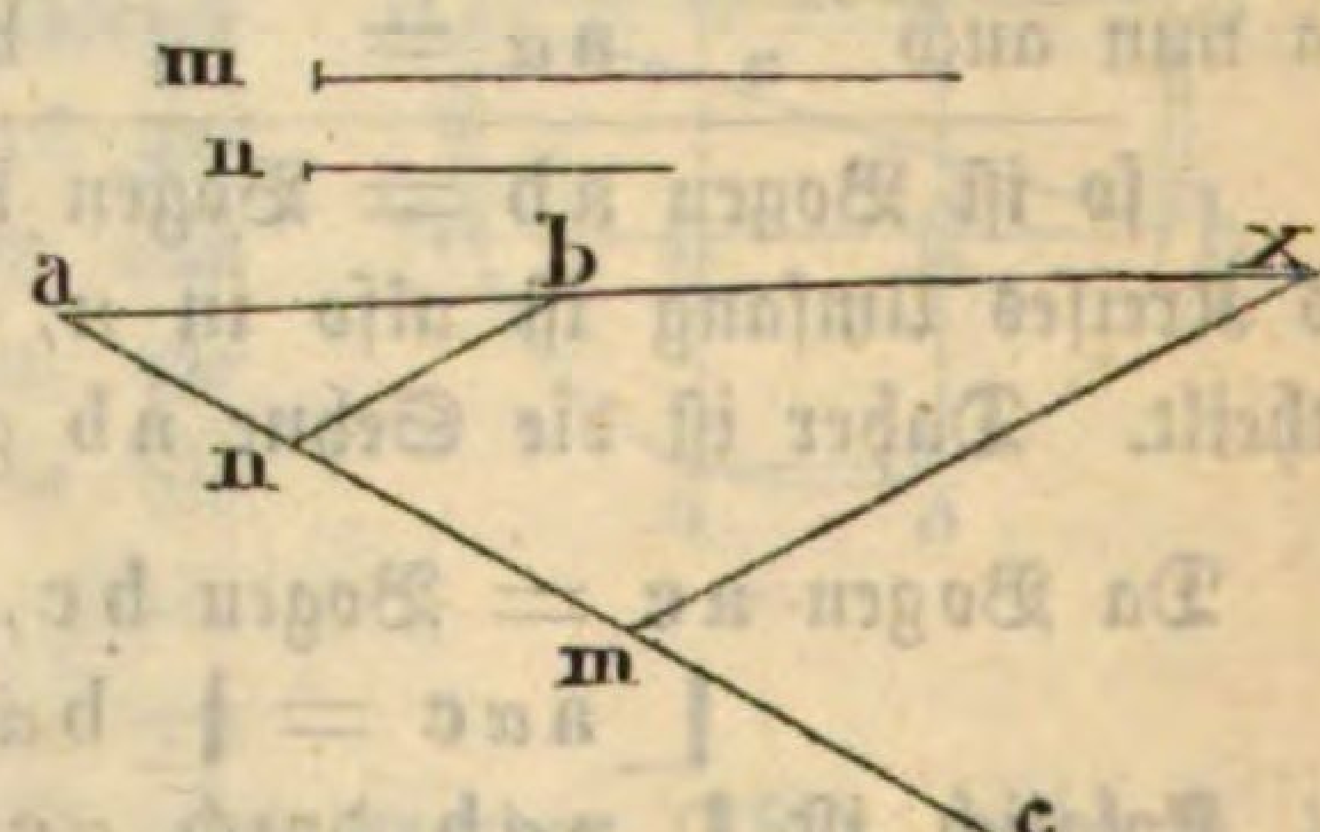
Aufgabe 586. In einen Kreis soll man sieben regulaire sechsseitige Figuren so hineinzeichnen, daß die eine dieser Figuren, welche die mittlere ist, mit jeder der übrigen eine Seite gemein hat.

---

§. 34.

Construction der Dreiecke, wenn das gegebene Verhältniß zweier Seiten zu den Bestimmungsstücken gehört.

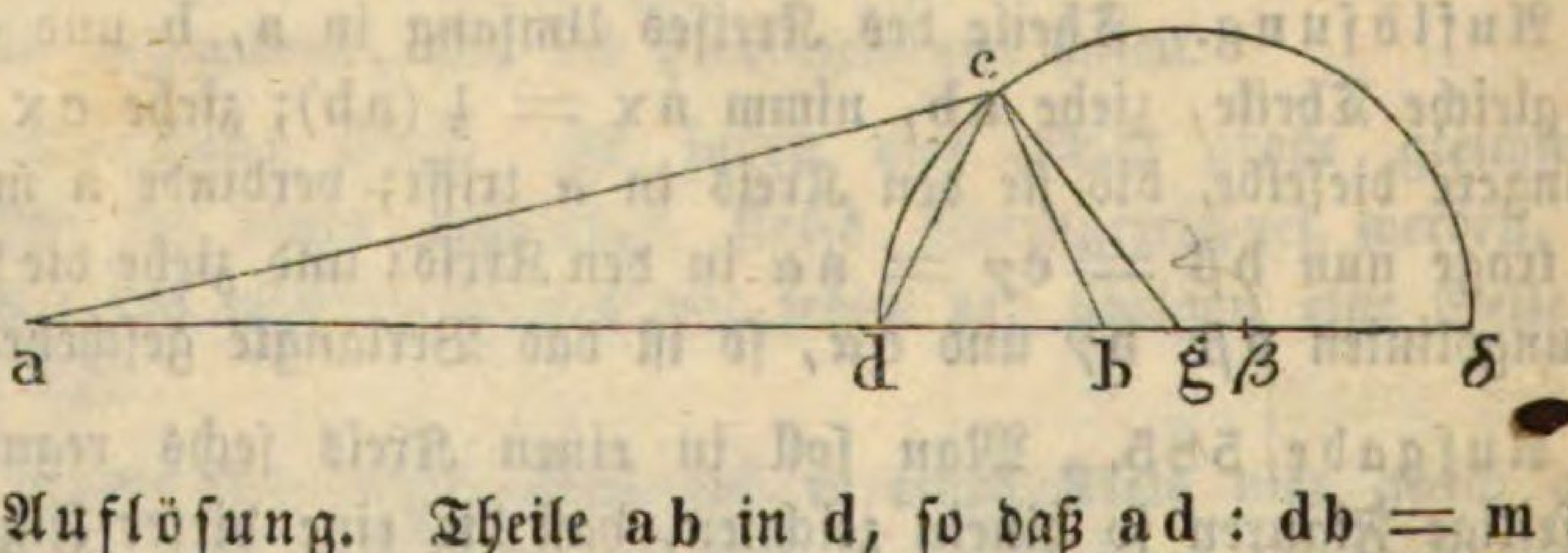
Aufgabe 578. Eine gegebene gerade Linie ab soll bis x verlängert werden, so daß die verlängerte Linie ax zu der Verlängerung bx, wie m : n sich verhalte.



Auflösung. Unter einem beliebigen Winkel setze an a die unbegrenzte ac, nimm auf derselben am = m und mn = n, verbinde den Punkt n mit b, und ziehe durch m eine der nb parallele mx: so schneidet diese die verlängerte ab in dem gesuchten Punkte x.

Beweis. Es ist an : nm = ab : bx (2.)
daher verbunden am : nm = ax : bx
also m : n = ax : bx.

Aufgabe 588. Ueber einer gegebenen Grundlinie ab soll ein Dreieck acb beschrieben werden, so daß ac : cb wie m : n sich verhalte; es soll also der geometrische Ort für die Lage der Spitze c dieses Dreiecks angegeben werden.



Auflösung. Theile ab in d, so daß ad : db = m : n, und verlängere ab bis δ, daß auch aδ : bδ = m : n (Aufg. 587.)

Ueber $d\delta$ beschreibe einen Halbkreis, so entspricht jeder Punkt des Umfanges den Bedingungen; und es ist daher, wenn man von irgend einem Punkte c dieses Umfanges die Linien ca, cb zieht, $ca : cb = m : n$.

Beweis. Da $ad : db = m : n$ (p. c.)
und auch $a\delta : \delta b = m : n$ „

so ist $ad : db = a\delta : \delta b$
also verwechselt $ad : a\delta = db : \delta b$
daher getrennt $ad : d\delta = db : \delta b - db$.

Nimmt man also $\delta\beta = db$, so ist auch, wenn g der Mittelpunkt des Kreises ist, $\beta g = gb$ und $\delta b - db = \delta b - \delta\beta = \beta b = 2\,(bg)$. Zugleich ist $d\delta = 2\,(dg)$, und daher
$ad : 2\,(dg) = db : 2\,(bg)$
folglich ist auch $ad : dg = db : bg$
also verbunden $ag : dg = dg : bg$
und weil $dg = gc$
$ag : gc = gc : gb$.
Da nun $\angle g = \angle g$

so ist $\triangle agc \sim \triangle cgb$
folglich ist $\angle a = \angle gcb$
aber $\angle gdc = \angle gcd$

also auch $\angle gdc - \angle a = \angle gcd - \angle gcb$.
Und weil $\angle gdc - \angle a = \angle dca$ (I. 32.)
so ist $\angle dca = \angle gcd - \angle gcb$
$= \angle bcd$.

Der Winkel bca wird also durch cd halbirt, und es ist daher
$ad : db = ac : cb$ (3.)
Da nun $ad : db = m : n$

so ist auch $ac : cb = m : n$

Aufgabe 589. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniß zweier Seiten, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel und die dritte Seite; es soll das Dreieck beschrieben werden.

Gegeben $A : B = m : n$, $\angle c$ und C.

Analysis. Werden die gegebenen Linien m und n unter dem Winkel c an einander gesetzt und die Endpunkte verbunden, so erhält man ein dem gesuchten ähnliches Dreieck (6.); und da von dem gesuchten Dreieck C gegeben ist, welche der die Endpunkte

37*

von m und n verbindenden Linie gleichnamig, so ist hierdurch das gesuchte Dreieck gegeben.

Aufgabe 590. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die dritte Seite und einen an dieser Seite anliegenden Winkel.

Gegeben A : B = m : n, C und ∟ a.

Analysis. Da C und das Verhältniß von A : B gegeben ist, so ist der geometrische Ort für die Lage des Punktes c gegeben (Aufgabe 588.); und wird an dem einen Endpunkte der C der Winkel c angesetzt, so muß c auch in dem zweiten Schenkel dieses Winkels liegen. Die Spitze c des Dreiecks liegt also in dem Punkte, wo dieser zweite Schenkel den Halbkreis, welcher der geometrische Ort für c ist, schneidet.

Aufgabe 591. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die dritte Seite und die zu derselben gehörige Normale.

Gegeben A : B = m : n, C und γ.

Auflösung. Man bestimme den geometrischen Ort für die Spitze c des Dreiecks (Aufg. 588.), und ziehe eine der C parallele Linie in einem Abstande von C = γ: so schneidet diese den Halbkreis in der gesuchten Spitze c des Dreiecks.

Aufgabe 592. Von einem Dreieck ist das Verhältniß zweier Seiten gegeben, die dritte Seite und die zu derselben gehörige Halbirungslinie (§. 19. Seite 309).

Gegeben A : B = m : n, C und (γ).

Auflösung. Beschreibe den Halbkreis, in dessen Umfang die Spitze c des Dreiecks liegen muß, und aus dem Halbirungspunkte von C einen Bogen mit dem Radius (γ), so schneidet dieser den Halbkreis in dem gesuchten Punkte c.

Aufgabe 593. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniß zweier Seiten, die zu einer dieser Seiten gehörige Normale, und die dritte Seite.

Gegeben A : B = m : n, α und C.

Analysis. Durch C und α ist ∟ a gegeben, also das Dreieck (Aufg. 590.).

Aufgabe 594. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel, und die zu der dritten Seite gehörige Normale.

Gegeben $A : B = m : n$, $\angle c$ und γ.

Analysis. Das Dreieck, in welchem der von den gegebenen Linien m und n eingeschlossene Winkel $= c$, ist dem Gesuchten ähnlich (6.).

Aufgabe 595. Von einem Dreieck ist das Verhältniß zweier Seiten gegeben, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel, und die zu der dritten Seite gehörige Halbirungslinie.

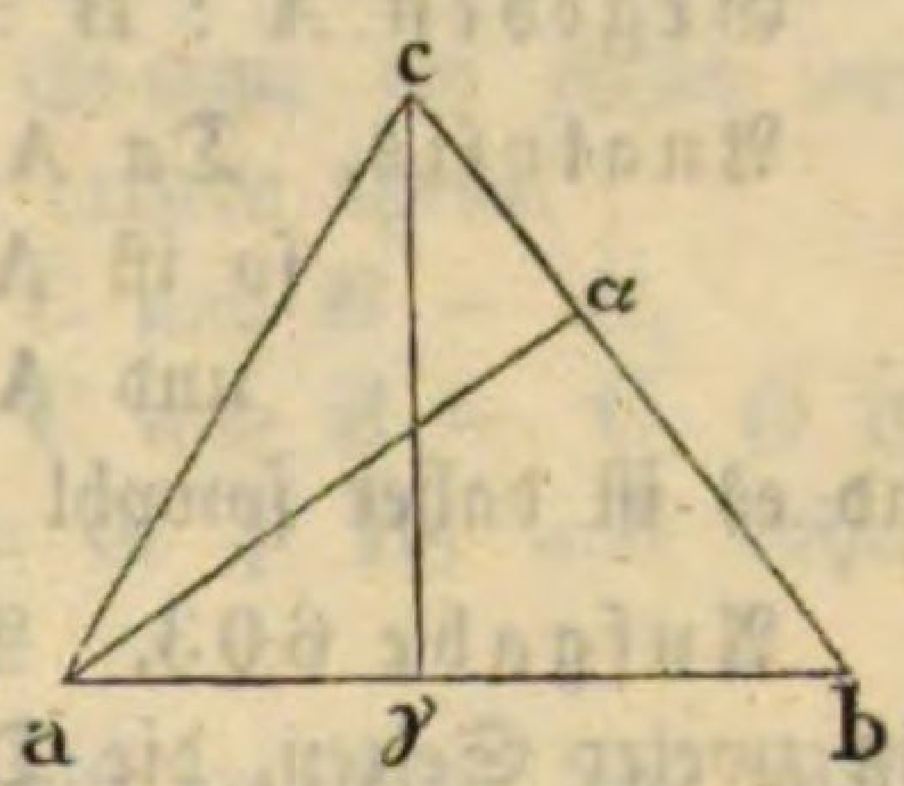
Gegeben $A : B = m : n$, $\angle c$ und (γ).

Aufgabe 596. Es ist von einem Dreieck gegeben das Verhältniß zweier Seiten, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel, und die zu einer dieser Seiten gehörige Halbirungslinie.

Gegeben $A : B = m : n$, $\angle c$ und (α).

Aufgabe 597. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel, und die zu einer dieser Seiten gehörige Normale.

Gegeben $A : B = m : n$
$\angle c$ und α.



Analysis. Durch $a\alpha = \alpha$ und $\angle c$ ist $\Delta\, a c \alpha$ gegeben, also auch $ac = B$; und da $A : B = m : n$, so ist A ebenfalls gegeben, und daher das Dreieck.

Aufgabe 598. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die zu einer dieser Seiten gehörige Normale, und einen an der dritten Seite anliegenden Winkel.

Gegeben $A : B = m : n$, α und $\angle b$.

Analysis. Durch $a\alpha = \alpha$ und $\angle b$ ist $\Delta\, a b \alpha$ gegeben, und daher $ab = C$, also das Dreieck abc (Aufg. 590.).

Aufgabe 599. Es ist von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten gegeben, ein an der dritten Seite anliegender Winkel, und die zu derselben gehörige Normale.

Gegeben $A : B = m : n$, $\angle b$ und γ.

Analysis. Durch $c\gamma = \gamma$ und $\angle b$ ist $\Delta\, b c \gamma$ gegeben, also $bc = A$; und da $A : B = m : n$ so ist B ebenfalls gegeben.

Aufgabe 600. Es ist von einem Dreieck gegeben das Verhältniß zweier Seiten, ein an der dritten Seite anliegender Winkel, und die zu der dritten Seite gehörige Halbirungslinie.

Gegeben $A : B = m : n$, $\llcorner b$ und (γ).

Analysis. Beschreibt man ein Dreieck aus m, n und $\llcorner b$, so daß $\llcorner b$ der n gegenüber liegt (Aufg. 4. S. 107), so ist dieses dem Gesuchten ähnlich; und verbindet man den Halbirungspunkt der dritten Seite dieses Dreiecks mit der gegenüber liegenden Spitze, so ist diese Linie der gegebenen (γ) gleichnamig.

Aufgabe 601. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die zu einer dieser Seiten gehörige Halbirungslinie, und einen an der dritten Seite anliegenden Winkel.

Gegeben $A : B = m : n$, (α) und $\llcorner b$.

Auflösung. Diese ist nicht verschieden von der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 602. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniß zweier Seiten, die Summe dieser Seiten, und die dritte Seite.

Gegeben $A : B = m : n$, $A + B$ und C.

Analysis. Da $A : B = m : n$

so ist $A + B : A = m + n : m$

und $A + B : B = m + n : n$

und es ist daher sowohl A als B gegeben.

Aufgabe 603. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die Differenz dieser Seiten und die dritte Seite.

Gegeben $A : B = m : n$, $A - B$ und C.

Analysis. Da $A : B = m : n$

so ist $A - B : A = m - n : m$

und $A - B : B = m - n : n$

folglich ist sowohl A als B gegeben.

Aufgabe 604. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniß der ersten Seite zu der zweiten, die Summe der zweiten und dritten Seite, und der der dritten Seite gegenüber liegende Winkel.

Gegeben $A : B = m : n$, $B + C$ und $\llcorner c$.

Auflösung. Beschreibt man aus m, n, und dem von diesen Linien eingeschlossenen Winkel c ein Dreieck, dessen dritte Seite $= k$ seyn mag, so ist dieses Dreieck dem Gesuchten ähnlich; und wird nun $B + C$ so getheilt, daß die Theile wie $n : k$ sich verhalten, so ist der erste dieser Theile $= B$ und der zweite $= C$.

Aufgabe 605. Es ist von einem Dreieck gegeben das Verhältniß der ersten Seite zu der zweiten, die Differenz der zweiten

und dritten Seite, und der der dritten Seite gegenüber liegende Winkel.

Gegeben $A : B = m : n$, $B - C$ und $\llcorner c$.

Auflösung. Beschreibe aus m, n, und dem eingeschlossenen $\llcorner c$ ein Dreieck, dessen dritte Seite $= k$ sey: so ist nun $n - k : n = B - C : B$: wodurch B bestimmt ist, und somit auch die beiden übrigen Seiten des Dreiecks.

Aufgabe 606. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniß der ersten Seite zu der zweiten, die Summe der ersten und dritten, und auch die der zweiten und dritten Seite.

Gegeben $A : B = m : n$, $A + C$ und $B + C$.

Analysis. Da gegeben ist $A + C$ und $B + C$, so ist auch gegeben $(A + C) - (B + C) = A - B$; da aber auch gegeben ist das Verhältniß von $A : B$, so sind die Seiten A und B gegeben (Aufg. 603.) und also auch C.

Aufgabe 607. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß der ersten Seite zu der zweiten, die Summe der ersten und dritten, und die Differenz der zweiten und dritten Seite.

Gegeben $A : B = m : n$, $A + C$ und $B - C$.

Analysis. Da gegeben ist $A + C$ und $B - C$, so ist auch gegeben $(A + C) + (B - C) = A + B$, und daher A und B (Aufg. 602.) und also auch C.

Aufgabe 608. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniß zweier Seiten, die zu einer dieser Seiten gehörige Normale und Halbirungslinie.

Gegeben $A : B = m : n$, α und (α).

Analysis. Es ist die zweifache Fläche des Dreiecks $A\alpha = B\beta$, und daher

$$A : B = \beta : \alpha$$
$$\text{und da } A : B = m : n$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\text{so ist } m : n = \beta : \alpha.$$

Da nun m, n und α gegeben sind, so ist auch β gegeben; man kennt aber auch (α), folglich sind von dem Dreieck gegeben α, β (α), und daher läßt das Dreieck sich construiren (Aufg. 272. Seite 315.)

Aufgabe 609. Es ist von einem Dreieck gegeben das Verhältniß zweier Seiten, die zu der ersten dieser Seiten gehörige Normale und die zu der andern gehörige Halbirungslinie.

Gegeben $A : B = m : n$, α und (β).

Aufgabe 610. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die zu der einen dieser Seiten gehörige Normale und die Halbirungslinie der dritten Seite.

Gegeben $A : B = m : n$, α und (γ).

Analysis. Es ist wie bei Aufg. 608.

$$m : n = \beta : \alpha$$

also β gegeben, aber auch α und (γ), und daher das Dreieck (Aufgabe 273. S. 315).

Aufgabe 611. Von einem Dreieck ist gegeben: das Verhältniß zweier Seiten, die zu einer dieser Seiten gehörige Normale, und die Normale der dritten Seite.

Gegeben $A : B = m : n$, α und γ.

Analysis. Die zweifache Fläche des Dreiecks ist $= A\alpha = C\gamma$, und es ist daher

$$A : C = \gamma : \alpha.$$

Da nun γ und α gegeben sind, so ist ihr Verhältniß gegeben, und also auch das von $A : C$. Da hiernach gegeben ist das Verhältniß von $A : B$ und das von $A : C$, so ist das Dreieck der Form nach gegeben (5.), und da man α kennt, so ist es auch der Größe nach gegeben.

Auflösung. Zu γ, α und m suche die vierte Proportionale k, und beschreibe aus m, n und k ein Dreieck: so ist dieses dem Gesuchten ähnlich, und es ist die zu m gehörige Normale der gegebenen α gleichnamig.

Aufgabe 612. Es sind von einem Dreieck die zu den drei Seiten desselben gehörigen Normalen gegeben; man soll das Dreieck verzeichnen.

Gegeben α, β, γ.

Analysis. Es ist $A\alpha = B\beta = C\gamma$

$$\text{und daher } A : B = \beta : \alpha$$
$$\text{und } B : C = \gamma : \beta.$$

Da nun α, β und γ gegeben sind, so ist auch gegeben das Verhältniß von $A : B$, und das von $B : C$, und daher das gesuchte Dreieck der Form nach (5.); und durch die Normalen ist es nun auch der Größe nach bestimmt.

Aufgabe 613. Es ist von einem Dreieck gegeben das Verhältniß zweier Seiten, und die zu diesen Seiten gehörigen Halbirungslinien.

Gegeben A : B = m : n, (α) und (β).

Analysis. Nach Nr. 5. Seite 226 ist

$$A^2 + C^2 = \frac{B^2}{2} + 2(\beta)^2$$

$$\text{und } B^2 + C^2 = \frac{A^2}{2} + 2(\alpha)^2$$

$$\text{daher abgezogen } A^2 - B^2 = \frac{B^2}{2} - \frac{A^2}{2} + 2(\beta)^2 - 2(\alpha)^2$$

Es ist also auch

$$2A^2 - 2B^2 = B^2 - A^2 + 4(\beta)^2 - 4(\alpha)^2$$

$$\text{und daher } 3A^2 - 3B^2 = 4(\beta)^2 - 4(\alpha)^2$$

$$\text{also } A^2 - B^2 = \frac{4}{3}[(\beta)^2 - (\alpha)^2]$$

und weil $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$, so ist

$$(A + B)(A - B) = \tfrac{4}{3}[(\beta)^2 - (\alpha)^2].$$

Da nun α und β gegeben sind, so ist das Rechteck $(A + B) \times (A - B)$ der Größe nach gegeben:

Nun ist A : B = m : n

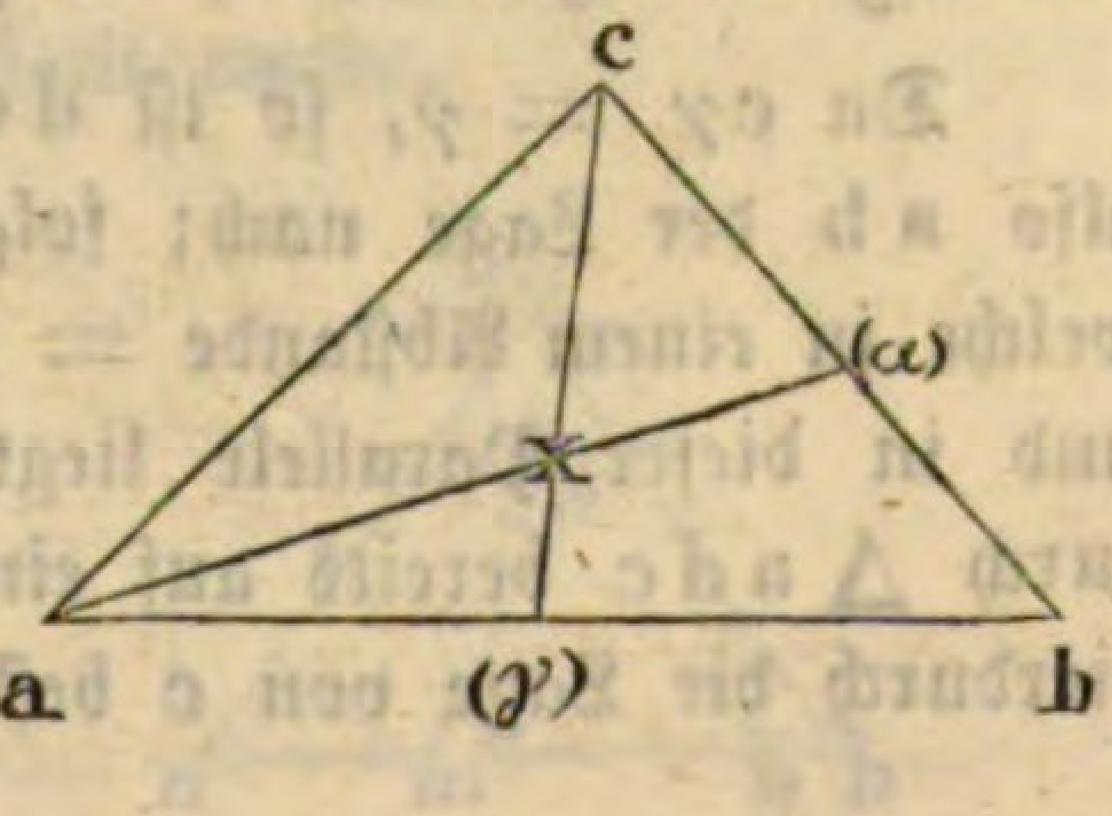
und daher A + B : A − B = m + n : m − n.

Folglich ist das Verhältniß der Linien A + B und A − B ebenfalls gegeben, und daher das Rechteck $(A + B) \times (A - B)$ auch der Form nach.

Auflösung. Beschreibe ein Rechteck, von welchem m + n und m − n die Seiten sind; und hierauf ein Rechteck, das diesem ähnlich ist, und dessen Fläche = $\frac{3}{4}[(\beta)^2 - (\alpha)^2]$ nach (21.): so sind die Seiten dieses Rechtecks A + B und A − B, wodurch A und B bestimmt sind.

Aufgabe 614. Man kennt von einem Dreieck das Verhältniß zweier Seiten, die zu einer dieser Seiten gehörige Halbirungslinie, und die Halbirungslinie der dritten Seite.

Gegeben A : B = m : n, (α) und (γ)



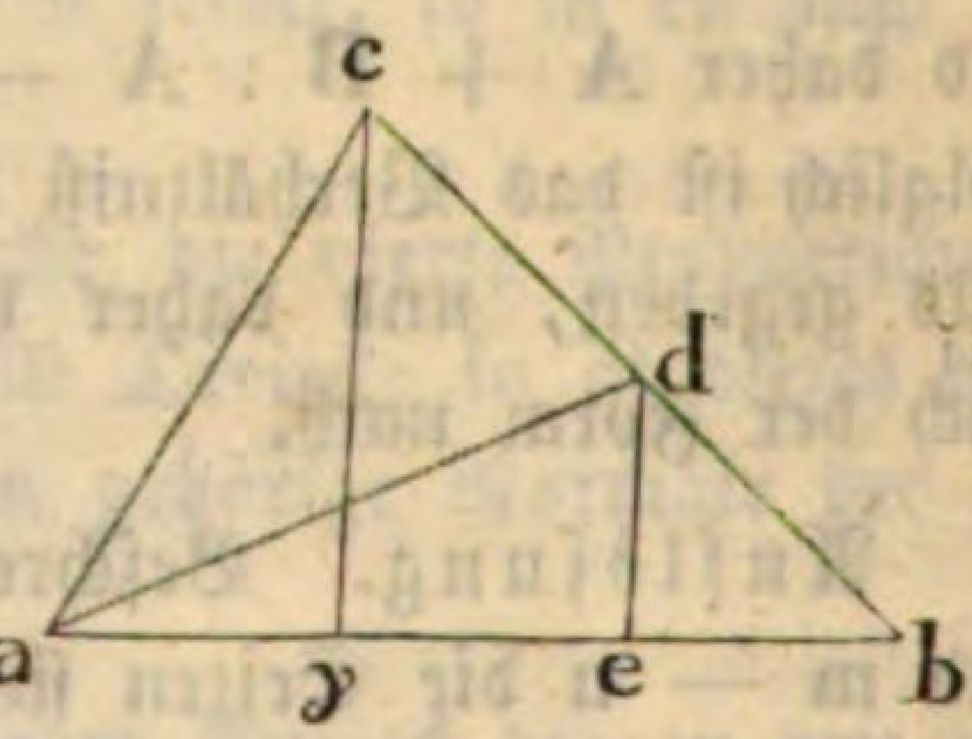
Analysis. a (α) = (α) und c (γ) = (γ) daher ax = $\frac{2}{3}$ (α) und cx = $\frac{2}{3}$ (γ) (Lehnsatz Seite 316). Nun ist a (α) gegeben, also der Punkt x dieser Linie, und cx der Größe nach.

$$\text{Da} \quad ac = B,\ cb = A$$
$$\text{und}\ A : B = m : n$$
$$\text{so ist auch}\ cb : ca = m : n$$
$$\text{und daher}\ \frac{cb}{2} : ca = \frac{m}{2} : n.$$
$$\text{Da nun}\ \frac{cb}{2} = c\,(\alpha),\ \text{so ist}$$
$$c\,(\alpha) : ca = \frac{m}{2} : n.$$

Folglich ist in $\Delta\, ac\,(\alpha)$ das Verhältniß der Seiten $ac : c\,(\alpha)$ gegeben, aber auch die Grundlinie $a\,(\alpha) = (\alpha)$.

Folglich der geometrische Ort für die Spitze c dieses Dreiecks (Aufg. 588.). Da nun der Punkt x der Lage, und $cx = \frac{2}{3}(\gamma)$ der Größe nach gegeben ist: so ist auch der Punkt c der Lage nach gegeben, und daher $ac = B$ und $c\,(\alpha) = \frac{1}{2}A$, wodurch das zu construirende Dreieck bestimmt ist.

Aufgabe 615. Von einem Dreieck ist das Verhältniß zweier Seiten gegeben, die zu einer dieser Seiten gehörige Halbirungslinie, und die Normale der dritten Seite.



Gegeben $A : B = m : n$, (α) und γ.

Analysis. Ist $ad = (\alpha)$, so wird cb in d halbirt; und da $cb = A$ und $ca = B$, und da das Verhältniß gegeben ist

$$A : B = m : n$$
$$\text{so ist auch gegeben}\ \frac{A}{2} : B = \frac{m}{2} : n$$
$$\text{also}\ cd : ca = \frac{m}{2} : n.$$

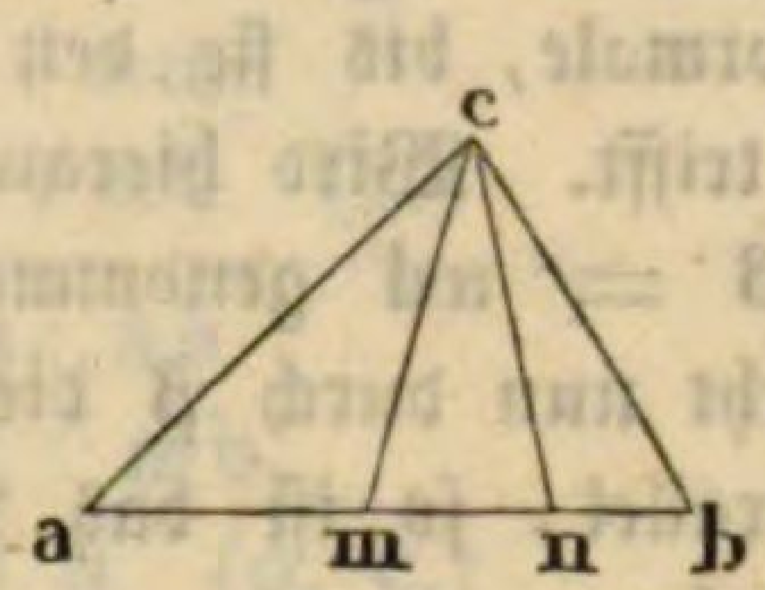
Aber auch $ad = (\alpha)$ ist gegeben, folglich der geometrische Ort für die Lage des Punktes c in $\Delta\, adc$.

Da $c\gamma = \gamma$, so ist $de = \frac{1}{2}\gamma$ gegeben, und daher $\Delta\, ade$ also ab der Lage nach; folglich auch die der ab parallele Linie, welche in einem Abstande $= \gamma$ von derselben gezogen werden kann; und in dieser Parallele liegt der Punkt, dessen geometrischer Ort durch $\Delta\, adc$ bereits auf eine andere Art gefunden ist, und es ist hierdurch die Lage von c bestimmt.

§. 35.

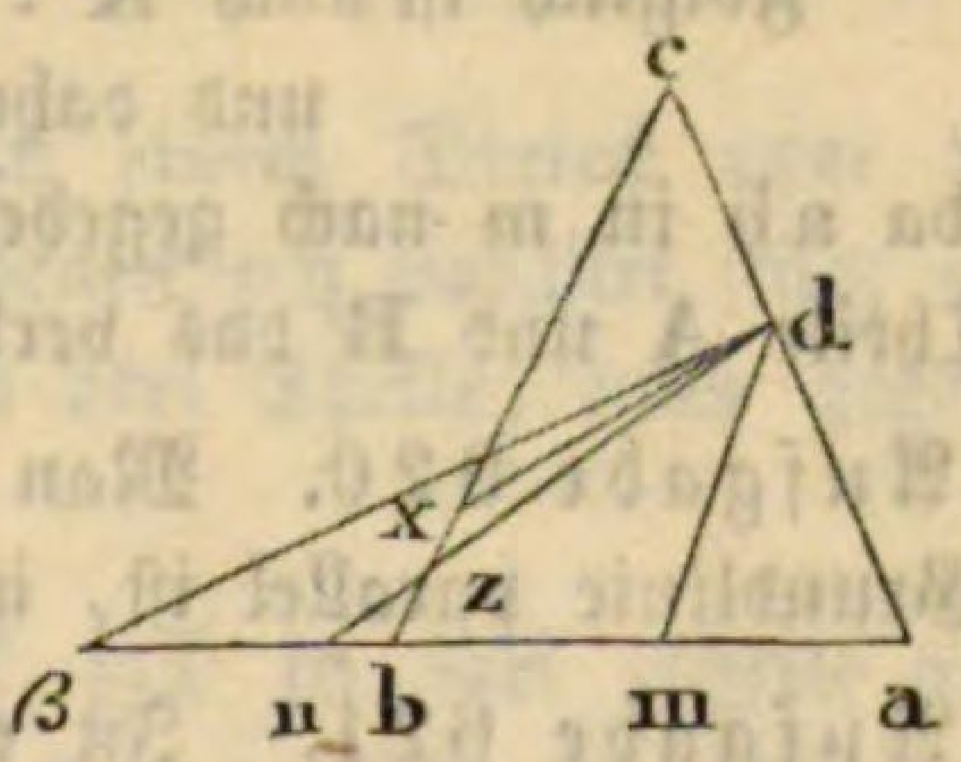
Aufgaben von der Theilung der Figuren.

Aufgabe 616. Ein gegebenes Dreieck soll von der Spitze c aus in drei Theile getheilt werden, die in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.



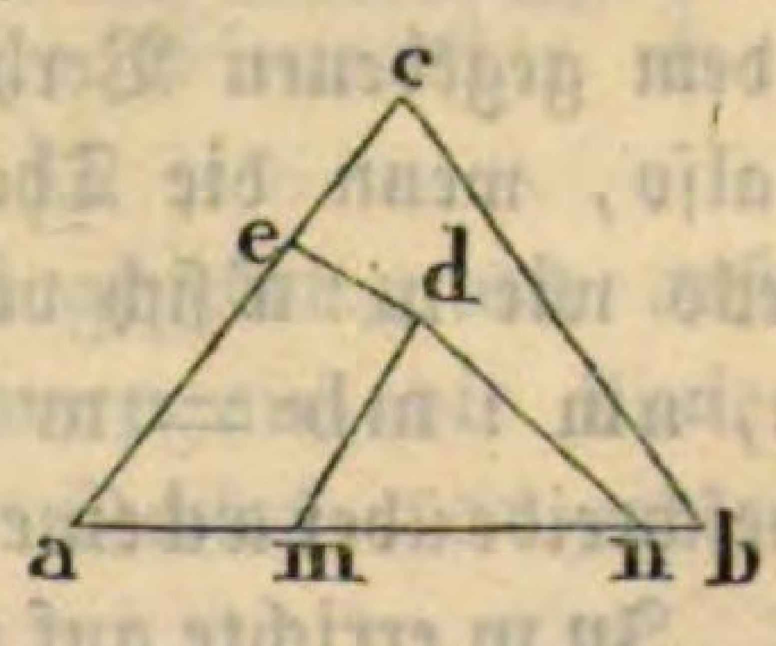
Auflösung. Man theile die Grundlinie ab in m und n, so daß die Theile am, mn, nb in dem gegebenen Verhältnisse zu einander sind (10.), und ziehe cm, cn: so haben die Dreiecke acm, mcn und ncb eben dieses Verhältniß zu einander (1.).

Aufgabe 617. In der einen Seite eines Dreiecks ist ein Punkt d gegeben; man soll von diesem Punkte aus zwei gerade Linien so ziehen, daß das Dreieck dadurch in 3 Theile, nach gegebenen Verhältnissen, getheilt werde.



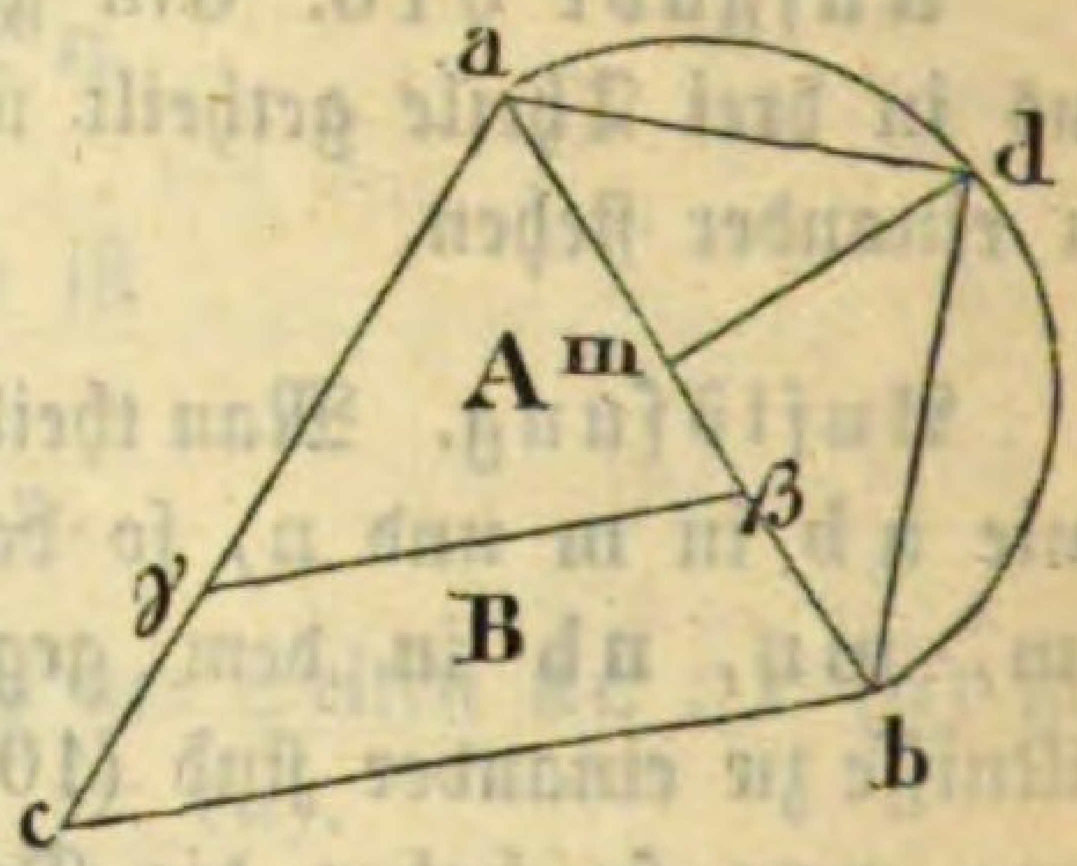
Auflösung. Verwandele das gegebene Dreieck abc in ein anderes $ad\beta$, dessen Spitze in d liegt (Aufgabe 131.), theile $a\beta$ in m und n nach dem gegebenen Verhältniß; ziehe dm, dn; und wenn, wie hier, der eine Theilpunkt in der verlängerten ab liegt, so ziehe dx, daß $\Delta dxz = \Delta bzn$ wird (Aufg. 133.): so sind dm und dx die gesuchten Theilungslinien.

Aufgabe 618. Innerhalb eines Dreiecks ist ein Punkt d gegeben, und durch de mit einem Punkte des Umfanges verbunden; man soll von d aus die Linien dm und dn so ziehen, daß durch diese beiden Linien und die gegebene de das Dreieck in 3 Theile, nach einem gegebenen Verhältnisse, getheilt werde.



Auflösung. Man verwandele das gegebene Dreieck abc in ein anderes, dessen Spitze in d liegt, nach der Anleitung (Aufg. 145.), und verfahre hierauf wie bei der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 619. Man soll in einem gegebenen Dreieck abc eine Linie $\beta\gamma$ der Grundlinie bc parallel so ziehen, daß das Dreieck dadurch nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werde.



Auflösung. Ueber ab beschreibe einen Halbkreis, theile ab in m nach dem gegebenen Verhältniß, und errichte in m auf ab eine Normale, bis sie den Halbkreis in d trifft. Wird hierauf ad gezogen, aβ = ad genommen, und man zieht nun durch β die $\beta\gamma$ der bc parallel, so ist das Verlangte geschehen.

Beweis. Es ist $A : A + B = (a\beta)^2 : (ab)^2$ (19.)

$= (ad)^2 : (ab)^2$

und weil $ab : ad = ad : am$ (8.)

so ist $ab : am = (ab)^2 : (ad)^2$ (§. 20. Seite 465.)

Folglich ist auch $A : A + B = am : ab$

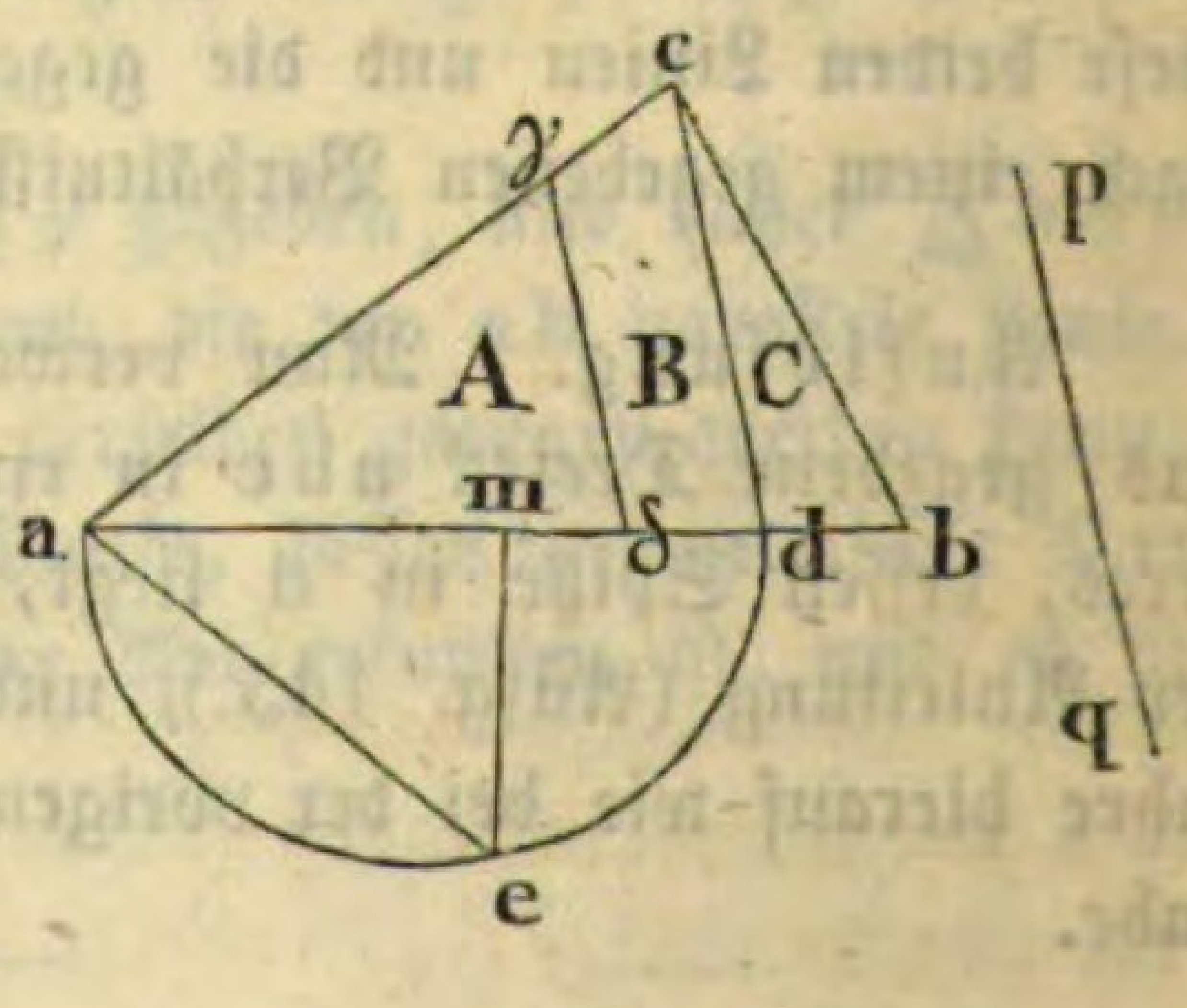
und daher $A : B = am : mb$

und da ab in m nach gegebenem Verhältnisse getheilt ist, so haben die Theile A und B das verlangte Verhältniß zu einander.

Aufgabe 620. Man soll ein Dreieck durch eine Linie, welche der Grundlinie parallel ist, in zwei gleiche Theile theilen.

Aufgabe 621. In einem Dreieck sollen zwei Linien der Grundlinie parallel gezogen werden, daß dasselbe dadurch in drei Theile getheilt werde, die in gegebenen Verhältnissen zu einander sind.

Aufgabe 622. Man soll ein Dreieck nach einem gegebenen Verhältniß in zwei Theile theilen, und es soll die Theilungslinie einer der Lage nach gegebenen Linie pq parallel seyn.



Auflösung. Durch c ziehe die cd prll. pq, die Seite ab des Dreiecks theile in m nach dem gegebenen Verhältniß; daß also, wenn die Theile des Dreiecks wie m : n sich verhalten sollen, am : mb = m : n ist, und beschreibe über ad einen Halbkreis. In m errichte auf ab eine

Normale, bis sie den Halbkreis in e trifft, ziehe ae, nimm $a\delta = ae$, und ziehe durch δ die $\delta\gamma$ parallel cd, so ist $\delta\gamma$ die gesuchte Theilungslinie.

Beweis. Es ist $A + B : A = (ad)^2 : (a\delta)^2$ (19.)
$= (ad)^2 : (ae)^2$
und weil $ad : ae = ae : am$ (8.)
so ist $(ad)^2 : (ae)^2 = ad : am$ (§ 20. S. 465)
und daher auch $A + B : A = ad : am$.
Nun ist aber $A + B : A + B + C = ad : ab$ (1.)

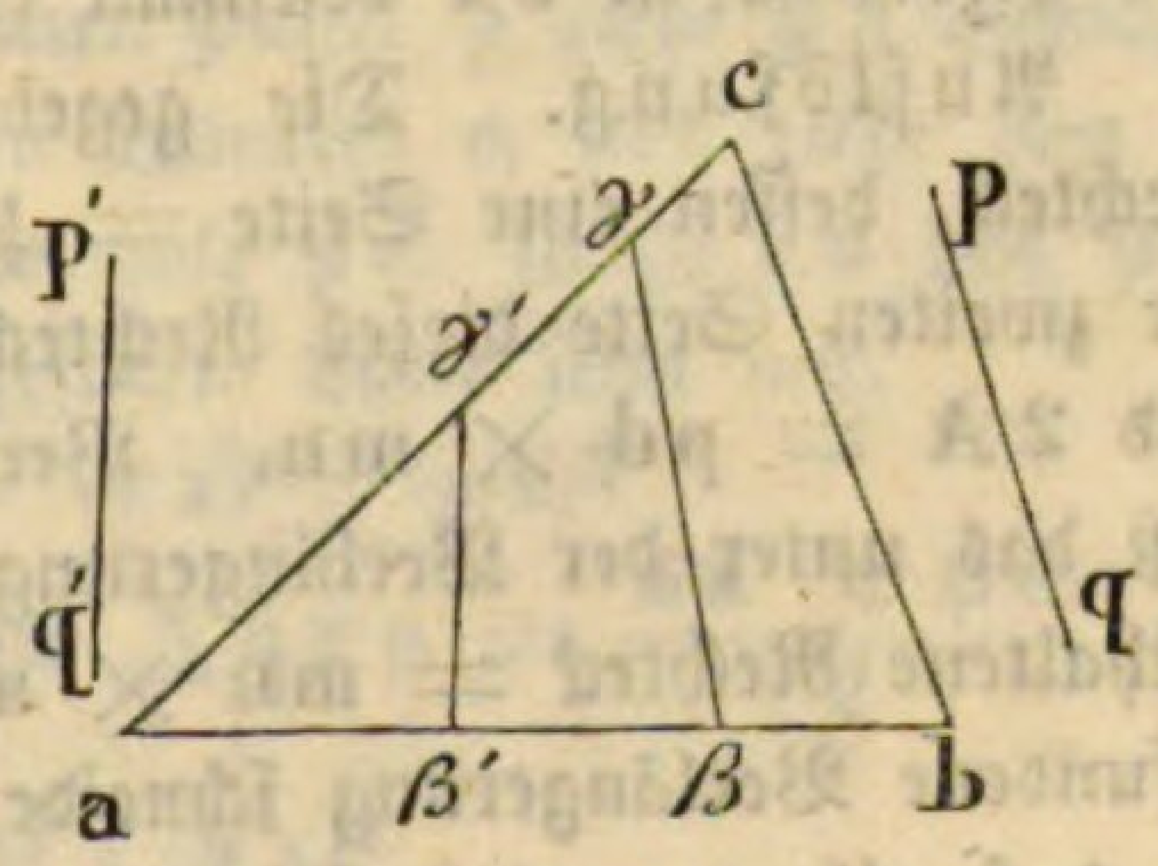
folglich $A : A + B + C = am : ab$
und daher $A : B + C = am : mb$.
Da nun $am : mb = m : n$ (p. c.)

so ist $A : B + C = m : n$
also $\triangle a\gamma\delta : \gamma\delta bc = m : n$.

Aufgabe 623. Ein Dreieck soll durch eine gerade Linie halbirt werden, die einer der Lage nach gegebenen Linie pq parallel ist.

Aufgabe 624. Man soll in einem Dreieck zwei Linien ziehen, die einer der Lage nach gegebenen pq parallel sind; und es soll das Dreieck durch diese Linien in drei Theile, nach gegebenen Verhältnissen, getheilt werden.

Aufgabe 625. Ein Dreieck soll in drei Theile getheilt werden, die sich verhalten, wie $m : n : o$; und es soll die eine Theilungslinie einer der Lage nach gegebenen Linie pq, und die andere der der Lage nach gegebenen p'q' parallel seyn.



Auflösung. Ziehe $\gamma\beta$ der pq prll., so daß $a\gamma\beta : \gamma\beta bc = m + n : o$, und ziehe hierauf in $\triangle a\beta\gamma$ die $\gamma'\beta'$ parallel p'q', daß
$\triangle a\gamma'\beta' : \gamma'\beta'\beta\gamma = m : n$, so sind $\gamma'\beta'$ und $\gamma\beta$ die gesuchten Theilungslinien.

Aufgabe 626. Ein Winkel c ist gegeben, und außerhalb dieses Winkels ein Punkt p; man soll von p aus die Linie pxz so ziehen, daß das dadurch abgeschnittene Dreieck xcz einer gegebenen Figur A gleich werde.

Analysis. Durch p ziehe pa prll. cb und pd normal auf ca, so sind ca und pd gegeben, und es ist $\Delta pxa \sim \Delta zxc$; und es ist $\Delta zxc = A$

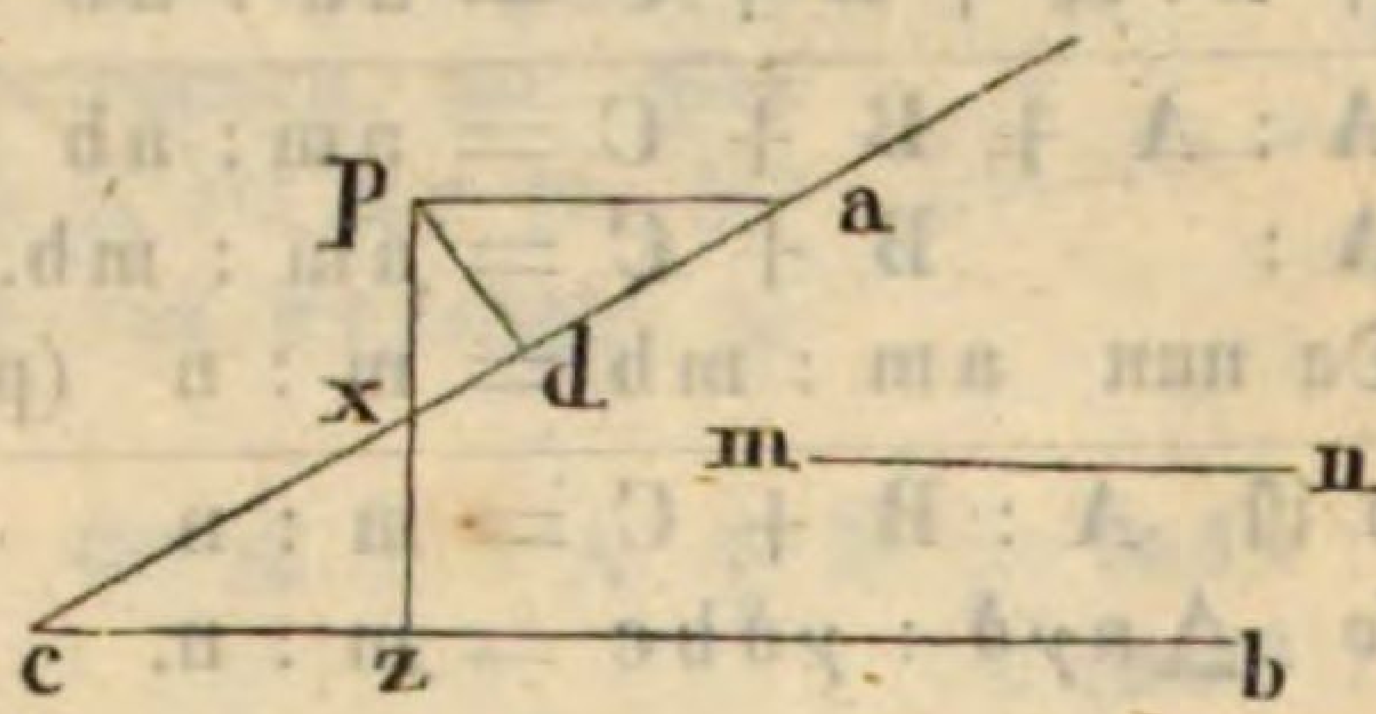
$$\Delta pxa = \tfrac{1}{2}(ax \times pd).$$

Nun ist $\Delta czx : \Delta apx = (cx)^2 : (xa)^2$

also auch $A : \tfrac{1}{2}(ax) \times (pd) = (cx)^2 : (xa)^2$

und $2A : (cx)^2 = ax \times pd : ax \times ax$

$= pd : ax.$



Setzt man aber $2A = pd \times mn$, so ist, weil pd gegeben ist, auch die Linie mn gegeben; und es ist nun

$$pd \times mn : (cx)^2 = pd : ax$$

also $mn : (cx)^2 = 1 : ax$

oder $mn : cx = cx : ax$

und daher $mn \times ax = (cx)^2$.

Und da $ax = ac - cx$, so ist auch

$$mn \times (ac - cx) = (cx)^2$$

also $mn \times ac = (cx)^2 + mn \times cx$

und $mn \times ac = cx \times (mn + cx)$

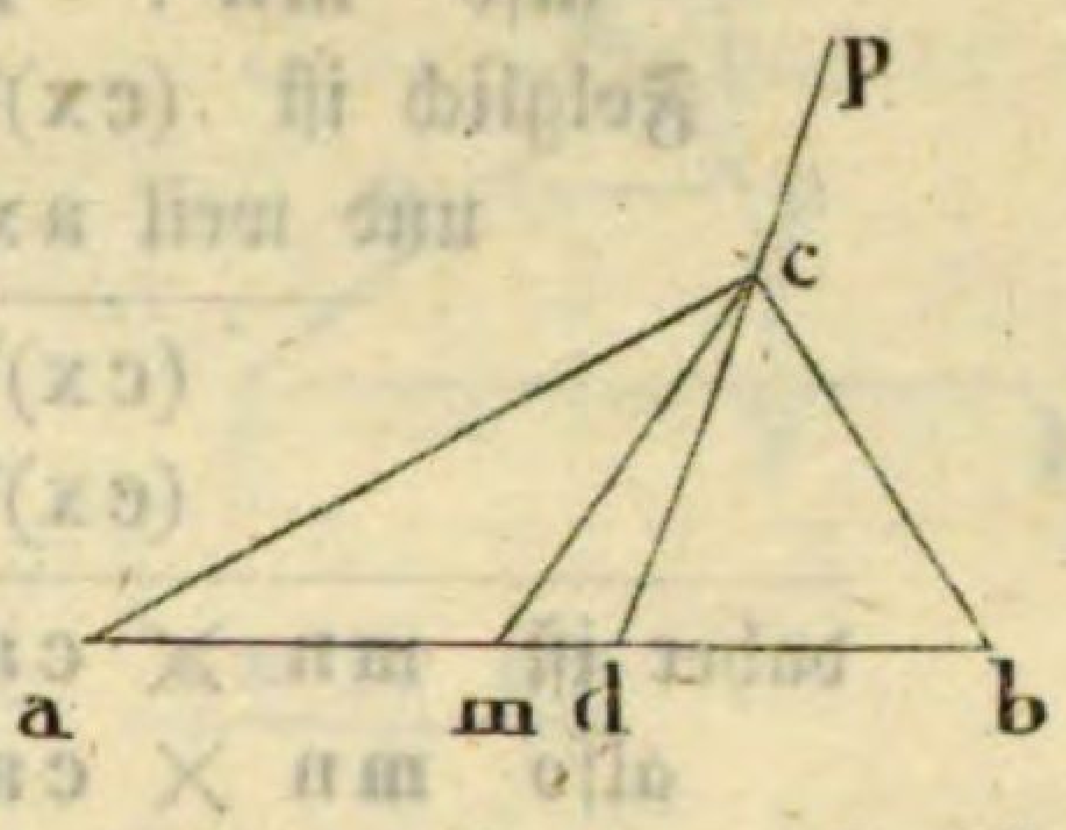
und hierdurch ist cx bestimmt (Aufg. 1. S. 207).

Auflösung. Die gegebene Figur A verwandele in ein Rechteck, dessen eine Seite $= \tfrac{1}{2}(pd)$ (I. 45.), und nimm mn = der zweiten Seite dieses Rechtecks, daß also $A = \tfrac{1}{2}(pd) \times (mn)$ und $2A = pd \times mn$. Verlängere hierauf mn um ein Stück, daß das unter der Verlängerung und der ganzen verlängerten Linie enthaltene Rechteck $= mn \times ac$ (Aufg. 1. Seite 207) wird; die gefundene Verlängerung schneide man auf dem Schenkel ca bis x ab, daß also cx diese Verlängerung werde. Zieht man hierauf von p durch x die gerade Linie pxz, so ist das durch diese Linie abgeschnittene Dreieck $xcz = A$.

Aufgabe 627. Von einem außerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkte p soll eine gerade Linie durch das Dreieck gezogen

werden, daß dasselbe dadurch nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werde.

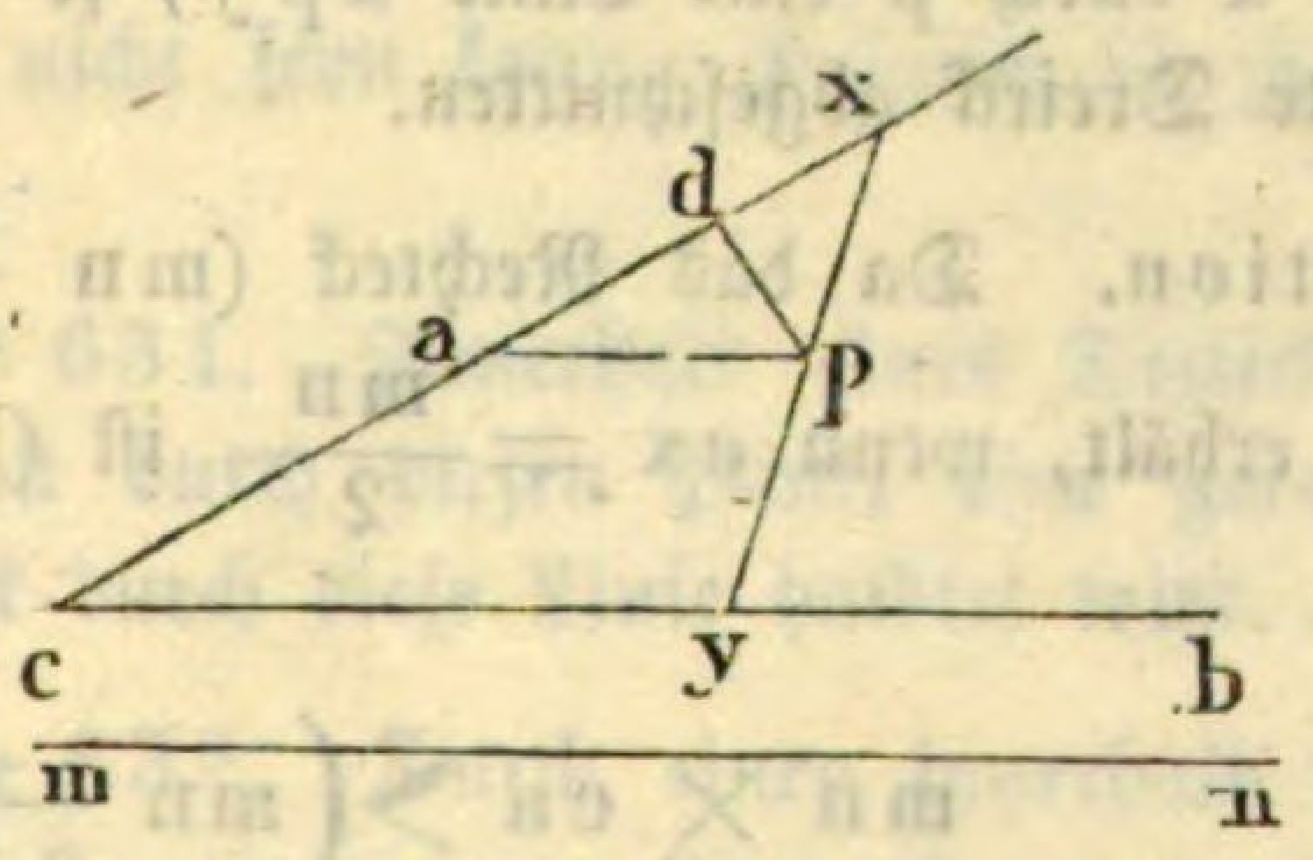
Auflösung. Von p ziehe durch c die Linie pcd, und theile ab in m nach dem gegebenen Verhältniß. Fällt nun m mit d zusammen, so ist pcd die gesuchte Theilungslinie; ist dieses aber nicht der Fall, so ziehe cm und schneide



von p aus durch ⌊a ein Dreieck ab, das = Δacm ist (Aufgabe 626.), so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 628. Man soll von einem außerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkte zwei Linien durch dasselbe so ziehen, daß das Dreieck hierdurch in drei Theile, nach gegebenen Verhältnissen, getheilt werde.

Aufgabe 629. Innerhalb eines Winkels ist ein Punkt p gegeben; man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß das durch diese Linie abgeschnittene Dreieck einer gegebenen Figur A gleich wird.



Analysis. Durch den gegebenen Punkt p ziehe pa parallel dem einen Schenkel cb des gegebenen Winkels c, und ziehe von p auf den anderen Schenkel ca die Normale pd: so ist ca und pd gegeben, und es ist, wenn xy die gesuchte Linie seyn soll,

$$\Delta cxy : \Delta axp = (cx)^2 : (ax)^2$$

und da $\Delta cxy = A$ seyn soll, und $\Delta axp = \frac{ax \times pd}{2}$ ist

$$A : \frac{ax \times pd}{2} = (cx)^2 : (ax)^2$$

also $2A : pd = (cx)^2 : ax.$

Wird nun 2 A in ein Rechteck verwandelt, dessen eine Seite pd ist, und setzt man die andere Seite dieses Rechtecks = mn, so ist mn gegeben, und

$$\frac{mn \times pd : pd = (cx)^2 : ax}{\text{also}\quad mn : 1 = (cx)^2 : ax.}$$

Folglich ist $(cx)^2 = mn \times ax$

und weil $ax = cx - ca$

$$(cx)^2 = mn\,(cx - ca)$$

$$(cx)^2 = mn \times cx - mn \times ca$$

daher ist $mn \times ca = mn \times cx - (cx)^2$

also $mn \times ca = (mn - cx) \times cx.$

Da nun mn und ca gegeben ist, so kann cx gefunden werden (Aufgabe 2. Seite 209), und es ist hierdurch die Aufgabe gelös't.

Auflösung. Man verwandele 2 A in ein Rechteck, dessen eine Seite = pd ist (I. 46.), und es sey mn die zweite Seite dieses Rechtecks; hierauf verwandele man das Rechteck $mn \times ca$ in ein Quadrat (II. 14.), dessen Seite = q seyn mag. Schneide nun mn, so daß das Rechteck beider Theile = q^2 wird (Aufg. 2. Seite 209), nimm cx so groß, als der eine dieser beiden Theile ist, und ziehe von x durch p eine Linie xpy, so wird durch diese Linie das verlangte Dreieck abgeschnitten.

Determination. Da das Rechteck $(mn - cx) \times cx$ den größten Werth erhält, wenn $cx = \frac{mn}{2}$ ist (II. 5.): so darf nicht seyn

$$mn \times ca > \left(mn - \frac{mn}{2}\right) \times \frac{mn}{2}$$

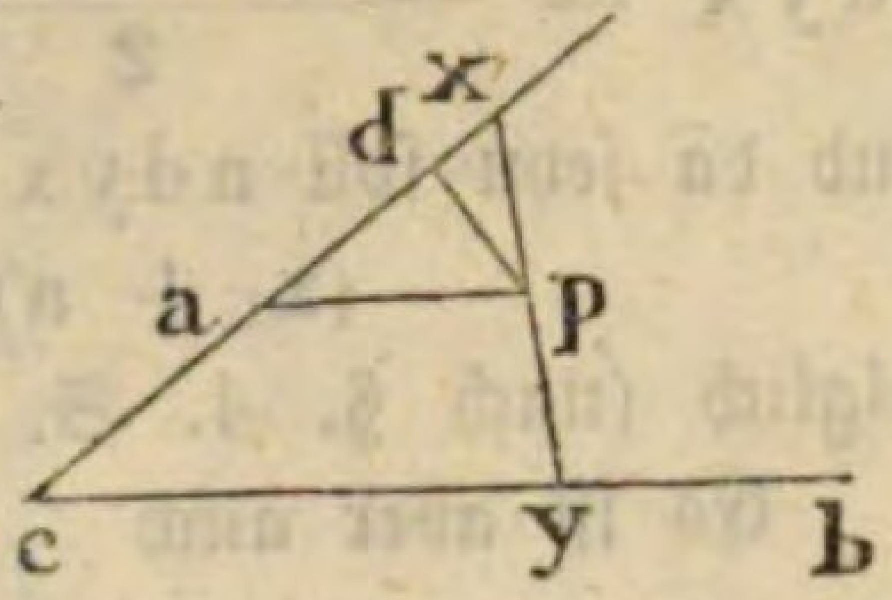
und also auch nicht $mn \times ca > \frac{mn}{2} \times \frac{mn}{2}$

„ „ „ „ $ca > \frac{mn}{4}.$

Es darf also ca nicht größer seyn, als der vierte Theil der Linie mn, wenn die Aufgabe sich soll lösen lassen. Ist aber $ca < \frac{mn}{4}$ und wird mn in der angegebenen Art getheilt: so kann jeder der beiden Theile dieser Linie für cx angenommen werden, und die Aufgabe läßt daher zwei verschiedene Auflösungen zu.

Aufgabe 630. Innerhalb eines Winkels ist ein Punkt p gegeben; man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so ziehen, daß dadurch das möglichst kleinste Dreieck abgeschnitten werde.

Auflösung. Ziehe pa parallel cb, nimm ax = ac und ziehe von x durch p die xpy, so ist Δcxy das möglichst kleinste Dreieck.



Beweis. Da xc = 2(xa) (p. c.), so ist $\Delta cxy = 4 \times \Delta xap$ (19.)

und weil $\Delta xap = \frac{ax \times dp}{2} = \frac{cx \times dp}{4}$

so ist: $\Delta cxy = cx \times dp$

Nach Aufg. 629. ist aber $2\,A = 2 \times \Delta cxy = mn \times dp$

folglich ist $2\,(cx) \times (dp) = mn \times dp$

$$\text{also } cx = \frac{mn}{2}$$

$$\text{und daher } ca = \frac{mn}{4}$$

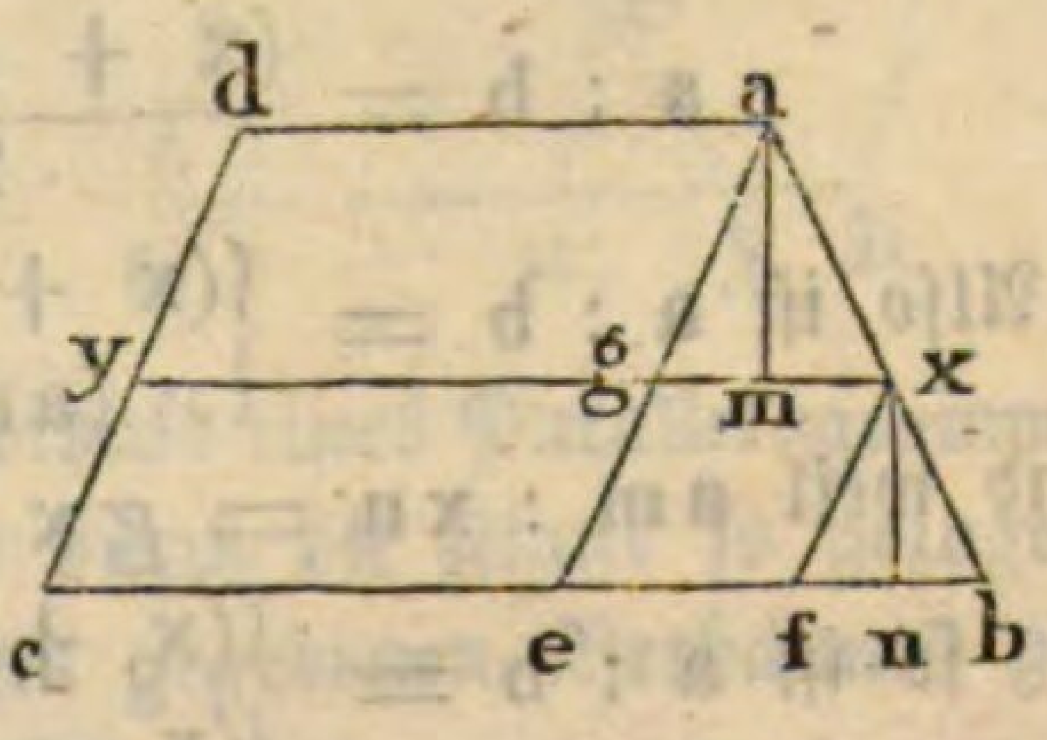
Für jeden kleineren Werth von A, also auch von Δcxy, würde auch mn kleiner seyn, und also $ca > \frac{mn}{4}$; was nach der obigen Determination nicht seyn kann. Folglich ist Δcxy das möglichst kleinste Dreieck.

Aufgabe 631. Innerhalb eines Dreiecks ist ein Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so ziehen, daß das Dreieck durch diese Linie halbirt wird.

Aufgabe 632. Durch einen innerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkt soll eine gerade Linie so gezogen werden, daß das Dreieck durch diese Linie nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

Aufgabe 633. Ein Paralleltrapez soll durch eine gerade Linie, welche den parallelen Seiten parallel ist, in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Analysis. Es sey xy die gesuchte Theilungslinie; man setze ad = a, bc = b, xy = x: so ist, wenn man ae und xf prll. dc zieht, xg = x − a und bf = b − x. Werden nun die Normalen am und xn gezogen, so ist



$$adyx = \frac{(x + a) . (am)}{2} \text{ und } xycb = \frac{(b + x) (xn)}{2}$$

Und da seyn soll $adyx = xycb$, so ist auch

$$(x + a) (am) = (b + x) (xn)$$

folglich (nach §. 4. S. 459) $am : xn = (b + x) : (x + a)$

Es ist aber auch

$am : xn = xg : bf$, also $am : xn = (x - a) : (b - x)$

also $(b + x) : (x + a) = (x - a) : (b - x)$

und daher $(b + x) (b - x) = (x + a) (x - a)$ (17.)

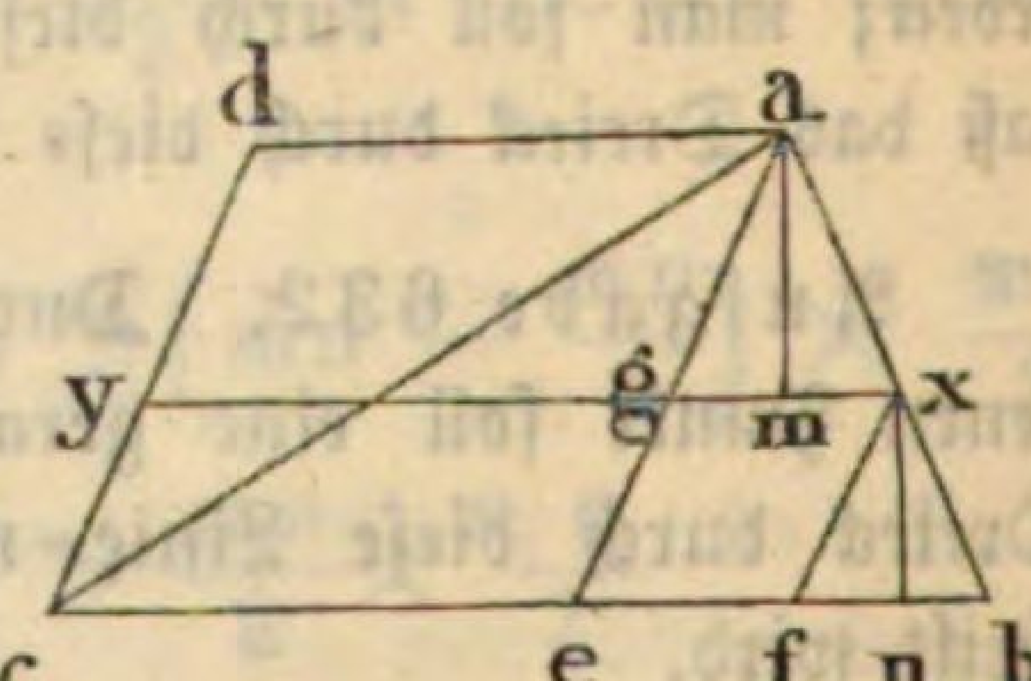
also $b^2 - x^2 = x^2 - a^2$ (II. 5.)

und $b^2 + a^2 = 2 x^2$

folglich ist $\frac{b^2 + a^2}{2} = x^2$ und also $x = \sqrt{\left(\frac{b^2 + a^2}{2}\right)}$

Auflösung. Beschreibe ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem bc und ad die Katheten sind; suche hierauf die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse dieses Dreiecks und der Hälfte derselben; schneide diese mittlere Proportionale von c bis f ab, und ziehe durch f die fx prll. cd und durch x die xy prll. bc: so ist xy die Theilungslinie, durch welche das Trapez halbirt wird.

Aufgabe 634. Ein Paralleltrapez soll durch eine Linie, welche den parallelen Seiten parallel ist, so getheilt werden, daß der eine Theil $adyx = \Delta adc$, und der andere Theil $xycb = \Delta acb$ wird.



Analysis. Da ad prll. bc, so haben die Dreiecke adc und acb gleiche Höhe, und es ist daher

$$\Delta adc : \Delta acb = ad : bc \quad (1.)$$

also auch $adyx : xycb = ad : bc$

und es ist daher, wenn man die Benennung, wie bei der vorigen Aufgabe, beibehält

$$a : b = \frac{(x + a) (am)}{2} : \frac{(b + x) (xn)}{2}$$

Also ist $a : b = \left\{\begin{matrix}(x + a) : (b + x) \\ (am) : (xn)\end{matrix}\right\}$

und weil $am : xn = gx : fb = x - a : b - x$

so ist $a : b = \left\{\begin{matrix}(x + a) : (b + x) \\ (x - a) : (b - x)\end{matrix}\right\}$

$$\text{also } a : b = x^2 - a^2 : b^2 - x^2$$

$$\text{daher } a\,(b^2 - x^2) = b\,(x^2 - a_2)$$

$$\text{also } ab^2 - ax^2 = bx^2 - a^2b$$

$$\text{folglich } ab^2 + a^2b = ax^2 + bx^2$$

$$\text{nämlich } ab\,(a + b) = (a + b)\,x^2$$

Es ist also $ab = x^2$ und daher $x = \sqrt{ab}$.

Die gesuchte Theilungslinie xy ist also die mittlere Proportionale zwischen den parallelen Seiten ad und bc des Paralleltrapezes.

Aufgabe 635. Ein Paralleltrapez soll durch eine Linie, welche den parallelen Seiten parallel ist, so getheilt werden, daß der obere Theil zu dem unteren wie $\alpha : \beta$ sich verhalte.

Analysis. Nach der Bezeichnung bei den beiden vorigen Aufgaben ist

$$\alpha : \beta = \begin{cases}(x + a) : (b + x)\\(x - a) : (b - x)\end{cases}$$

$$\text{also } \alpha : \beta = x^2 - a^2 : b^2 - x^2$$

$$\text{also } \alpha\,(b^2 - x^2) = \beta\,(x^2 - a^2)$$

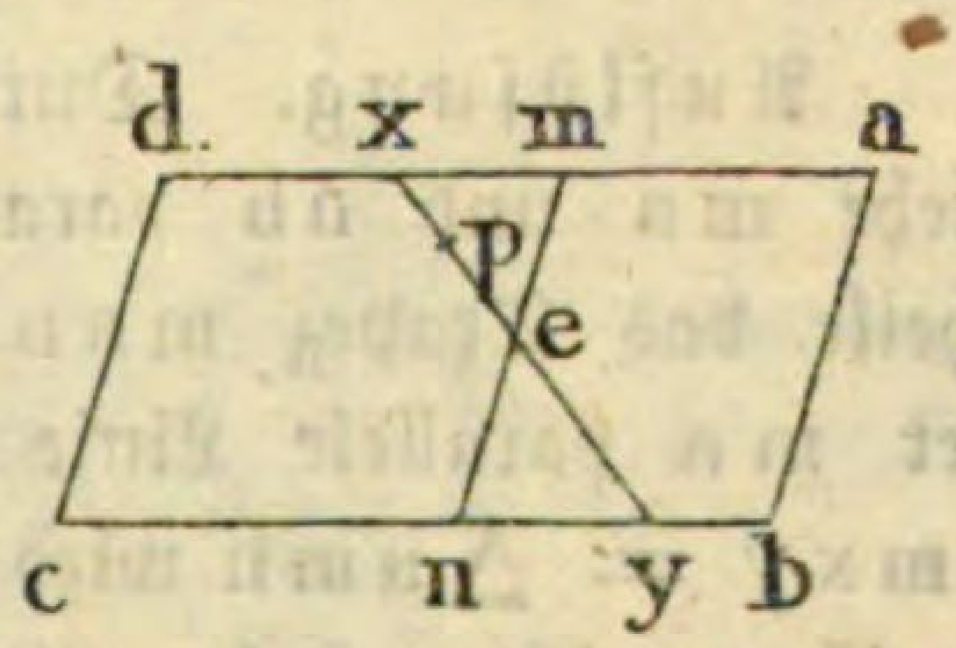
$$\text{und daher } \alpha b^2 - \alpha x^2 = \beta x^2 - \beta a^2$$

$$\text{Folglich ist } \alpha b^2 + \beta a^2 = (\alpha + \beta)\,x^2$$

$$\text{und daher } \frac{\alpha b^2 + \beta a^2}{\alpha + \beta} = x^2$$

$$\text{hiernach ist } x = \sqrt{\left(\frac{\alpha b^2 + \beta a^2.}{\alpha + \beta}\right)}$$

Aufgabe 636. Es ist ein Parallelogramm gegeben, und ein Punkt p innerhalb desselben; man soll durch diesen Punkt eine Linie so ziehen, daß die Figur hierdurch nach einem gegebenen Verhältniß getheilt wird.



Auflösung. Theile ad in m nach dem gegebenen Verhältniß, ziehe mn parallel ab, halbire die mn in e, und ziehe durch p und e die Linie xy, so ist diese die gesuchte Theilungslinie.

Aufgabe 637. Von einem außerhalb eines Parallelogramms gegebenen Punkte soll eine gerade Linie durch die Figur so gezogen werden, daß dieselbe hierdurch nach einem gegebenen Verhältniß getheilt wird.

Aufgabe 638. Eine geradlinige Figur soll von einem, in dem Umfange derselben gegebenen Punkt p nach gegebenen Verhältnissen getheilt werden.

Auflösung. Verwandele die Figur in ein Dreieck nach Anleitung (Aufg. 151. Seite 178), theile die Grundlinie desselben nach den gegebenen Verhältnissen, und verbinde die Theilpunkte mit dem Punkte p: so ist das Verlangte geschehen.

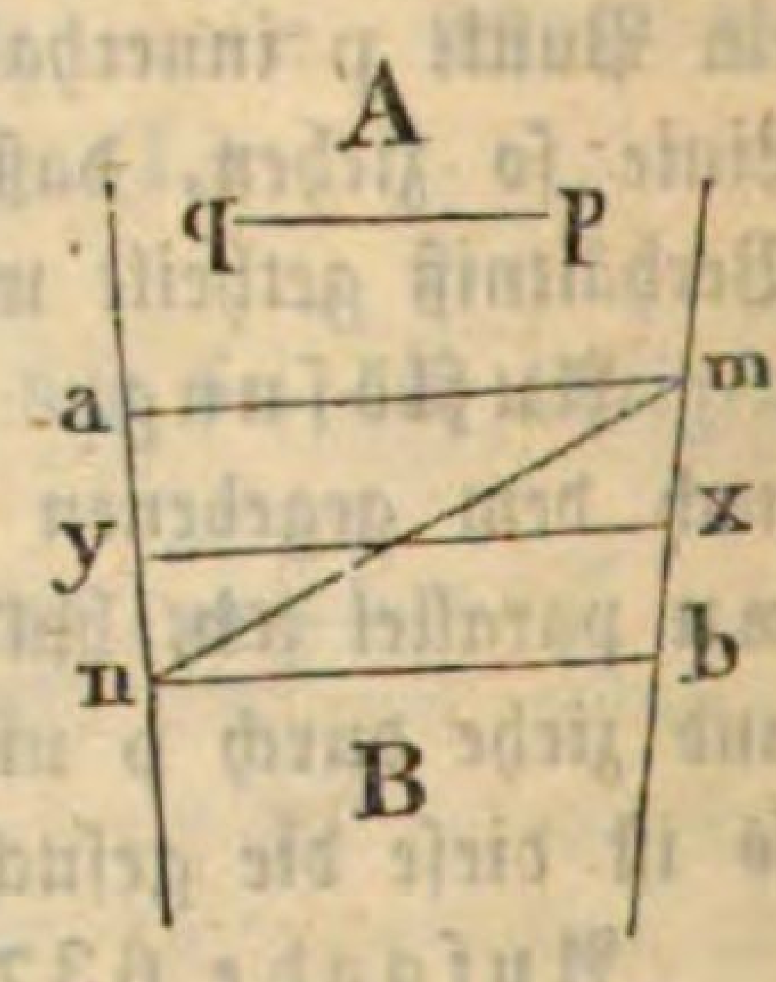
Anmerkung. Fällt eine Theilungslinie zum Theil außerhalb der Figur, so wird dieselbe hineingeschafft, wie bei Aufg. 154. Seite 179.

Aufgabe 639. Innerhalb einer geradlinigen Figur ist ein Punkt p gegeben, und mit einem Punkte des Umfanges durch eine gerade Linie verbunden; man soll von p aus gerade Linien ziehen, daß die Figur durch diese Linien, und durch die gegebene, nach gegebenen Verhältnissen getheilt wird.

Auflösung. Verwandele die Figur in ein Dreieck, dessen Spitze in p liegt (Aufg. 156. S. 180); theile hierauf die Grundlinie dieses Dreiecks nach den gegebenen Verhältnissen, und verbinde die Theilpunkte mit p.

Aufgabe 640. In dem Umfange einer Figur sind zwei Punkte gegeben; man soll von diesen Punkten aus zwei Linien ziehen, durch welche die Figur in drei Theile getheilt wird, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe 641. Die beiden Grundstücke A und B sind durch die Grenze mn getrennt; man soll ohne Aenderung der Größe dieser Grundstücke die Lage der Grenze so ändern, daß sie der, der Lage nach gegebenen Linie pq parallel werde.

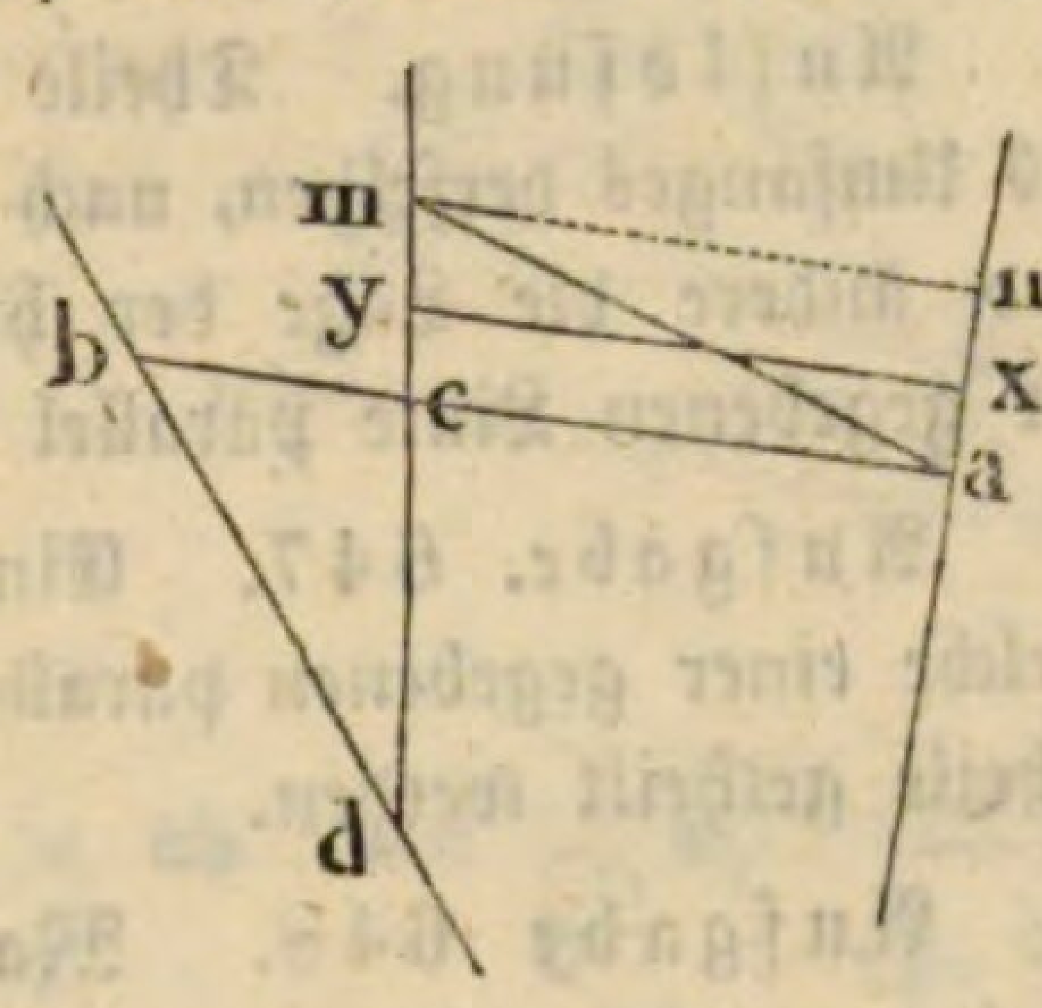


Auflösung. Durch m und n ziehe ma und nb parallel pq, und theile das Trapez manb durch eine der ma parallele Linie xy, so daß amxy = Δ amn wird (Aufg. 634.), so ist xy die gesuchte Grenze.

Aufgabe 642. Zwei Grundstücke sind durch eine gebrochene Grenze getrennt; man soll dieselbe in eine geradlinige Grenze verwandeln, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

Auflösung. Verwandele die gebrochene Grenze in eine geradlinige (Aufg. 161. Seite 183), und diese hierauf in eine andere, welche der gegebenen Linie parallel ist (Aufg. 641.).

Aufgabe 643. Man soll die Linie xy der gegebenen ab parallel so ziehen, daß das hierdurch erhaltene Paralleltrapez acyx dem Dreieck cbd gleich wird.

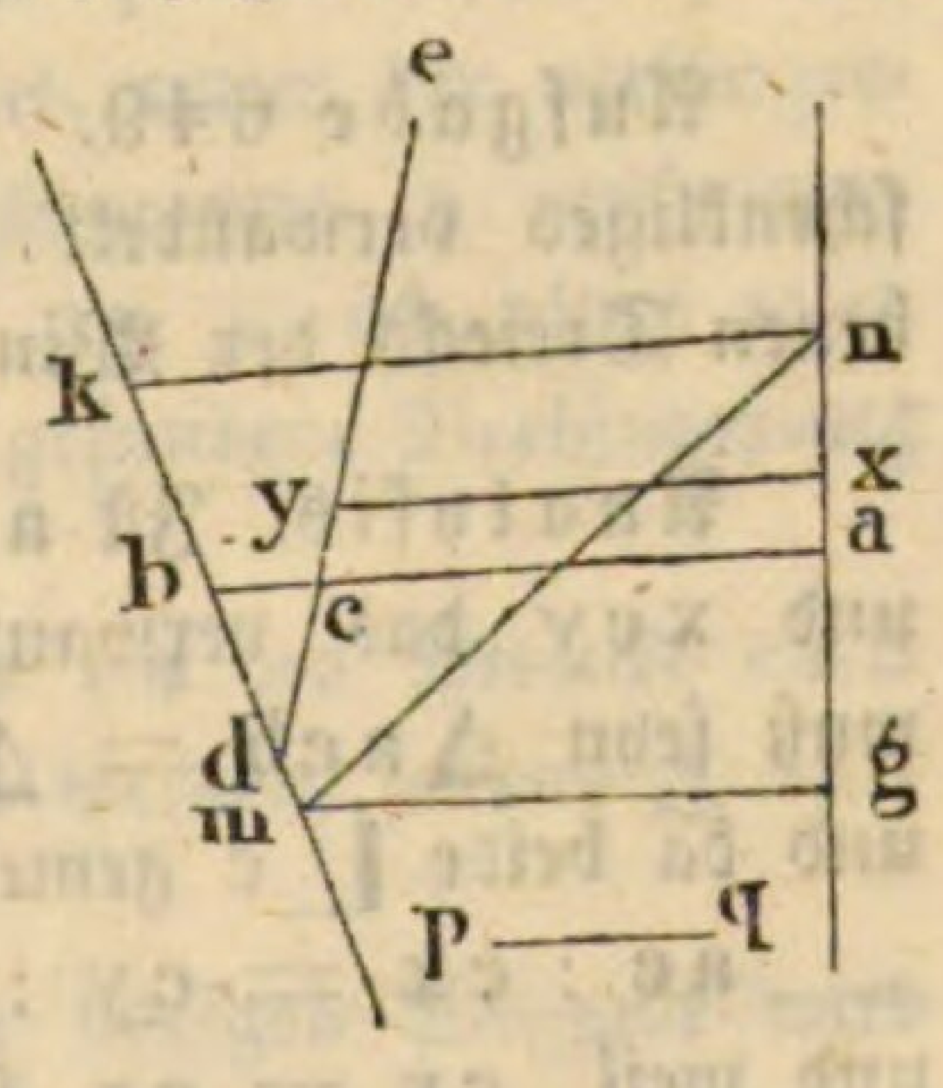


Auflösung. Zu ac, cb, cd suche die vierte Proportionale cm, ziehe am und mn parallel ac; theile hierauf das Paralleltrapez acmn durch xy parallel ac, so daß acyx = Δ acm wird (Aufgabe 634.), so ist das Verlangte geschehen.

Beweis. Da ac : cb = cd : cm
so ist Δacm = Δbcd (15.)
da nun Δacm = acyx (p. c.)

so ist auch acyx = Δbcd.

Aufgabe 644. Die Grenze mn soll in eine andere xy verwandelt werden, welche einer der Lage nach gegebenen Linie pq parallel ist. Die Seitengrenze mde aber ist in d gebrochen.



Auflösung. Durch m und n ziehe mg und nk parallel pq, und es treffe die nk die verlängerte md in k, ziehe ab parallel mg, so daß abkn = Δ knm wird (Aufgabe 634.), und ziehe hierauf xy parallel ab, daß acyx = Δbcd (Aufg. 643.): so ist xy die gesuchte Grenzlinie.

Aufgabe 645. Man soll von einer gegebenen geradlinigen Figur ein Stück von gegebener Größe abschneiden, und es soll die Theilungslinie einer gegebenen Linie parallel seyn.

Auflösung. In dem Umfange der Figur nehme man beliebig einen Punkt an, und ziehe von diesem Punkte aus eine gerade Linie, so daß dadurch der verlangte Theil abgeschnitten wird (Aufg. 153. Seite 179). Die hierdurch erhaltene Grenze verwandele

man in eine andere, welche der gegebenen Linie parallel ist (Aufgabe 644.), so ist das Verlangte geschehen.

Aufgabe 646. Eine geradlinige Figur soll durch eine Linie, welche einer gegebenen parallel ist, nach einem gegebenen Verhältniß in zwei Theile getheilt werden.

Auflösung. Theile die Figur, von irgend einem Punkte des Umfanges derselben, nach dem gegebenen Verhältniß (Aufg. 638.), und ändere die Lage der hierdurch erhaltenen Grenze, so daß sie der gegebenen Linie parallel wird. (Aufg. 644.)

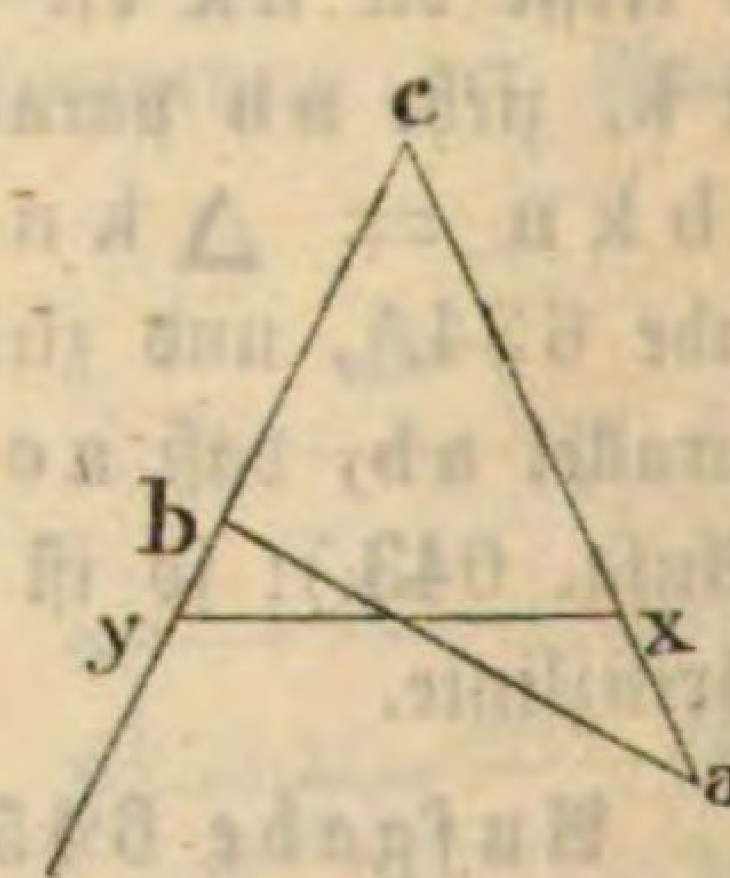
Aufgabe. 647. Eine geradlinige Figur soll durch Linien, welche einer gegebenen parallel sind, in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden.

Aufgabe 648. Man soll eine geradlinige Figur durch Linien, welche einer gegebenen parallel sind, in mehrere Theile theilen, die in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.

§. 36.

Noch einige Aufgaben, deren Auflösungen von den Sätzen des sechsten Buches abhängen.

Aufgabe 649. Ein ungleichseitiges Dreieck soll in ein gleichschenkliges verwandelt werden, so daß der eine Winkel des gegebenen Dreiecks der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen wird.



Analysis. Ist acb das gegebene, und xcy das verwandelte Dreieck, so muß seyn $\Delta acb = \Delta xcy$; und da beide $\angle c$ gemein haben, so ist

$ac : cx = cy : cb$ (15.)

und weil $cy = cx$ seyn soll

$ac : cx = cx : cb.$

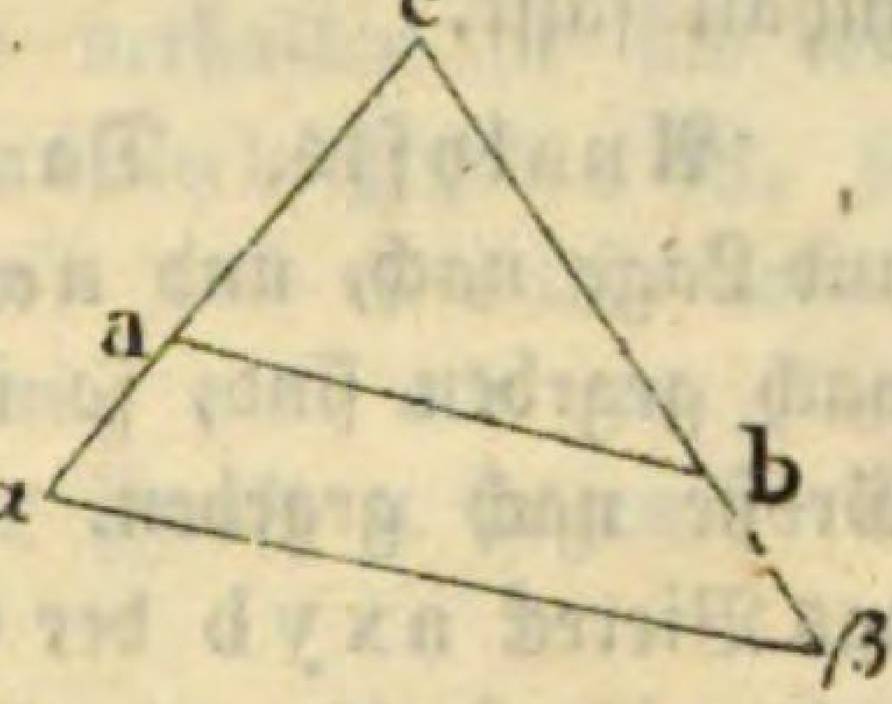
Der gesuchte Schenkel cx ist also die mittlere Proportionale zwischen den Seiten ca und cb des gegebenen Dreiecks.

Aufgabe 650. Ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck soll in ein gleichseitiges verwandelt werden.

Auflösung. Verwandele das gegebene Dreieck in ein anderes, von welchem der eine Winkel $= \frac{2}{3}$ R ist (Aufgabe 136.

Seite 173), und verwandele dieses hierauf mit Beibehaltung dieses Winkels, als Winkel an der Spitze, in ein gleichschenkliges, so ist dieses Dreieck gleichseitig.

Aufgabe 651. Die beiden Seiten ca und cb des gegebenen Dreiecks abc sollen um gleich viel bis α und β verlängert werden, so daß, wenn man $\alpha\beta$ zieht, $\Delta c\alpha\beta$ zwei mal so groß als das gegebene Δcab wird.



Analysis. Für $ca = a$, $cb = b$ und $a\alpha = b\beta = x$, ist $c\alpha = a + x$ und $c\beta = b + x$.

Nun ist $\Delta cab : \Delta c\alpha\beta = ca \times cb : c\alpha \times c\beta$ (23.)
und $\Delta cab : \Delta c\alpha\beta = 1 : 2$ (p. h.)

also $ca \times cb : c\alpha \times c\beta = 1 : 2$
oder $a \times b : (a + x) \times (b + x) = 1 : 2$
folglich ist $2ab = (a + x)(b + x)$
und $2ab = ab + ax + bx + x^2$
daher $ab = (a + b + x)x$;
wodurch x bestimmt ist.

Auflösung. Verlängere die Linie $a + b = ca + cb$ um ein zu bestimmendes Stück x, so daß das, unter der verlängerten Linie $a + b + x$ und deren Verlängerung x enthaltene Rechteck dem gegebenen Rechteck $a \times b = ca \times cb$ gleich wird (Aufg. 1. Seite 207.): so ist die hierdurch gefundene Verlängerung $= a\alpha = b\beta$.

Aufgabe 652. Die Seiten ca und cb des Dreiecks cab sollen um gleichviel bis α und β verlängert werden, so daß Δcab zu $\Delta c\alpha\beta$ wie m zu n sich verhalte.

Auflösung. Nach der Analysis der vorigen Aufgabe wird bei derselben Bezeichnung

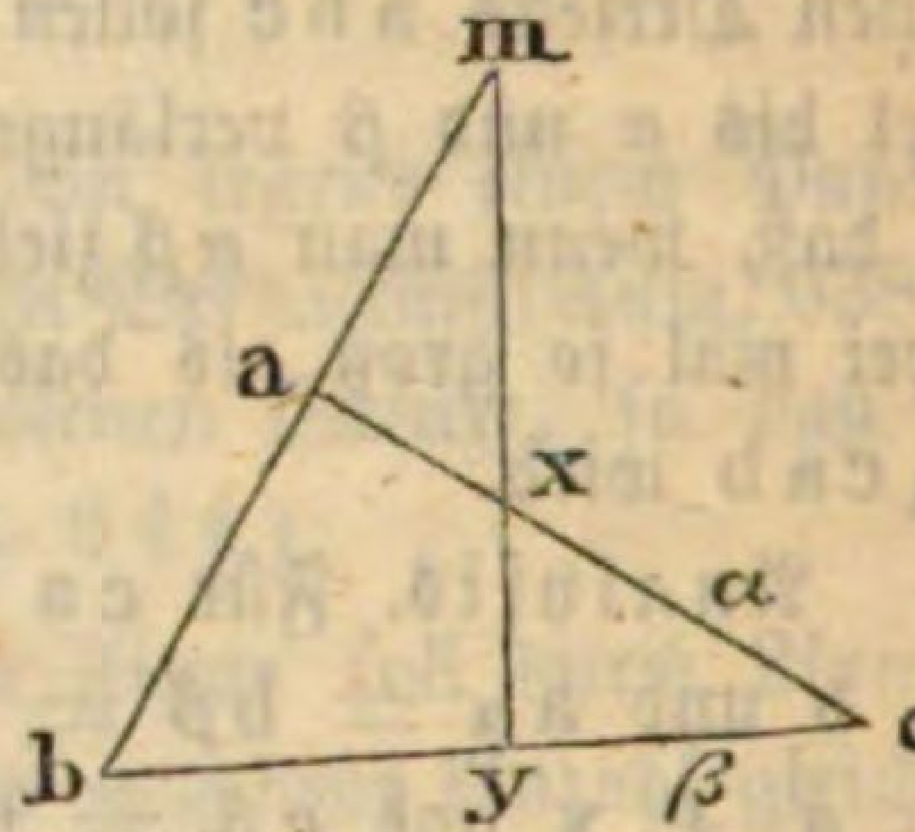
$$a \times b : (a + x) \times (b + x) = m : n$$

also $ab : ab + ax + bx + x^2 = m : n$
und $ab : ax + bx + x^2 = m : n - m$

Folglich ist $\left(\frac{n - m}{m}\right) ab = (a + b + x)\,x$;

wodurch x gefunden wird, wie bei der vorigen Aufgabe, wenn man das Rechteck $= \left(\frac{n - m}{m}\right) ab$ zuvor bestimmt.

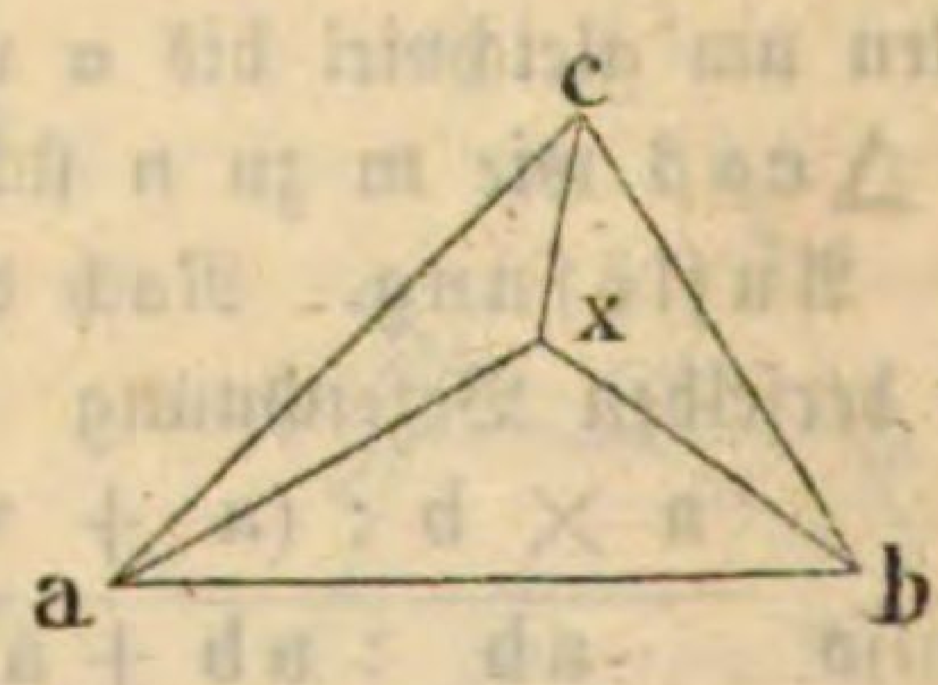
Aufgabe 653. Die gerade Linie mab ist der Größe und Lage nach, und die Linien aα, bβ sind der Lage nach gegeben; man soll von m aus die gerade Linie mxy so ziehen, daß das durch dieselbe abgeschnittene Viereck xaby einen gegebenen Flächeninhalt fasse.



Analysis. Da ab der Größe und Lage nach, und aα, bβ der Lage nach gegeben sind, so ist Δabc der Größe nach gegeben. Da nun auch das Viereck axyb der Größe nach gegeben ist, so ist auch Δcxy gegeben, und man kann daher von m aus die mxy so ziehen, daß das von $\llcorner$ c abgeschnittene Dreieck cxy einen Flächeninhalt = Δabc — axyb hält (Aufg. 626.), und hierdurch ist die Linie mxy der Lage nach gegeben.

Aufgabe 654. Die gerade Linie mab ist der Größe und Lage nach gegeben, und die Linien bβ und aα, welche parallel unter sich sind, der Lage nach; man soll von m aus die mxy so ziehen, daß das dadurch abgeschnittene Paralleltrapez axyb einen gegebenen Flächeninhalt fasse.

Aufgabe 655. Es ist ein Dreieck abc gegeben; man soll innerhalb dieses Dreiecks einen Punkt x von der Lage finden, daß wenn man xa, xb, xc zieht, diese drei Linien in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.



Analysis. Da ab gegeben ist und das Verhältniß von ax : xb, so ist der geometrische Ort für die Spitze x des Dreiecks abx gegeben (Aufg. 588. Seite 578), und eben so ist auch, da ac gegeben ist, und das Verhältniß ax : xc, der Ort für die Spitze des Dreiecks acx gegeben, und es ist hierdurch die Lage von x vollkommen bestimmt.

Aufgabe 656. Man soll innerhalb eines Dreiecks einen Punkt x von der Lage finden, daß, wenn man von x aus die Linien xa, xb, xc zieht, die Dreiecke abx, acx und bcx ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Analysis. Soll seyn

$$\Delta abx : \Delta acx : \Delta bcx = \gamma : \beta : \alpha$$

so ist $\Delta abx : \Delta abc = \gamma : (\gamma + \beta + \alpha)$

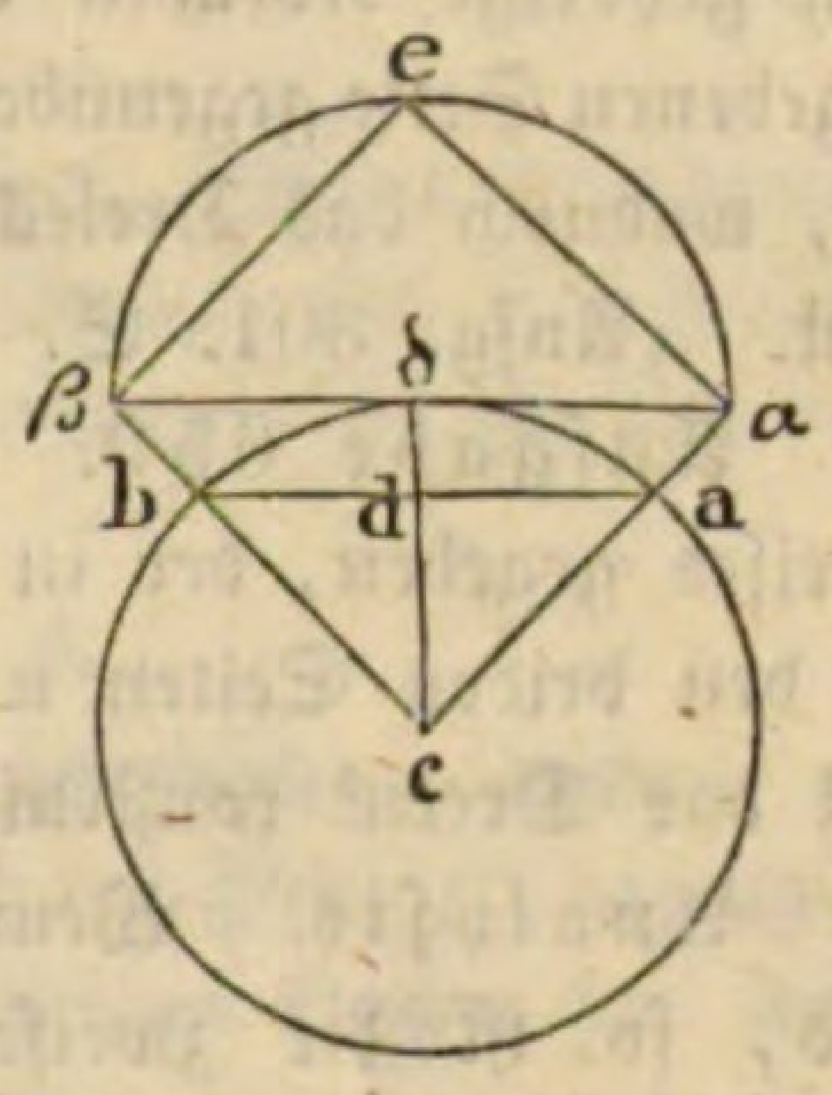
Es ist also das Verhältniß von $\Delta abx : \Delta abc$ gegeben, und da beide die Grundlinie ab gemein haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen. Da nun die Normale von c auf ab gegeben ist, so kann die Höhe von Δabx gefunden werden; und es muß, wenn man in einer dieser Höhe gleichen Entfernung von ab eine, der ab parallele Linie zieht, in dieser Linie der Punkt x liegen.

Aus gleichen Gründen ist

$$\Delta acx : \Delta acb = \beta : (\gamma + \beta + \alpha)$$

und hierdurch die Höhe von Δacx gegeben. Folglich muß x auch in der Linie liegen, welche in dem dieser Höhe gleichen Abstande parallel ac gezogen werden kann, und es ist hierdurch die Lage von x vollkommen bestimmt.

Aufgabe 657. Die Sehne ab eines Kreisbogens ist gegeben, und die derselben parallele Tangente $\alpha\beta$, welche von den verlängerten Radien begrenzt wird, die durch die Endpunkte a und b des Bogens gehen; man soll hieraus den Radius des Kreises finden.



Analysis. Beschreibt man über $\alpha\beta$ einen Halbkreis $\alpha e \beta$, zieht αe normal auf αc, und verbindet e mit β, so ist

$$\angle c\alpha\delta + \angle \delta\alpha e = \angle c\alpha\delta + \angle \alpha c\delta = R$$

und daher $\angle \delta\alpha e = \angle \alpha c \delta$

Da nun $\angle e \quad = \angle c\delta\alpha = R$

so ist $\Delta \alpha e \beta \sim \Delta c\delta\alpha$ (4.)

Und daher $\alpha\beta : \alpha e = c\alpha : c\delta$

$= c\alpha : ca$

und da $c\alpha : ca = \alpha\beta : ab$

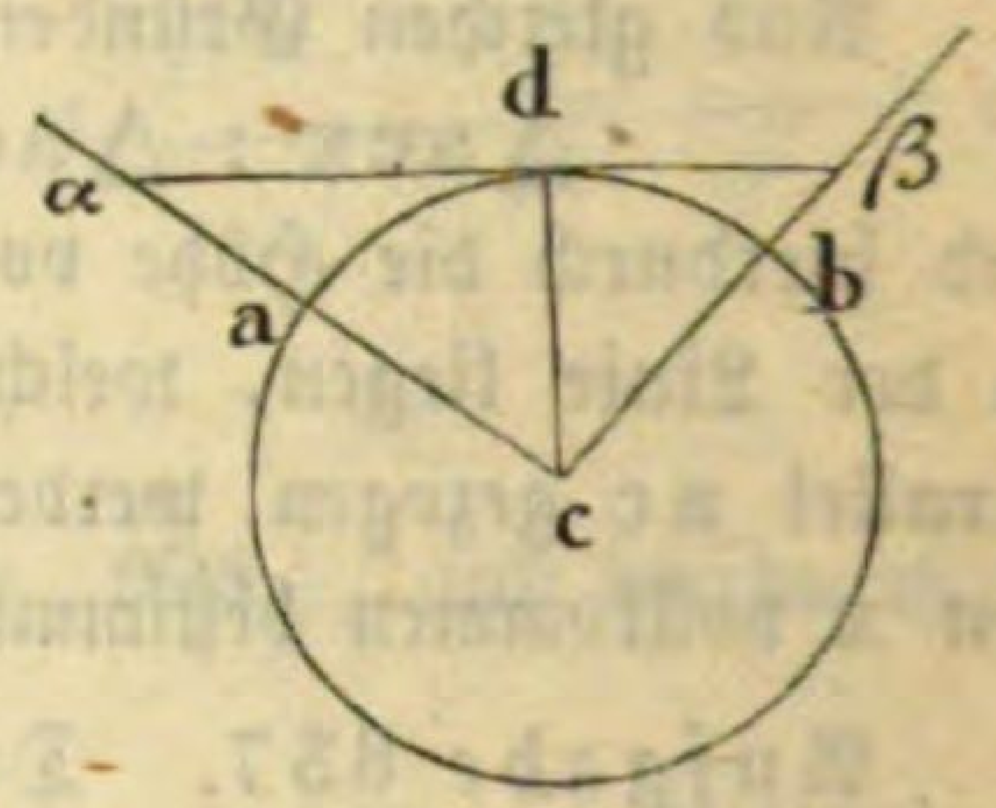
so ist $\alpha\beta : \alpha e = \alpha\beta : ab$

und folglich $\alpha e = ab$;

also ist αe der Größe und Lage nach gegeben, und hierdurch sind αc und δc gegeben, also auch der Mittelpunkt c und der Radius $c\delta$ des gesuchten Kreises.

Auflösung. Ueber $\alpha\beta$ beschreibe einen Halbkreis, trage $\alpha e = ab$ als Sehne ein, errichte in α auf αe eine Normale αc, und eine andere in dem Halbirungspunkte δ der $\alpha\beta$ auf $\alpha\beta$, so schneiden sich diese beiden Normalen in dem Mittelpunkte c des zu beschreibenden Kreises und es ist $c\delta$ der Radius desselben.

Aufgabe 658. In einem Kreise sind zwei Radien ca, cb gezogen; man soll an den Bogen ab eine Tangente $\alpha\beta$ von gegebener Länge ziehen, welche von den verlängerten Radien ca und cb begrenzt wird.



Analysis. Da ca und cb der Größe und Lage nach gegeben sind, so ist ∟acb gegeben, aber auch $\alpha\beta$ und cd = ca, welche normal auf $\alpha\beta$ ist (III. 18.); folglich ist vom $\Delta\alpha c\beta$ gegeben die Seite $\alpha\beta$, die zu derselben gehörige Normale cd, und der der gegebenen Seite gegenüber liegende Winkel, wodurch das Dreieck sich construiren läßt. (Aufg. 301. S. 329.)

Aufgabe 659. Von einem Dreieck ist der Radius r des Kreises gegeben, der in dasselbe beschrieben werden kann, und die zu den beiden Seiten a und b gehörigen Normalen α und β; man soll das Dreieck construiren.

Analysis. Wenn die drei Seiten des Dreiecks a, b und c sind, so ist die zweifache Fläche desselben $= r\,(a + b + c)$ (Aufg. 392. S. 395).

Da aber die zu a gehörige Normale $= \alpha$
und „ „ b „ „ $= \beta$
so ist die zweifache Fläche auch $= a\alpha = b\beta$.

Da $a\alpha = b\beta$, so ist $a : b = \beta : \alpha$ (§. 4. S. 459)

$$\text{und daher } b = \frac{a\alpha}{\beta}.$$

Es ist aber auch $r\,(a + b + c) = b\beta$

$$\text{und daher } r : \beta = b : a + b + c$$

$$\text{also } r : \beta - r = b : a + c$$

$$\text{und weil } b = \frac{a\alpha}{\beta}$$

$$\text{so ist } r : \beta - r = \frac{a\alpha}{\beta} : a + c$$

$$\text{und daher } r\beta : \beta - r = a\alpha : a + c$$

folglich ist $\frac{\beta r}{\alpha} : \beta - r = a : a + c$

und daher $\frac{\beta r}{\alpha} : \beta - r - \frac{\beta r}{\alpha} = a : c$

und weil $\beta - r - \frac{\beta r}{\alpha} = \beta - \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha} \cdot r = \frac{\alpha\beta - (\alpha + \beta) r}{\alpha}$

so ist $\frac{\beta r}{\alpha} : \frac{\alpha\beta - (\alpha + \beta) r}{\alpha} = a : c$

also $\beta r : \alpha\beta - (\alpha + \beta) r = a : c$

und endlich $r : \alpha - \frac{(\alpha + \beta) r}{\beta} = a : c.$

Da nun α, β und r gegeben sind, so ist auch das Verhältniß von a : c gegeben; aber auch das von $a : b = \beta : \alpha$ ist gegeben, folglich das gesuchte Dreieck der Form nach; und da α der Größe nach bekannt ist, so läßt sich hieraus auch das gesuchte Dreieck der Größe nach finden.

Aufgabe 660. Man kennt von einem Dreieck die Grundlinie, das Verhältniß der beiden übrigen Seiten und den Radius des Kreises, der um das Dreieck sich beschreiben läßt; es soll dasselbe construirt werden.

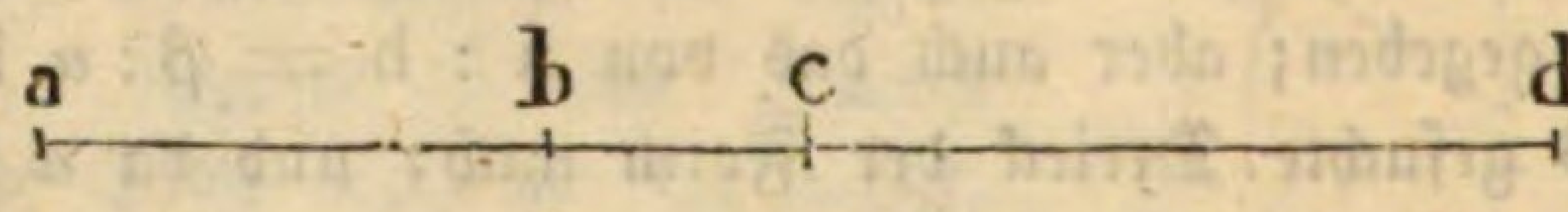
Gegeben **A** : **B** = m : n, **C** und **R**.

Analysis. Wird mit **R** ein Kreis beschrieben, und **C** als Sehne eingetragen, so muß der Scheitel des der Seite **C** gegenüber liegenden Winkels in dem durch **C** abgeschnittenen Bogen des Kreises liegen; der geometrische Ort dieses Punktes ist aber auch durch **C** und das Verhältniß **A** : **B** bestimmt (Aufgabe 588.), folglich ist die Lage des Punktes c gegeben, und hierdurch das gesuchte Dreieck.

Determination. Da **C** die gemeinschaftliche Sehne zweier Bogen ist, so kann auch c in jedem dieser beiden Bogen liegen; und es sind daher zwei Dreiecke möglich, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

XXXII. Grundeigenschaften der harmonischen Proportionalen und die einfachsten Anwendungen derselben.

1. Eine Linie **ad** ist in **b** und **c** harmonisch getheilt, wenn der erste Abschnitt derselben zu dem zweiten wie die ganze Linie zu dem dritten Abschnitte sich verhält. Ist **ad** in **b** und **c** harmonisch getheilt, so werden **a**, **b**, **c** und **d** harmonische Punkte genannt; und legt man von irgend einem außerhalb der Linie gegebenem Punkt Linien durch die harmonischen Punkte **a**, **b**, **c** und **d**, so nennt man diese „harmonische Strahlen".



Ist also **ab : bc = ad : cd**, so ist **ad** in **b** und **c** harmonisch getheilt; **a** und **c** und eben so **b** und **d** werden zugeordnete harmonische Punkte genannt; und zugeordnete harmonische Strahlen sind, welche durch zugeordnete harmonische Punkte gehen.

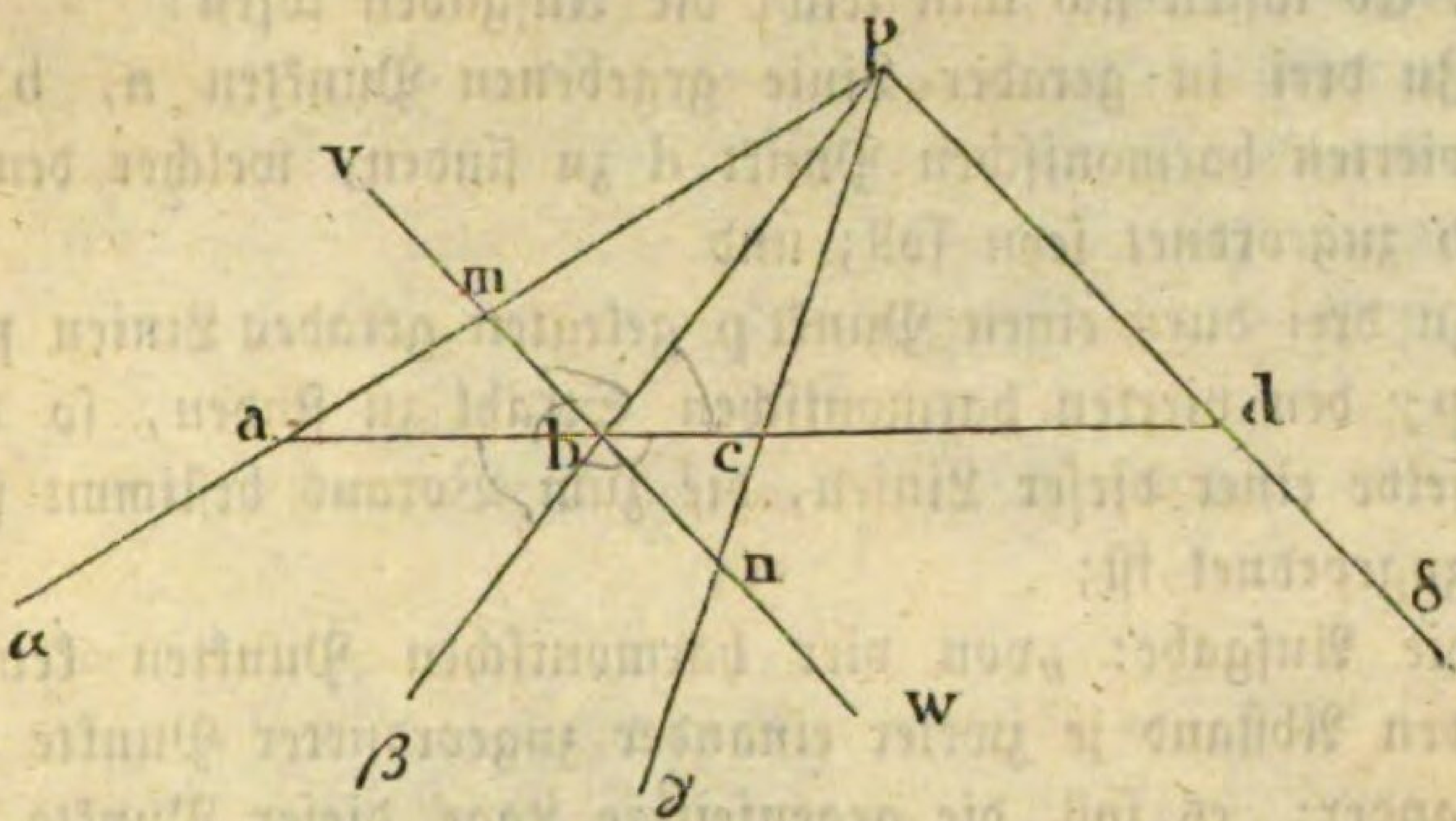
Soll eine Linie nach einem gegebenen Verhältniß getheilt werden, so giebt es zwei Theilpunkte, von welchen der eine zwischen den Endpunkten der Linie, und der andere in der Verlängerung derselben liegt (Aufgabe 587. S. 578). Sucht man beide Theilpunkte, so bilden diese mit den Endpunkten der Linie vier harmonische Punkte. Denn ist **ac** die gegebene Linie, und diese so getheilt, daß

ab : bc = m : n
und auch **ad : cd = m : n**

so folgt **ab : bc = ad : cd**.

Es sind also **a**, **b**, **c** und **d** harmonische Punkte, von welchen **a** und **c** und eben so **b** und **d** einander zugeordnet sind.

2. Legt man durch die harmonischen Punkte **a**, **b**, **c** und **d** von **p** aus die harmonischen Strahlen $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$, $p\delta$, und wird nun durch **b** eine Linie **vw** der $p\delta$ parallel gezogen: so ist der durch die zugeordneten Strahlen $p\alpha$, $p\gamma$ begrenzte Theil **mn** derselben in **b** halbirt.



Beweis. Es ist

$$\text{und}\ \left\{\begin{array}{l} ab : ad = mb : pd \quad (2.) \\ bc : cd = bn : pd \quad „ \\ ab : bc = ad : cd \quad (p.\ h.) \\ ab : ad = bc : cd \end{array}\right.$$

folglich ist $mb : pd = bn : pd$
und daher $mb = bn$.

Zusatz. Es folgt hieraus: daß von jeder der $p\delta$ parallelen Linien der Theil, welcher von $p\alpha$ und $p\gamma$ begrenzt ist, durch $p\beta$ halbirt wird.

3. Halbirt man die Seite mn des Dreiecks pmn in b, legt durch p die Halbirungslinie $pb\beta$ und $p\delta$ parallel der mn: so bilden die Linien $p\beta$ und $p\delta$ mit den Seiten pm und pn des Dreiecks vier harmonische Strahlen.

Beweis. Man lege durch b beliebig eine Linie ad, so ist

$$ab : ad = bm : pd \quad (2.)$$
und $bc : cd = bn : bd$
Da nun $bm = bn \quad (p.\ h.)$

so ist $ab : ad = bc : cd$

also auch $ab : bc = ad : cd$.

a, b, c und d sind also harmonische Punkte, und daher die durch diese Punkte von p aus gehenden Linien $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ und $p\delta$ vier harmonische Strahlen.

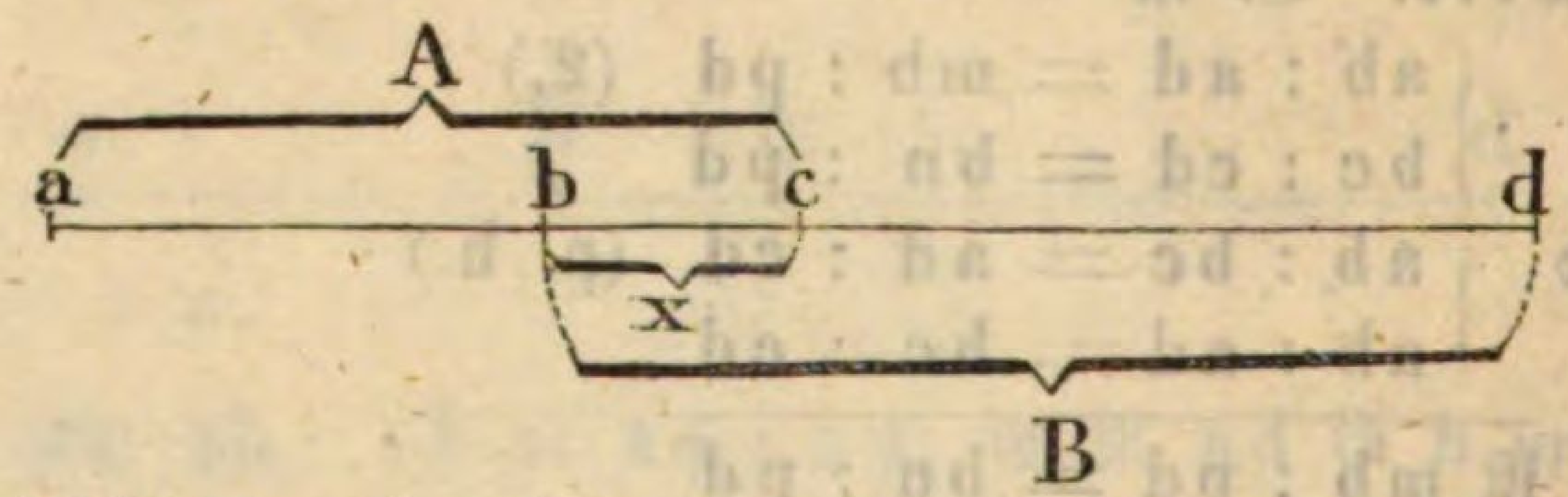
4. Hieraus in Verbindung mit dem Zusatze zu 2. folgt: daß, wenn $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ und $p\delta$ vier harmonische Strahlen sind, jede Transversale durch diese Strahlen in vier harmonischen Punkten geschnitten wird.

5. Es lassen sich nun leicht die Aufgaben lösen:

α) Zu drei in gerader Linie gegebenen Punkten a, b, c den vierten harmonischen Punkt d zu finden, welcher dem Punkt b zugeordnet seyn soll; und

β) zu drei durch einen Punkt p gelegten geraden Linien $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ den vierten harmonischen Strahl zu finden, so daß derselbe einer dieser Linien, die zum Voraus bestimmt seyn soll, zugeordnet ist;

γ) die Aufgabe: „von vier harmonischen Punkten kennt man den Abstand je zweier einander zugeordneter Punkte von einander; es soll die gegenseitige Lage dieser Punkte ermittelt werden", läßt auf folgende Art sich lösen:



Es soll seyn $ab : bc = ad : cd$

und es ist gegeben $ac = A$ und $bd = B$. Setzt man also $bc = x$, so muß seyn $A - x : x = A + B - x : B - x$

folglich $(A - x)(B - x) = x(A + B - x)$

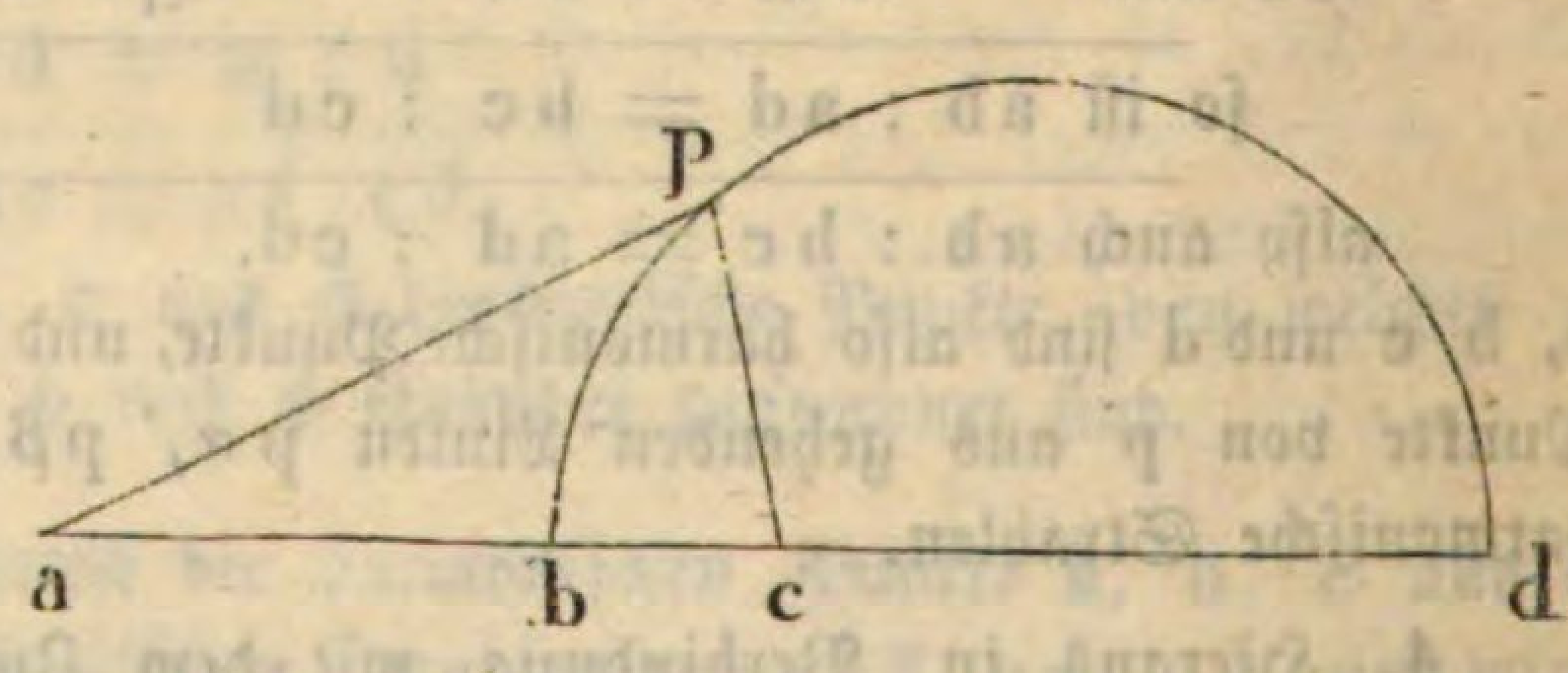
und daher $2x^2 - 2(A + B)x = - AB$

also auch $x^2 - (A + B)x + \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 = \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 - \frac{AB}{2}$

Hiernach ist $\left(\frac{A + B}{2} - x\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{4}$

folglich $\frac{A + B - \sqrt{(A^2 + B^2)}}{2} = x.$

6. Ist ac die Grundlinie eines Dreiecks, und das Verhältniß der beiden übrigen Seiten ap und cp zu einander $= m : n$



gegeben, und theilt man die Grundlinie ac in b nach diesem Verhältniß, sucht hierauf zu a, b und c den vierten harmonischen Punkt d, welcher dem Punkt b zugeordnet ist, und beschreibt über

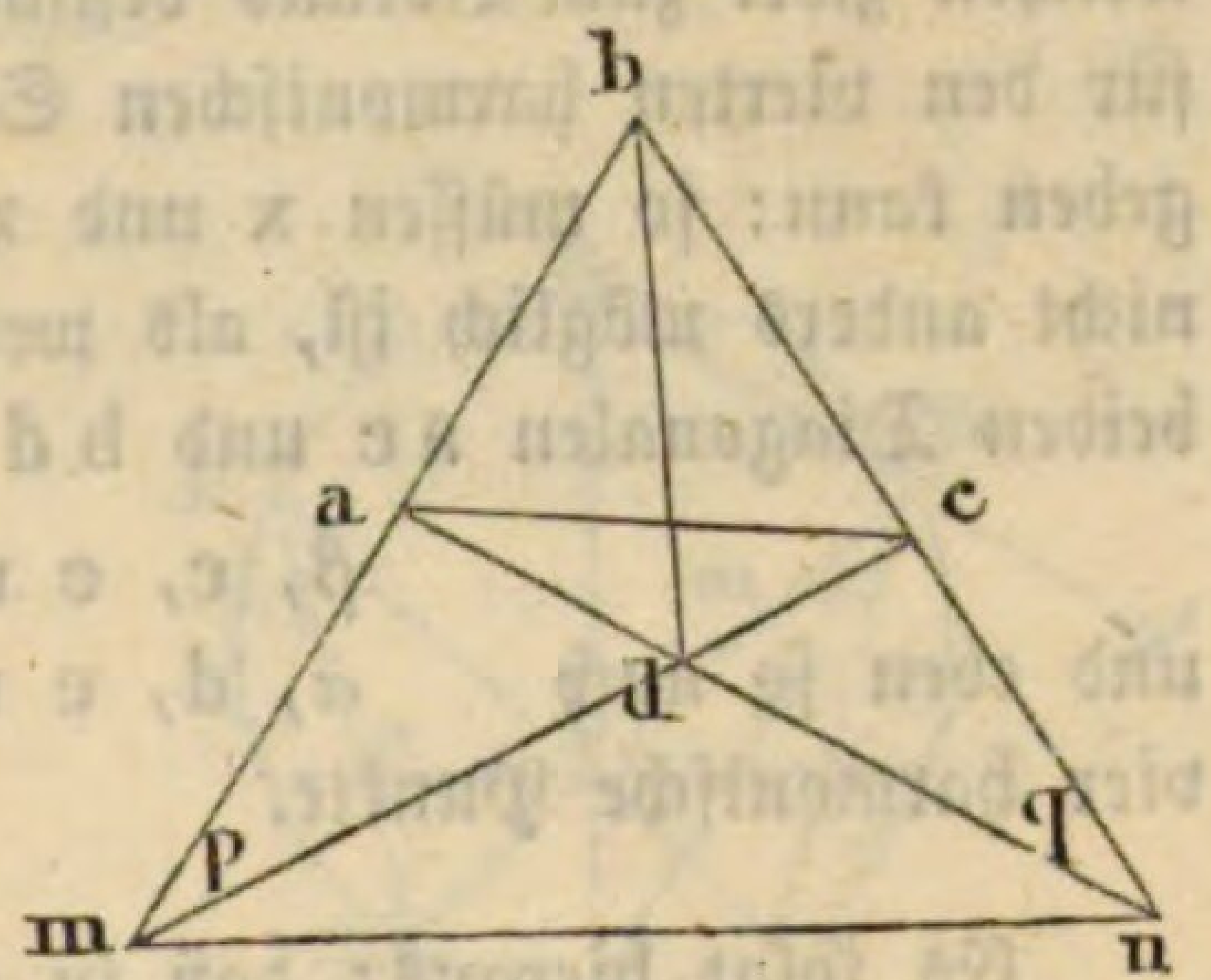
bd als Durchmesser einen Kreis: so ist der Umfang desselben der geometrische Ort für die der ac gegenüber liegende Spitze aller der Dreiecke, in welcher die beiden übrigen Seiten wie m : n sich verhalten. Wenn also ab : bc = ad : cd und ab : bc = m : n, so ist immer, welcher Punkt in des Kreises Umfang p auch seyn mag,

$$pa : pc = m : n.$$

Man vergleiche hiermit Aufgabe 588. S. 578.

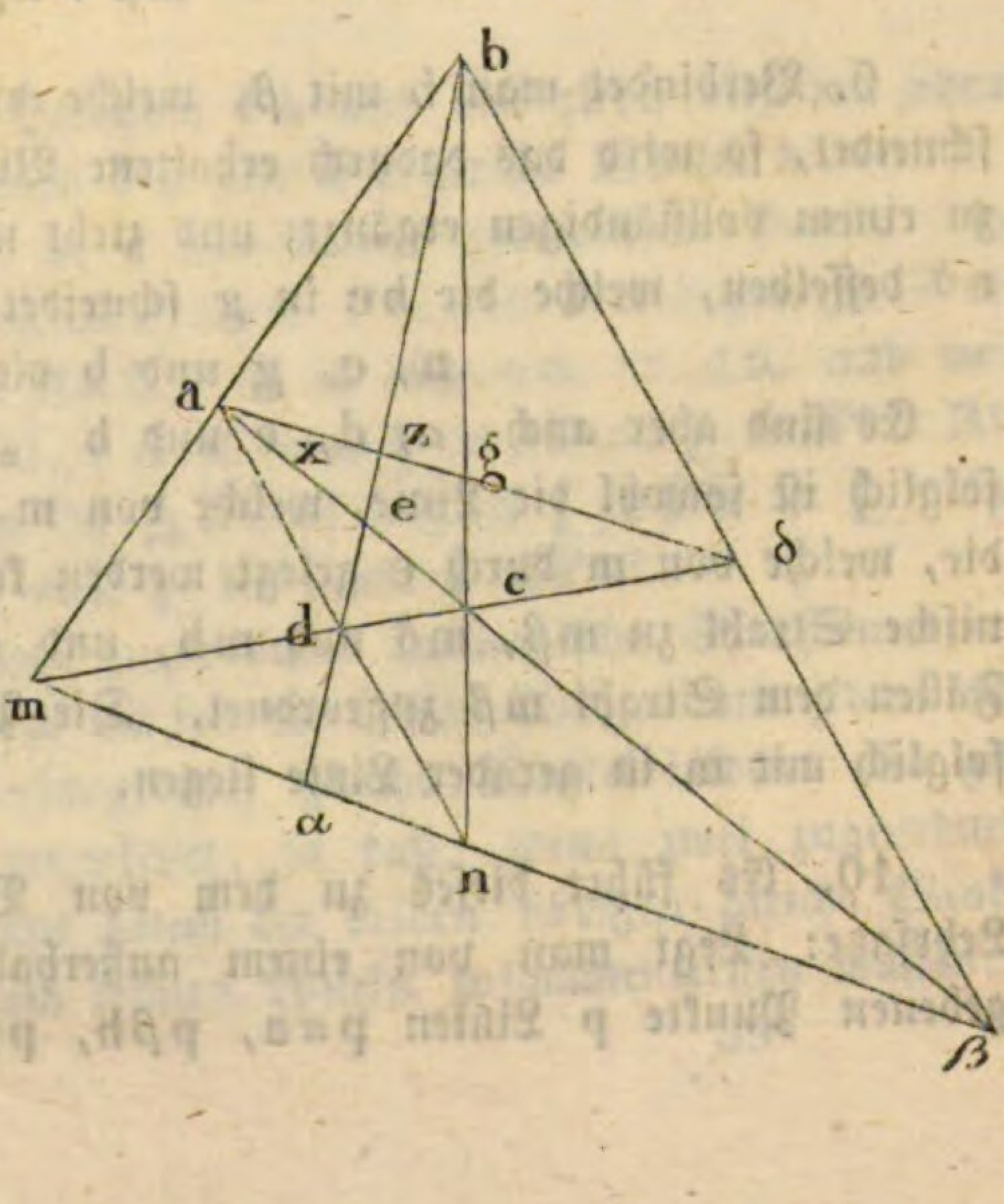
---

7. Wenn man in einem Vierecke abcd die gegenüber liegenden Seiten ba und cd, und eben so ad und bc verlängert, bis sie in m und n sich schneiden, und man verbindet hierauf m mit n: so wird die dadurch erhaltene Figur ein **vollständiges Viereck** genannt. Verbindet man m mit n, so nennt man diese Linie die **dritte Diagonale** des Vierecks.



Ein vollständiges Viereck wird also erzeugt: wenn man an die Endpunkte m und n einer geraden Linie mn zwei Winkel p und q anlegt, deren Schenkel sich gegenseitig schneiden.

8. Ist das Viereck abcd durch mn zu einem vollständigen ergänzt, und sucht man nun zu mn, mc und mb den vierten harmonischen Strahl, der dem mn zugeordnet ist und schneidet dieser die beiden Diagonalen ac und bd in x und z, so sind β, c, x und a und auch α, d, z und b vier harmonische Punkte. Legt man nun durch die vier ersten Punkte von



n aus gerade Linien, so erhält man die harmonischen Strahlen $n\beta$, nb, nx und nm; und werden durch letztere vier Punkte gerade Linien von n aus gelegt, so bilden diese die harmonischen Strahlen $n\alpha$, na, nz und nb.

Da nun $n\alpha$ und $n\beta$ in gerader Linie liegen und in beiden Fällen nb und na einander zugeordnete Strahlen sind: so muß auch in dem einen Falle die nx und in dem anderen die nz der $\alpha n \beta$ zugeordnet seyn. Und da es zu drei gegebenen Strahlen, von welchen zwei zum Voraus bestimmte einander zugeordnet seyn sollen, für den vierten harmonischen Strahl nicht zwei verschiedene Lagen geben kann: so müssen x und z nothwendig zusammen fallen, was nicht anders möglich ist, als wenn sie den Durchschnittspunkt e der beiden Diagonalen ac und bd bilden, und es sind demnach

β, c, e und a

und eben so auch α, d, e und b

vier harmonische Punkte.

Es folgt hieraus: daß in einem vollständigen Viereck jede der drei Diagonalen desselben durch die beiden anderen und durch die Durchschnittspunkte von zwei und zwei Seiten harmonisch geschnitten wird. Hiernach ist

$$\alpha d : de = \alpha b : eb$$
$$\beta c : ce = \beta a : ea$$
und $$m\alpha : \alpha n = m\beta : n\beta.$$

9. Verbindet man b mit β, welche die verlängerte mc in δ schneidet, so wird das dadurch erhaltene Viereck $ab\delta c$ in m und β zu einem vollständigen ergänzt; und zieht man nun die Diagonale $a\delta$ desselben, welche die bc in g schneidet, so sind

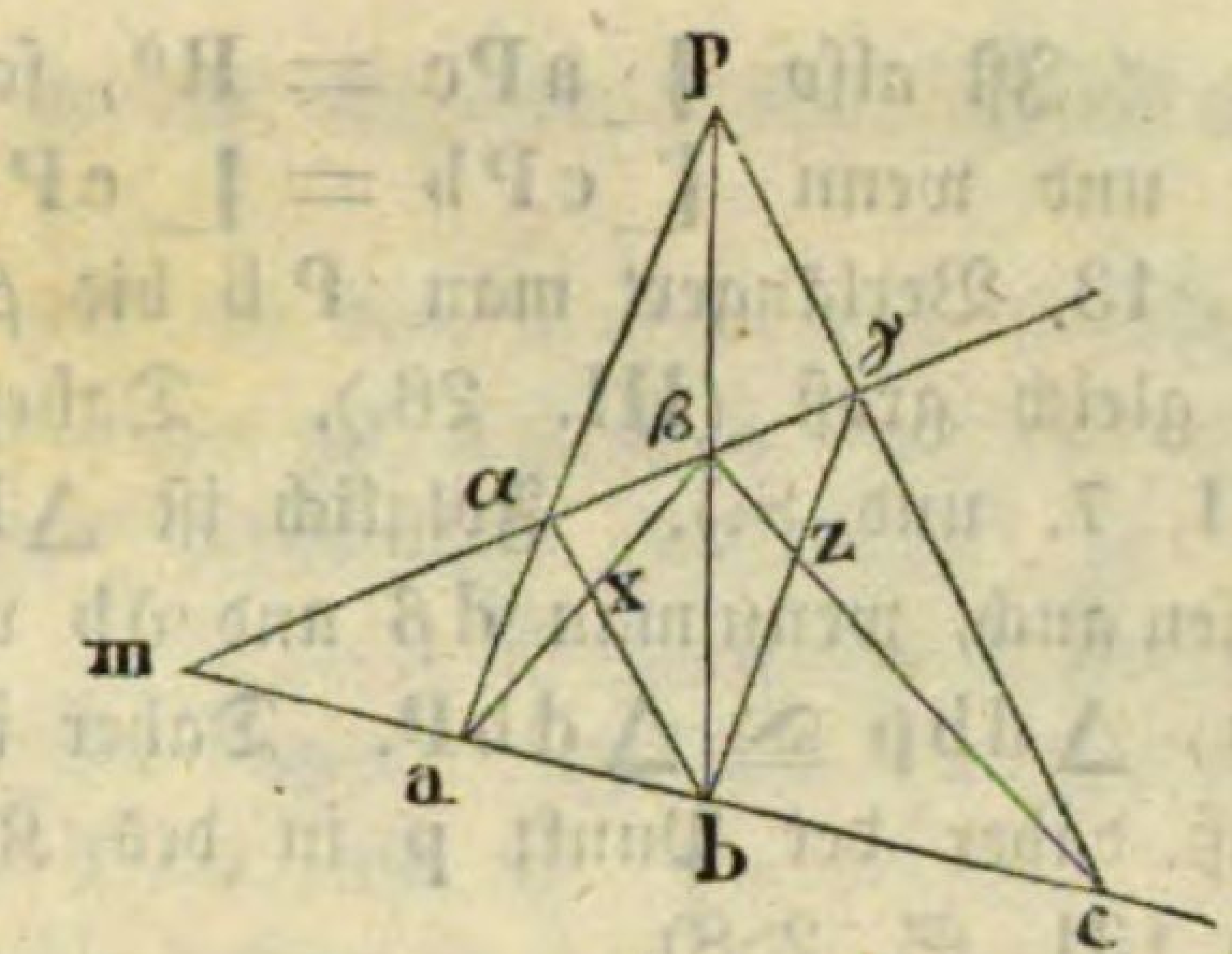
n, c, g und b vier harmonische Punkte.

Es sind aber auch α, d, e und b „ „ „

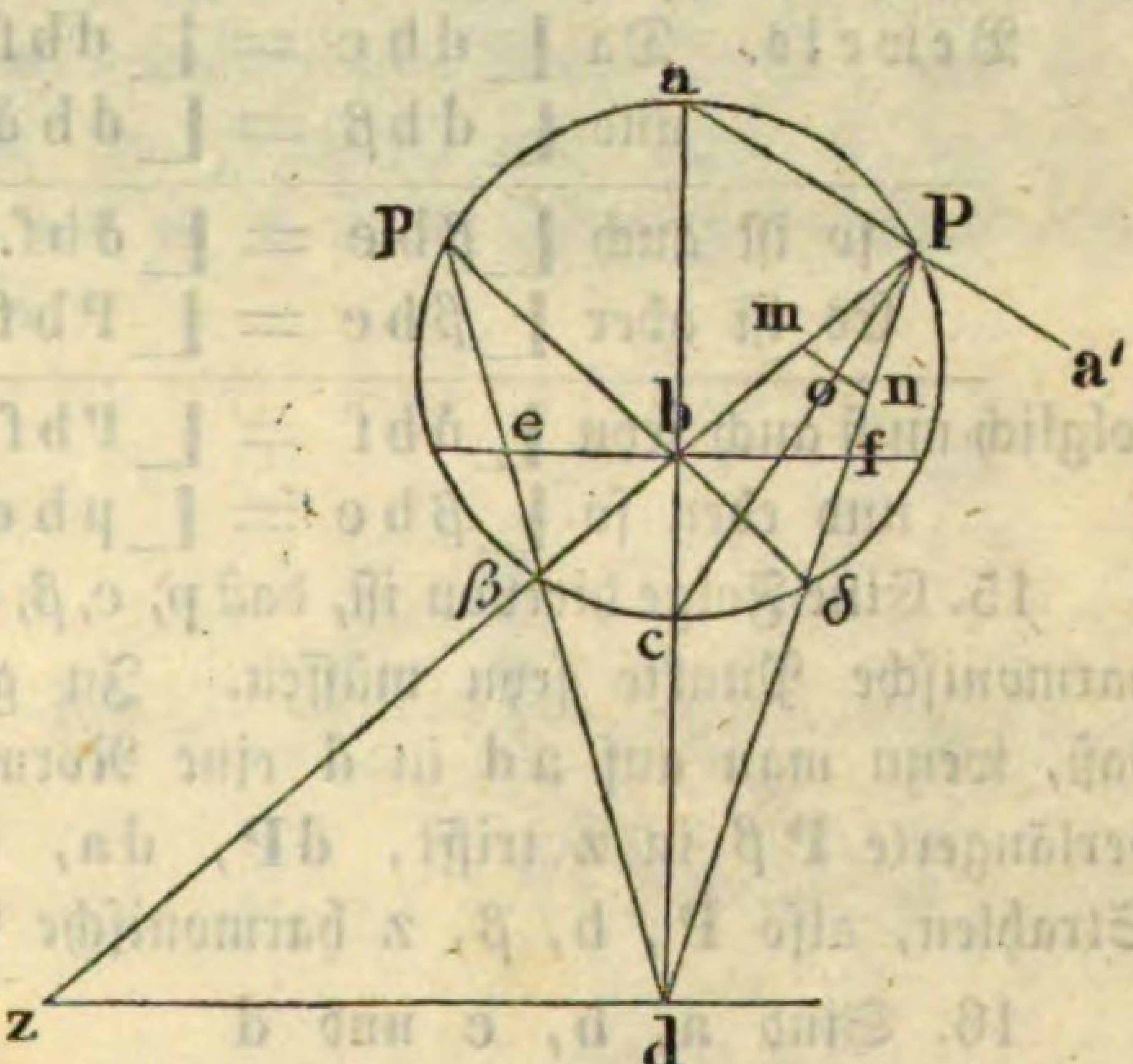
folglich ist sowohl die Linie, welche von m durch g geht, als auch die, welche von m durch e gelegt werden kann, der vierte harmonische Strahl zu $m\beta$, $m\delta$ und mb, und es ist derselbe in beiden Fällen dem Strahl $m\beta$ zugeordnet. Die Punkte g und e müssen folglich mit m in gerader Linie liegen.

10. Es führt dieses zu dem von Bendavid aufgestellten Lehrsatze: Legt man von einem außerhalb eines Winkels m gegebenen Punkte p Linien $p\alpha a$, $p\beta b$, $p\gamma c$ . . . . . durch den

Winkel, und zieht die Diagonalen αb, βa und βc, γb der dadurch in dem Winkel gebildeten Vierecke $\alpha\beta ba$ und $\beta\gamma cb$: so müssen die Durchschnittspunkte x und z der Diagonalen eines jeden dieser Vierecke mit dem Scheitel m des Winkels in gerader Linie liegen.



11. Nimmt man nun die Endpunkte, a und c, des Durchmessers eines Kreises als zugeordnete harmonische Punkte an, und werden von irgend einem Punkte des Kreisumfanges durch a und c die zugeordneten Strahlen Pa und Pc gezogen, so haben die beiden übrigen harmonischen Punkte b und d immer eine solche Lage, daß, wenn man durch dieselben die beiden anderen Strahlen Pb und Pd zieht, diese mit jedem der beiden zuerst gezogenen Pa und Pc gleiche Winkel bilden.



Beweis. Da a, b, c und d vier harmonische Punkte sind, so wird jede der Pa parallele durch Pb und Pd begrenzte Linie mn in o halbirt (nach Nr. 2.); es ist also om = on, und weil ∟aPc = R° (III. 31.), so ist auch ∟moP = ∟noP = R°, und sonach ist ΔPom $\cong$ ΔPon; folglich ∟cPb = ∟cPa; und in Folge dessen ist auch ∟bPa = ∟dPa′.

12. Wenn also zwei zugeordnete harmonische Strahlen einen rechten Winkel bilden, so müssen die beiden übrigen mit jedem derselben oder dessen Verlängerung gleiche Winkel bilden. Es gilt dieser Satz aber auch umgekehrt; so daß, wenn zwei zugeordnete harmonische Strahlen mit einem der beiden übrigen gleiche Winkel bilden, diese unter einem rechten Winkel zusammentreffen müssen.

Ist also $\angle aPc = R^0$, so folgt $\angle cPb = \angle cPd$;
und wenn $\angle cPb = \angle cPa$, so muß seyn $\angle aPc = R^0$

13. Verlängert man Pb bis β, so sind die Bogen $c\beta$ und $c\delta$ gleich groß (III. 26.). Daher ist $b\beta = b\delta$, $d\beta = d\delta$ (III. 7. und 8.). Folglich ist $\Delta bd\beta \cong bd\delta$; und in Folge dessen auch, wenn man $d\beta$ und δb verlängert, bis sie in p sich schneiden, $\Delta dbp \cong \Delta dbP$. Daher ist $\angle \delta p \beta = \angle \delta P \beta$, und es muß daher der Punkt p in des Kreises Umfang liegen. (Lehrsatz 131. S. 288).

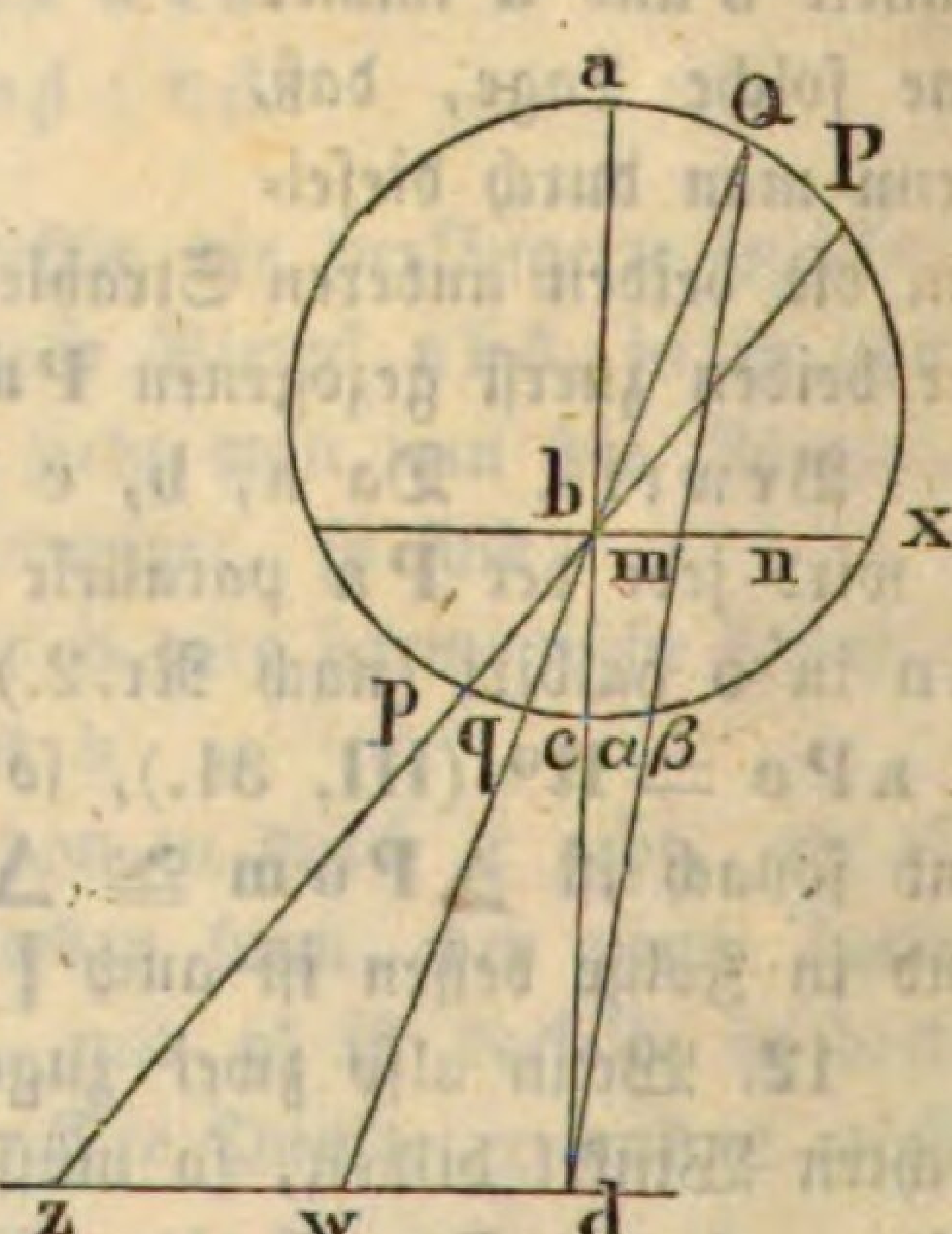
14. Errichtet man auf ad in b eine Normale, so werden durch diese die Winkel $pb\beta$ und $Pb\delta$ halbirt.

Beweis. Da $\angle dbe = \angle dbf$ (p. h.)
und $\angle db\beta = \angle db\delta$ (nach Nr. 13.)

so ist auch $\angle \beta be = \angle \delta bf$.
Es ist aber $\angle \beta be = \angle Pbf$

folglich muß auch seyn $\angle \delta bf = \angle Pbf$
und eben so $\angle \beta be = \angle pbe$.

15. Eine Folge hiervon ist, daß p, e, β, d und eben so auch P, f, δ, d harmonische Punkte seyn müssen. In gleicher Weise ergiebt sich: daß, wenn man auf ad in d eine Normale errichtet und diese die verlängerte $P\beta$ in z trifft, dP, da, dp und dz harmonische Strahlen, also P, b, β, z harmonische Punkte seyn müssen.



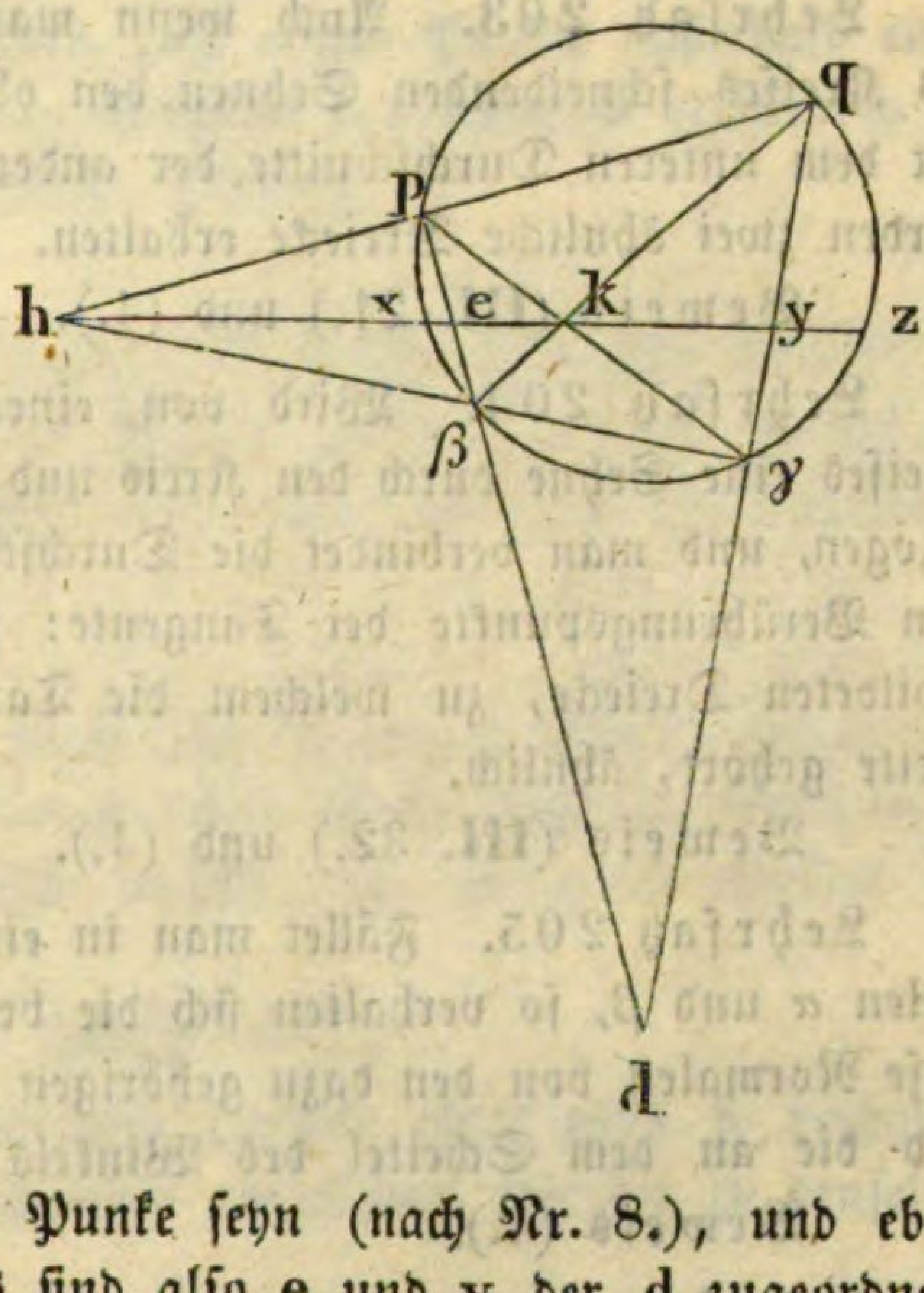
16. Sind a, b, c und d vier harmonische Punkte und beschreibt man über ac als Durchmesser einen Kreis, und errichtet auf ad in d eine Normale: so wird jede durch b gelegte Linie in diesem Punkte durch den Kreis und die errichtete Normale harmonisch geschnitten. Es sind also Q, b, q und w, und eben so P, b, p und z harmonische Punkte, und da es überhaupt zu drei gegebenen Punkten nur einen vierten, einen zum Voraus bestimmten zugeordneten Punkt geben kann: so müssen auch umgekehrt, wenn man zu Q, b und q und eben so zu P, b und p den vierten harmonischen Punkt w und z sucht (wie die Linie durch b auch

gelegt seyn mag) dieser Punkt in der Normale liegen, welche auf ad in d errichtet ist.

In gleicher Weise werden auch die von d aus durch den Kreis gelegten Linien dQ, dP, wenn man auf ad in b eine Normale errichtet, durch diese und den Kreis harmonisch geschnitten; so daß d, α, m, Q und eben so d, β, n und P harmonische Punkte seyn müssen. Sucht man aber für irgend eine von d aus durch den Kreis gelegte Linie dQ zu d, α und Q, den vierten der d zugeordneten Punkt: so liegt diese immer in der auf ad in b errichteten Normale.

17. Wegen dieser gegenseitigen Abhängigkeit der Punkte b und d, und der durch dieselben auf ad errichteten Normalen bx und dz, wird b der Pol der Linie dz genannt; und diese ist die zugeordnete des Poles b, und es ist d der Pol von bx, und diese die zugeordnete des Poles d.

18. Legt man von einem Punkt d außerhalb eines Kreises zwei Secanten dp und dq, verbindet die Durchschnittspunkte q mit p, und γ mit β: so wird das dadurch erhaltene Viereck im Kreise pq$\gamma\beta$ in h zu einem vollständigen ergänzt. Es ist nun aber βkph ein Viereck, das in q und γ zu einem vollständigen ergänzt wird; und es sind βp, hk und γq die drei Diagonalen desselben. Folglich müssen



d, β, e und p harmonische Punke seyn (nach Nr. 8.), und eben so auch d, γ, y und q; es sind also e und y der d zugeordnete harmonische Punkte; und es ist daher hy die harmonische des Poles d, und eben so muß die harmonische des Punktes h durch d und k gehen. — Die harmonische eines beliebig in zx angenommenen Poles geht daher nothwendig durch den Punkt d; und es müssen umgekehrt, wenn man von d aus mehrere Linien durch den Kreis legt und für jede derselben, als einer harmonischen, den dazu gehörigen Pol sucht, alle diese Pole in einer geraden Linie liegen.

XXXIII. Lehrsätze, die mit Hülfe der Sätze des sechsten Buches sich beweisen lassen.

Lehrsatz 201. Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, und man verbindet den einen Endpunkt der einen mit dem einen Endpunkte der andern, und eben so den zweiten Endpunkt der einen mit dem zweiten Endpunkte der andern, so werden hierdurch zwei Dreiecke erhalten, die ähnlich sind.

Beweis (III. 21.) und (4.).

Lehrsatz. 202. Schneiden zwei Sehnen verlängert sich außerhalb des Kreises, und werden die beiden oberen, und eben so die beiden unteren Durchschnittspunkte derselben mit dem Kreise durch Sehnen verbunden: so erhält man hierdurch zwei ähnliche Dreiecke.

Beweis. (III. 22.) und (4.).

Lehrsatz 203. Auch wenn man von zwei sich außerhalb des Kreises schneidenden Sehnen den oberen Durchschnitt der einen mit dem unteren Durchschnitte der andern verbindet, und umgekehrt, werden zwei ähnliche Dreiecke erhalten.

Beweis (III. 21.) und (4.).

Lehrsatz 204. Wird von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Sehne durch den Kreis und eine Tangente an den Kreis gezogen, und man verbindet die Durchschnittspunkte der Sehne mit dem Berührungspunkte der Tangente: so sind die beiden hierdurch gebildeten Dreiecke, zu welchem die Tangente als gemeinschaftliche Seite gehört, ähnlich.

Beweis (III. 32.) und (4.).

Lehrsatz 205. Fället man in einem Dreieck die beiden Normalen α und β, so verhalten sich die beiden Abschnitte, welche durch diese Normalen von den dazu gehörigen Seiten abgeschnitten werden und die an dem Scheitel des Winkels c anliegen, wie α und β.

Beweis (4.).

Lehrsatz 206. Die beiden durch α und β auf den Seiten a und b abgeschnittenen, an ∟ c anliegenden Abschnitte der Seiten a und b eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die Seiten, auf welchen sie abgeschnitten sind.

Beweis (III. 31.), (III. 36.) und (§. 4. S. 459).

Lehrsatz 207. Ist ein Dreieck a b c in einem Kreise beschrieben, und man zieht von b aus einen Durchmesser b d,

verbindet a mit d, und fället von a auf bc die Normale $a\alpha$: so ist $\Delta abd \sim \Delta ac\alpha$.

Beweis (III. 21.) und (4.).

Lehrsatz 208. Sind die drei Seiten eines Dreiecks a, b, c, der Durchmesser des Kreises, der um dieses Dreieck beschrieben ist $= 2R$, und die zu der Seite a gehörige Normale $= \alpha$, so findet die Proportion statt:

$$2R : b = c : \alpha.$$

Beweis (Lhrs. 207.).

Lehrsatz 209. Sind zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, und zieht man drei Parallelen, von welchen diese Linien geschnitten werden: so sind die hierdurch erhaltenen beiden Abschnitte der einen Linie denen der andern proportionirt.

Beweis (I. 34.) und (2.).

Lehrsatz 210. Werden von einem Punkte außerhalb eines Winkels Normalen auf beide Schenkel des Winkels gefällt, so erhält man hierdurch zwei ähnliche Dreiecke.

Beweis (4.).

Lehrsatz 211. In jedem rechtwinkligen Dreieck verhält sich die Hypotenuse zu der einen Kathete: wie die andere Kathete zu der Normale, von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, sich verhält.

Beweis (16.).

Lehrsatz 212. In jedem Dreieck verhält sich der ganze Umfang zu einer Seite, wie die zu dieser Seite gehörige Normale zu dem Radius des Kreises sich verhält, der in dieses Dreieck beschrieben werden kann.

Beweis (16.) und (Aufg. 392.).

Lehrsatz 213. Sind zwei Dreiecke gleich groß, so verhalten sich ihre Grundlinien zu einander umgekehrt, wie die zu denselben gehörigen Normalen.

Beweis (16.).

Lehrsatz 214. Zieht man in einem Dreieck eine Parallele zur Grundlinie, und verbindet irgend einen Punkt der Grundlinie mit der gegenüber liegenden Spitze: so schneidet die Verbindungslinie die Grundlinie und die Parallele derselben nach demselben Verhältniß.

Beweis (2) und (4.).

Lehrsatz 215. Wird in einem Dreieck eine Normale auf die Grundlinie gefällt, so verhält sich die Summe der beiden übrigen Seiten des Dreiecks zu der dritten Seite, wie die Differenz der beiden Abschnitte dieser Linie zu der Differenz der beiden übrigen Seiten sich verhält.

Beweis (I. 47.), (II. 5.) und (§. 4. S. 459).

Lehrsatz 216. In jedem regulairen Vieleck ist die halbe Seite desselben die mittlere Proportionale, zwischen der Summe und der Differenz der Radien der beiden Kreise, von welchen der eine um, und der andere in das Vieleck beschrieben werden kann.

Beweis (8.).

Lehrsatz 217. Wenn in zwei Vierecken die Seiten des einen den Seiten des andern, und auch die eine Diagonale des einen der einen Diagonale des andern parallel sind: so ist die zweite Diagonale des einen Vierecks der zweiten des andern Vierecks ebenfalls parallel, und die Figuren sind ähnlich.

Beweis (18.).

Lehrsatz 218. Stehen die Seiten eines Dreiecks auf den Seiten eines andern normal, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis (Lhrs. 44. S. 82.) und (4.).

Lehrsatz 219. Werden in zwei ähnlichen Dreiecken die zu gleichnamigen Seiten gehörigen Normalen gezogen, so wird jedes der beiden Dreiecke in zwei rechtwinklige zerlegt, und es ist von diesen das erste des einen Dreiecks dem ersten des andern ähnlich, und es ist auch das zweite dem zweiten ähnlich.

Beweis (4.).

Lehrsatz 220. Wenn man in zwei ähnlichen Dreiecken eine gleichnamige Seite halbirt und den Halbirungspunkt mit der gegenüber liegenden Spitze verbindet: so werden beide dadurch in ähnliche Dreiecke zerlegt, so daß das erste dem ersten, und das zweite dem zweiten ähnlich ist.

Beweis (4.).

Lehrsatz 221. Werden in ähnlichen Dreiecken Normalen auf gleichnamige Seiten gefällt, so werden diese Seiten hierdurch nach demselben Verhältniß geschnitten.

Beweis (Lhrs. 219.).

Lehrsatz 222. Wenn man, in ähnlichen Dreiecken, die zu gleichnamigen Seiten gehörigen Normalen zieht, so verhalten sich die Dreiecke zu einander, wie die Quadrate dieser Normalen.

Beweis (Lhrs. 219.) und (19.).

Lehrsatz 223. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der zu gleichnamigen Seiten derselben gehörigen Halbirungslinien.

Beweis (Lhrs. 220.) und (19.).

Lehrsatz 224. Werden in ähnlichen Dreiecken die Mittelpunkte der Kreise, welche in dieselben beschrieben werden können, mit den Ecken der Dreiecke verbunden: so werden sie hierdurch in ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke zerlegt.

Beweis (IV. 4.) und (4.).

Lehrsatz 225. Wenn man in ähnlichen Dreiecken von den Mittelpunkten der Kreise, die in dieselben beschrieben werden können, Normalen auf die Seiten fället, so werden beide Dreiecke dadurch in ähnliche und ähnlich liegende Vierecke zerlegt.

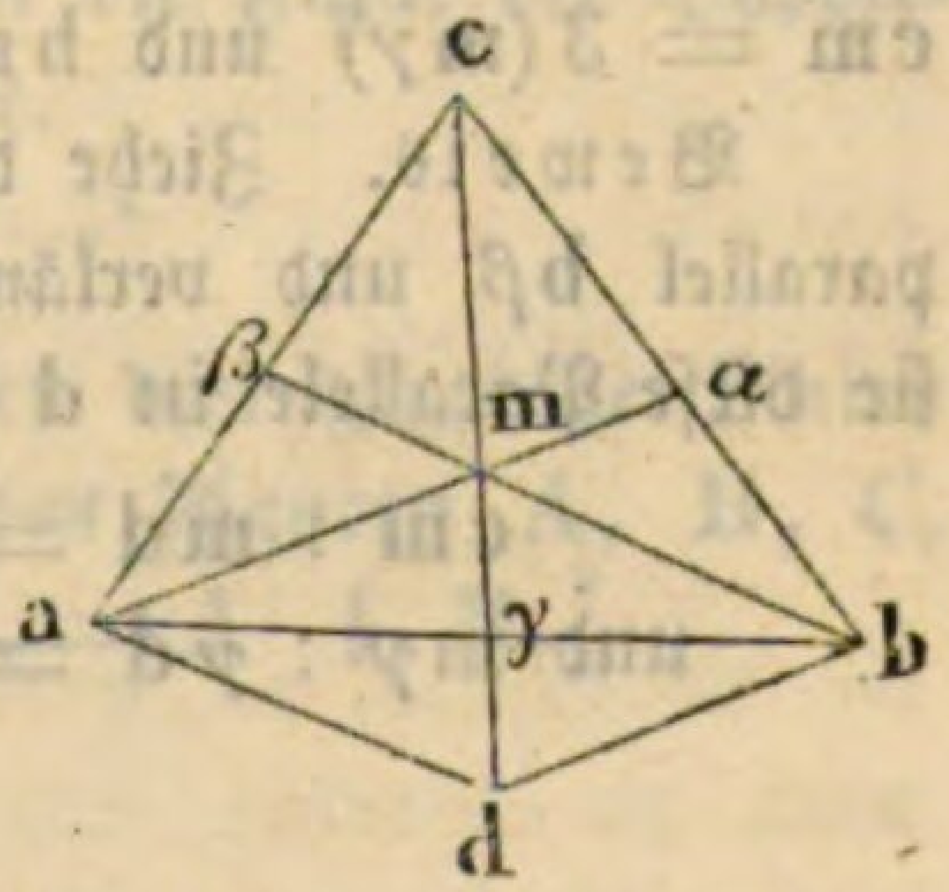
Beweis (Lhrs. 224.) und (18.).

Lehrsatz 226. Werden in zwei ähnlichen Dreiecken zwei Paar gleichnamige Seiten halbirt, und in den Halbirungspunkten der beiden Seiten eines jeden Dreiecks Normalen errichtet, bis sie sich schneiden: so sind die beiden hierdurch in den Dreiecken erhaltenen Vierecke ähnlich.

Beweis. (4.) und (18.).

Lehrsatz 227. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich gleichnamige Seiten wie die Radien der Kreise, die um diese Dreiecke beschrieben werden können.

Beweis (Lhrs. 226.).



Lehrsatz 228. Wenn man in einem Dreieck abc, von a und b aus, die Linien $a\alpha$ und $b\beta$ so zieht, daß $\llcorner a\alpha b = \llcorner b\beta a$, so findet die Proportion statt:

$$am : bm = m\beta : m\alpha.$$

Beweis (I. 15.) und (4.)

Lehrsatz. 229. Wenn in dem Dreieck abc die Seiten ca, cb in β und α nach demselben Verhältniß getheilt sind, und man zieht $b\beta$, $a\alpha$, von c aus durch m die Linie cmd, durch a die ad parallel $b\beta$, und verbindet d mit b: so ist db parallel $a\alpha$.

Beweis (2.) und (V. 11.).

Lehrsatz 230. Sind in $\triangle abc$ die Seiten cb und ca in α und β nach demselben Verhältnisse geschnitten, und man zieht $a\alpha$, $b\beta$, und von c durch m die gerade Linie $cm\gamma$, so wird ab in γ halbirt.

Beweis (Lhrs. 229.) und (Lhrs. 32. S. 81).

Lehrsatz 231. Halbirt man die Grundlinie ab eines Dreiecks in γ, zieht $c\gamma$, und durch irgend einen Punkt m dieser Linie von a und b aus $a\alpha$ und $b\beta$: so werden cb und ca in α und β nach demselben Verhältnisse geschnitten.

Beweis (Lhrs. 32. S. 81.) und (2.) und (V. 11.).

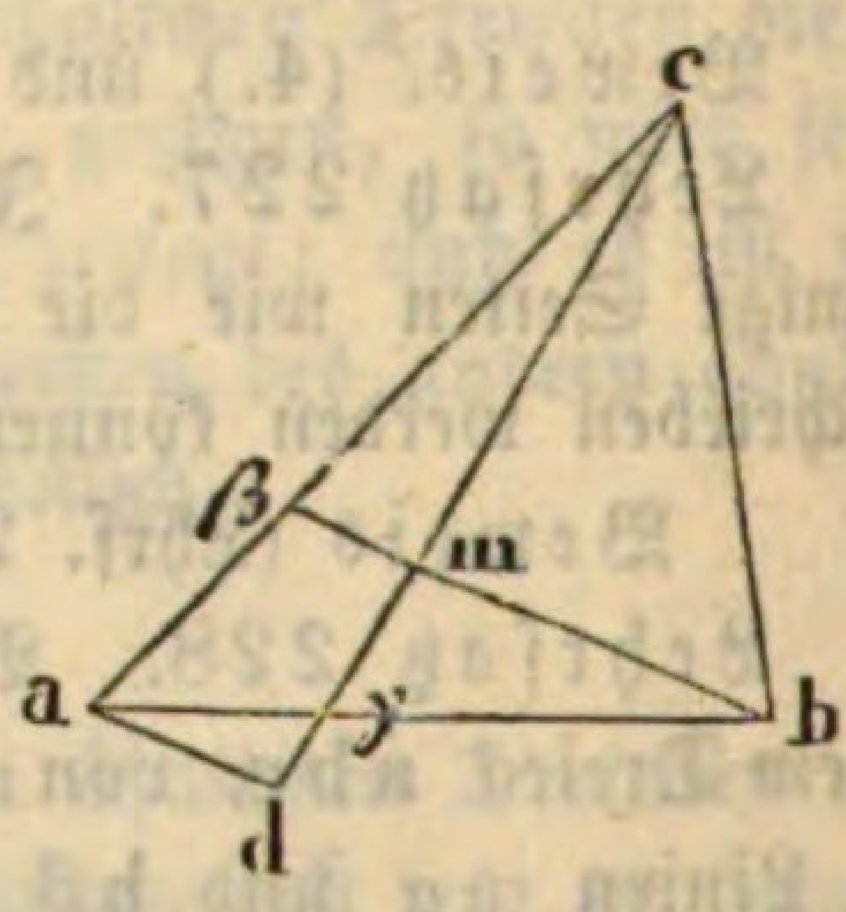
Lehrsatz 232. Wird ab in γ halbirt, $c\gamma$ gezogen, und durch irgend einen Punkt m der $c\gamma$ die Linien $a\alpha$ und $b\beta$, und ist $c\alpha : \alpha b = m : n$, so muß seyn $cm : m\gamma = 2m : n$.

Beweis (V. 4.).

Lehrsatz 233. Die drei Halbirungslinien eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Beweis (Lhrs. 231.).

Anmerkung. Man vergleiche hiermit den Beweis dieses Satzes in dem Zusatze, Seite 316.



Lehrsatz 234. Ist $c\beta$ zwei Mal so groß wie βa, und $b\gamma$ zwei Mal so groß wie γa, so ist $cm = 3(m\gamma)$ und $bm = 3(m\beta)$.

Beweis. Ziehe durch a die ad parallel $b\beta$ und verlängere $c\gamma$, bis sie diese Parallele in d schneidet, so ist

$$cm : md = c\beta : \beta a, \text{ also } cm = 2(md)$$
$$\text{und } m\gamma : \gamma d = \gamma b : \gamma a \quad „ \quad m\gamma = 2(\gamma d)$$
$$\text{und } \gamma d = \gamma d$$

$$\text{folglich } md = 3(\gamma d)$$
$$\text{daher } cm = 2(md) = 6(\gamma d)$$
$$\text{während } m\gamma = 2(\gamma d)$$
$$\text{Folglich ist } cm : m\gamma = 6 : 2 = 3 : 1$$
$$\text{also } cm = 3(m\gamma)$$
$$\text{und eben so ist } bm = 3(m\beta).$$

Lehrsatz 235. Ist $c\beta$ das n fache von βa, und $b\gamma$ das eben so Vielfache von γa: so ist cm von $m\gamma$ das (n + 1) fache, und bm ist das eben so Vielfache von $m\beta$.

Beweis Wie bei dem vorigen Lehrsatze.

Lehrsatz 236. Wenn $c\beta$ zwei Mal so groß ist als βa, und $b\gamma$ drei Mal so groß als γa, so ist

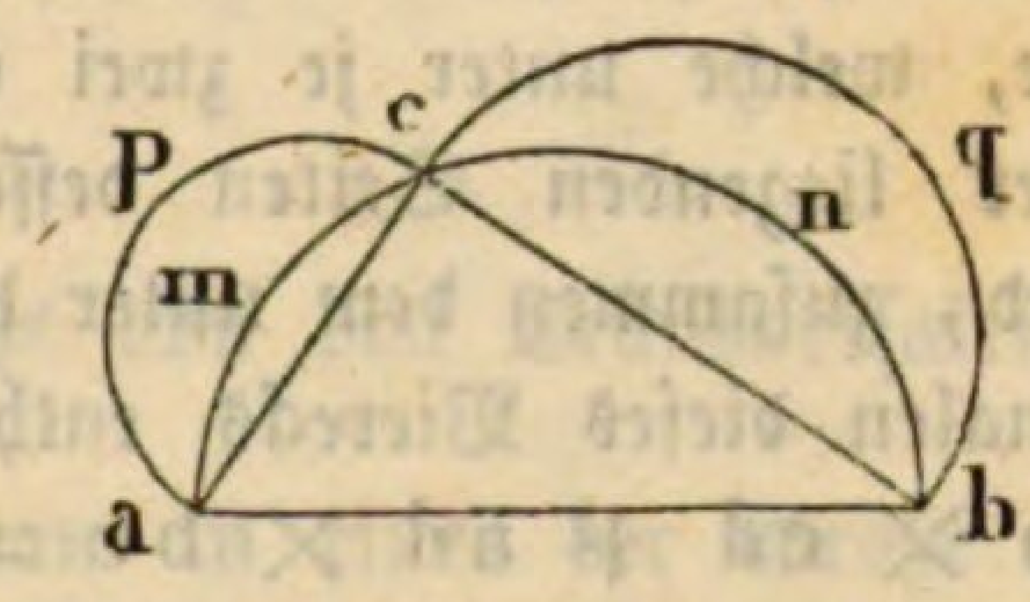
$$cm : m\gamma = 8 : 3 \text{ und } bm : m\beta = 9 : 2.$$

Beweis. Wie bei Lhrs. 234.

Lehrsatz 237. Wenn $c\beta$ das m fache ist von βa und $b\gamma$ das n fache von γa, so ist

$$cm : m\gamma = m\,(n + 1) : n, \text{ und } bm : m\beta = n\,(m + 1) : m.$$

Beweis. Wie bei den vorigen Lehrsätzen.



Lehrsatz 238. Beschreibt man in einen Halbkreis das rechtwinklige Dreieck acb, und über die beiden Katheten ac und bc desselben die Halbkreise apc, bqc: so sind die beiden halben Monde apcma und bqcnb zusammen dem Dreieck acb gleich.

Beweis (31.).

Lehrsatz 239. Werden über eine Kathete und über die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks ähnliche und ähnlich liegende Figuren beschrieben, so ist die Figur der Hypotenuse zwei Mal so groß als die der Kathete.

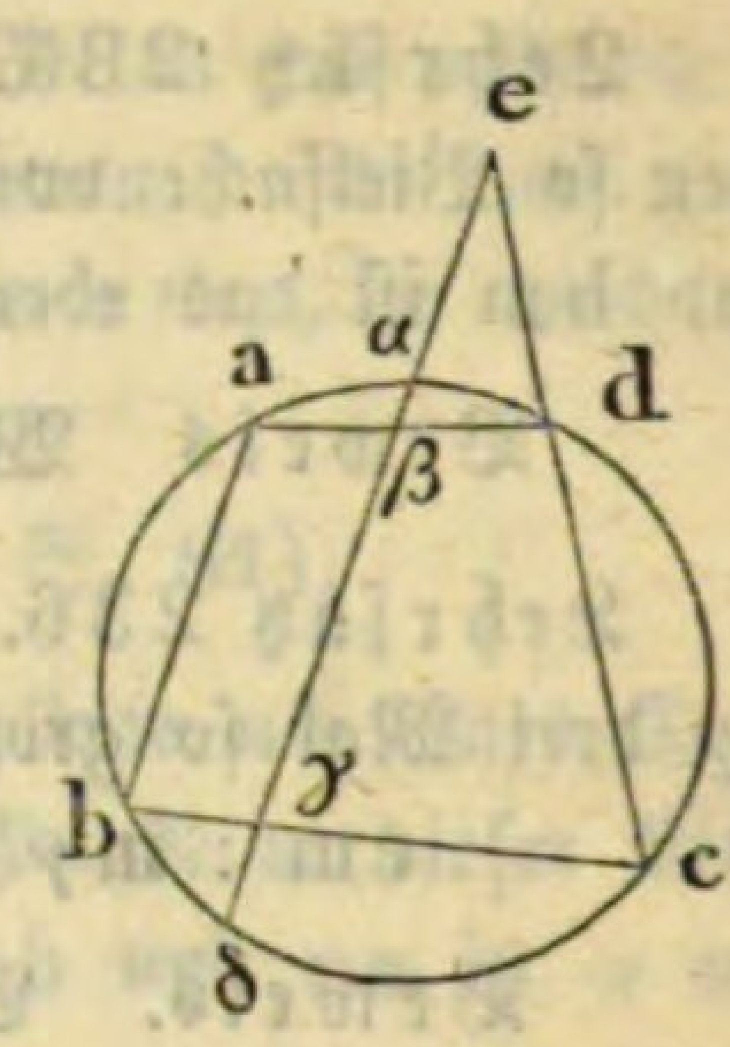
Beweis (31.).

Lehrsatz 240. Beschreibt man über drei gegebene Linien a, b, c, die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren A, B, C, und ist $a : b : c = 3 : 4 : 5$, so ist $C = A + B$.

Beweis (I. 48.) und (31.).

Lehrsatz 241. Beschreibt man in einen Kreis, dessen Radius $= R$ ist, zwei regulaire Vielecke P und Q, von welchen das zweite Q zwei Mal so viel Seiten als P hat, und ist der Radius des Kreises, der in P beschrieben werden kann $= r$: so ist $P : Q = r : R$.

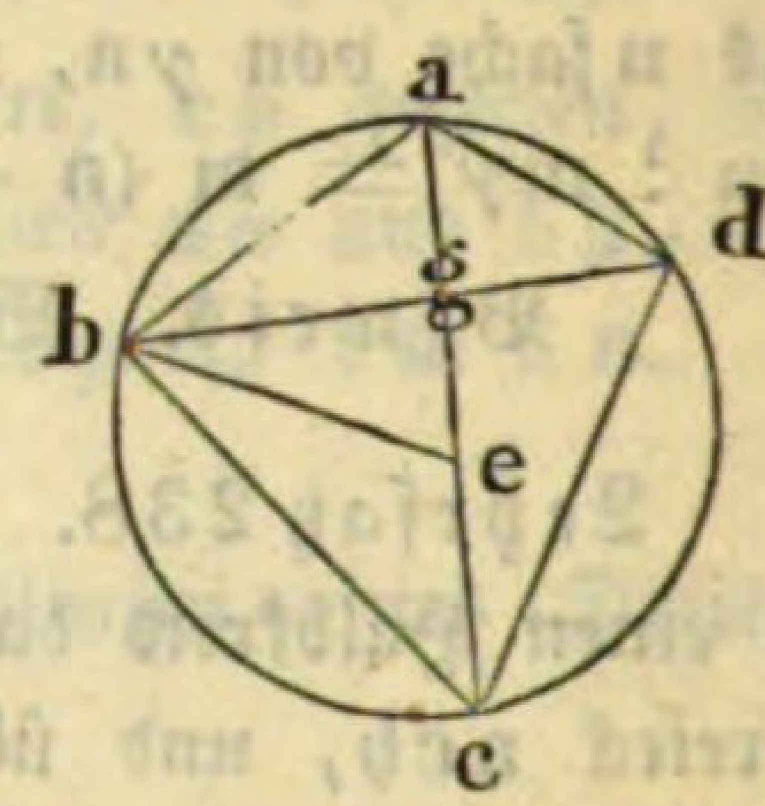
Beweis (1.).



Lehrsatz 242. Ist abcd ein Viereck im Kreise, und zieht man von irgend einem Punkt e der verlängerten cd die eδ parallel ab: so wird diese Linie in α, β, γ, δ so geschnitten, daß

$$e\alpha : e\beta = e\gamma : e\delta.$$

Beweis (III. 22.), (Seite 336, Nr 4.) und (Lhrs. 202.).



Lehrsatz 243. Ist abcd ein Viereck im Kreise, und man zieht bc so, daß ∟cbe = ∟abd: so ist

$\triangle cbe \sim \triangle abd$ und $\triangle abe \sim \triangle bcd$.

Beweis (III. 21.) und (4.).

Lehrsatz 244. Ist abcd ein Viereck im Kreise: so ist die Summe der beiden Rechtecke, welche unter je zwei einander gegenüber liegenden Seiten desselben enthalten sind, zusammen dem unter den beiden Diagonalen dieses Vierecks enthaltenen Rechtecke gleich. Es ist also $ab \times cd + ad \times bc = ac \times bd$.

Beweis (Lhrs. 243.) und (§. 4. S. 459).

Lehrsatz 245. Wenn ein Winkel eines Dreiecks einen Winkel eines andern Dreiecks zu zwei rechten Winkeln ergänzt, so verhalten diese Dreiecke sich zu einander, wie die Rechtecke der Seiten, die an diesen Winkeln anliegen.

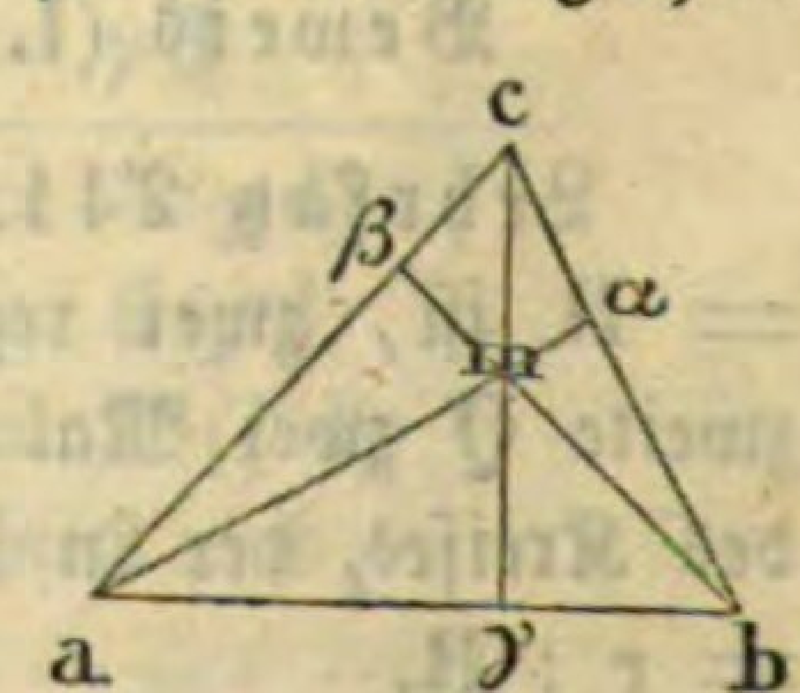
Beweis (23.) und (1.).

Lehrsatz 246. In jedem Viereck verhalten sich die Abschnitte, in welche die eine Diagonale durch die andere getheilt wird, zu einander, wie die beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die zweite Diagonale getheilt ist.

Beweis (1.) (V. 11.) und (V. 24.).

Lehrsatz 247. Bei einem Viereck im Kreise verhalten sich die Abschnitte, in welche eine Diagonale durch die andere getheilt wird, zu einander, wie die Rechtecke der an diesen Abschnitten anliegenden Seiten.

Beweis (Lhrs. 245.) und (Lhrs. 246.)



Lehrsatz 248. Wenn man in einem Dreieck abc die beiden Normalen bβ, cγ zieht, und von a durch m die aα, so ist $\triangle bc\gamma \sim \triangle ma\gamma$.

Beweis. Es ist $\Delta c\gamma a \backsim \Delta b\beta a$ (4.)
und $\Delta b\beta a \backsim \Delta m\gamma b$ „ ,

also $\Delta c\gamma a \backsim \Delta m\gamma b$ (21.)
daher $c\gamma : b\gamma = \gamma a : \gamma m$
folglich ist $\Delta bc\gamma \backsim \Delta ma\gamma$.

Lehrsatz 249. Sind $c\gamma$ und $b\beta$ normal auf ab und ac, und man zieht von a durch m die $a\alpha$: so ist $\Delta cm\alpha \backsim \Delta cb\gamma$.

Beweis (Lehrs. 248.).

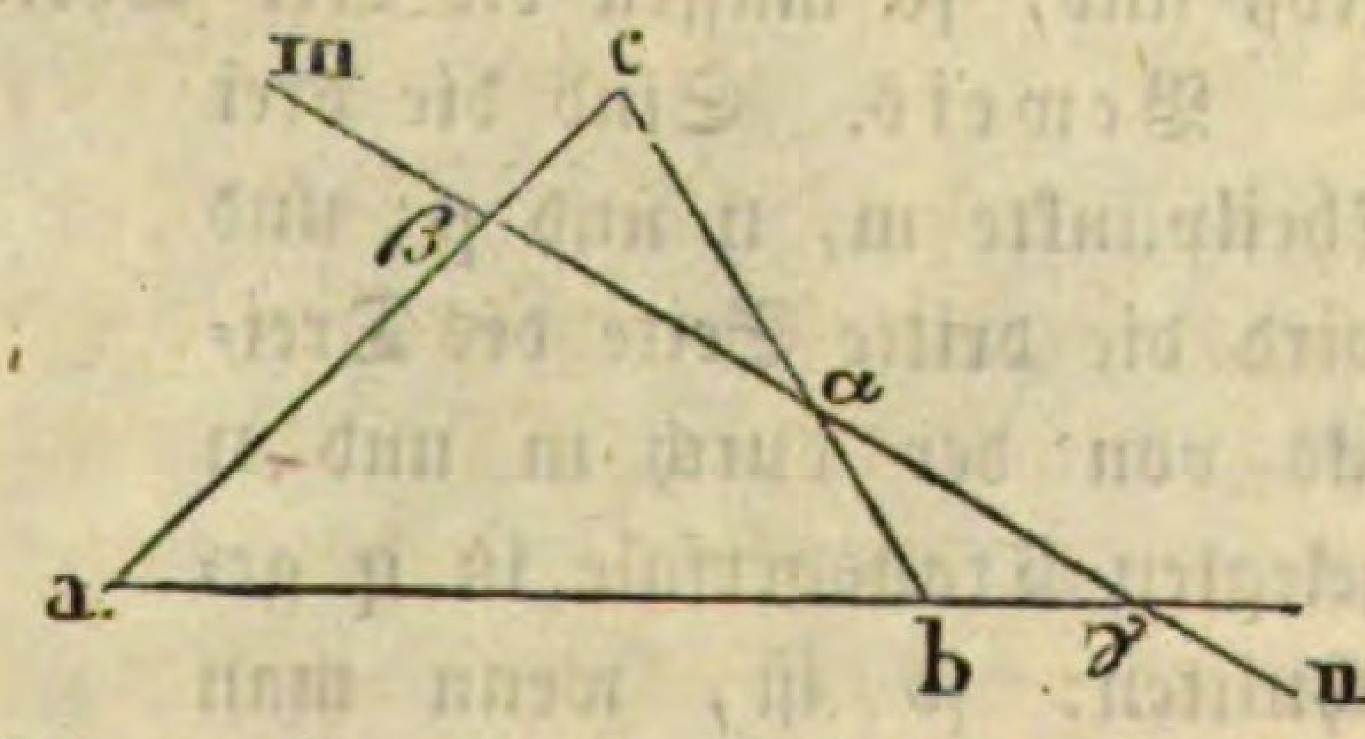
Lehrsatz 250. Werden in einem Dreieck von den drei Spitzen desselben Normalen auf die gegenüber liegenden Seiten gefällt, so schneiden diese drei Normalen sich in einem und demselben Punkte.

Beweis (Lehrs. 249.).

XXXIV. Die wichtigsten Lehrsätze von den Transversalen.

1. Erklärungen. Nimmt man in einer der Größe und Lage nach gegebenen geraden Linie oder in der Verlängerung derselben einen Punkt an, so ist jeder beider Abstände dieses Punktes von den Endpunkten der Linie ein Abschnitt derselben. Die Linie selbst besteht also immer aus der Summe ihrer beiden Abschnitte.

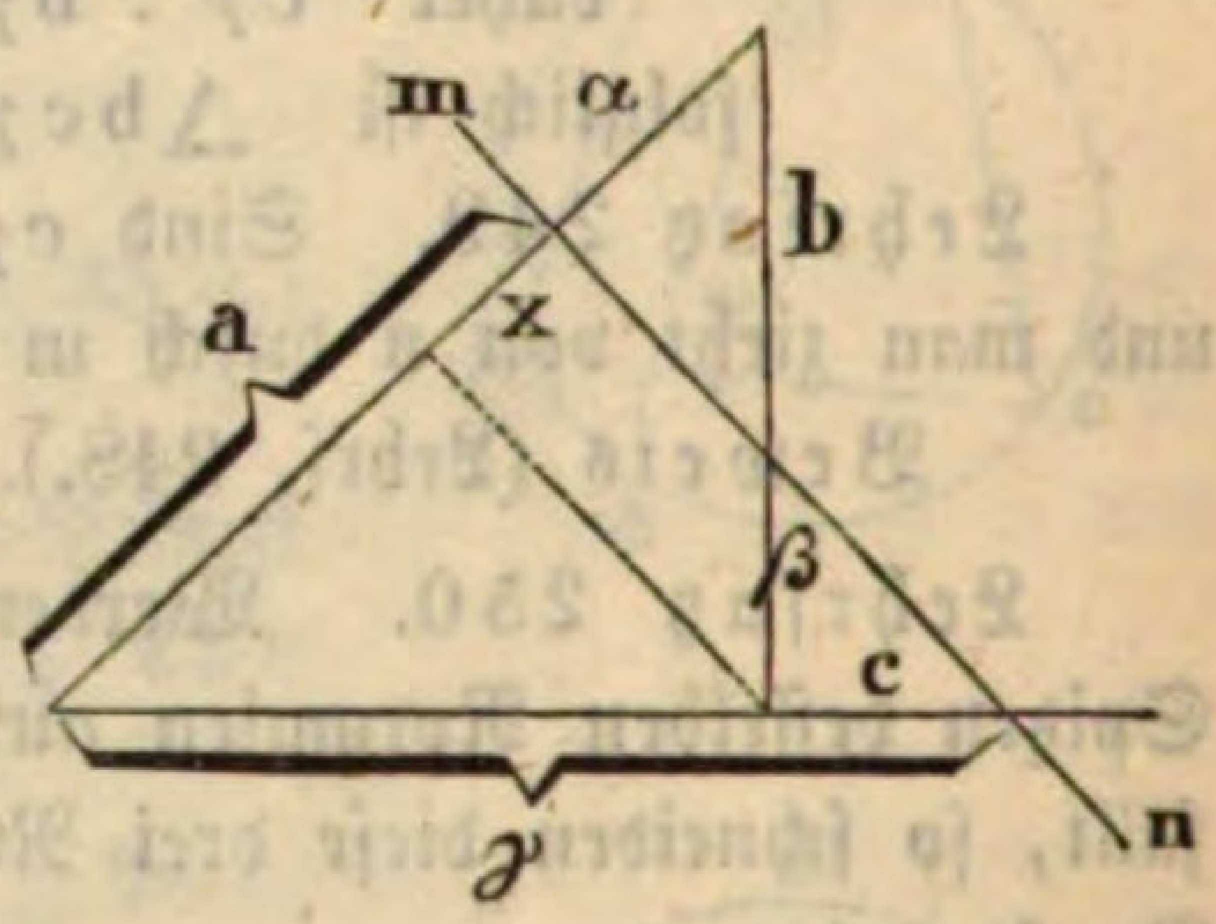
Wird eine gerade Linie durch irgend eine Figur gelegt, so nennt man diese eine Transversale; und ist die Figur geradlinig, so wird jede Seite derselben durch die Transversale in zwei Abschnitte getheilt. Die Abschnitte von zwei neben einander liegenden Seiten einer Figur, die keinen ihrer Endpunkte gemein haben, sollen Wechsel-Abschnitte genannt werden.



Von dem Dreieck abc ist mn eine Transversale; die beiden Abschnitte
der Linie ac sind $a\beta$ und $c\beta$
„ „ bc „ $b\alpha$ „ $c\alpha$
„ „ ab „ $a\gamma$ „ $b\gamma$

Ferner sind $a\beta$, $c\alpha$ und $b\gamma$ Wechsel-Abschnitte, und es sind auch $c\beta$, $b\alpha$ und $a\gamma$ Wechsel-Abschnitte.

2. Lehrsatz. Jedes Dreieck wird durch eine Transversale immer so geschnitten, daß die beiden Produkte von je drei Wechsel-Abschnitten gleich groß sind.

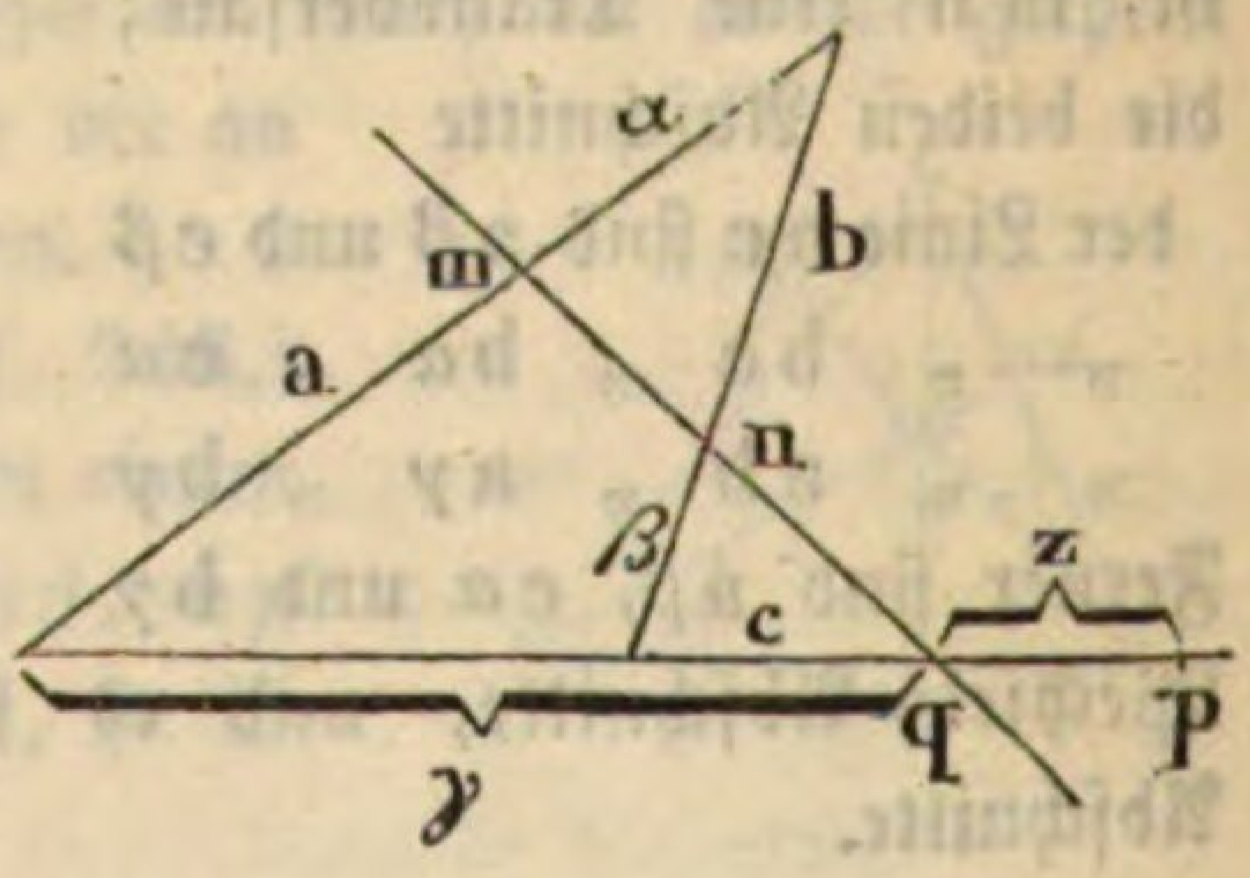


Beweis. Bezeichnet man die beiden Abschnitte
der ersten Seite mit a und α
„ zweiten „ „ b „ β
„ dritten „ „ c „ γ
so daß a, b und c und eben so α, β und γ Wechsel-Abschnitte sind, und wird durch die eine Ecke des Dreiecks mit der Transversale eine Parallele gelegt, und der zwischen den beiden Parallelen liegende Abschnitt der einen Seite mit x bezeichnet: so ist

$$a : x = \gamma : c$$
$$\text{und} \quad x : \alpha = \beta : b$$
$$\text{folglich} \quad ax : \alpha x = \beta\gamma : bc$$
$$\text{und daher} \quad abc = \alpha\beta\gamma.$$

3. Zusatz. Durch ein Dreieck kann eine Transversale auch so gelegt werden, daß dieselbe nur eine Seite desselben zwischen ihren Endpunkten schneidet, und die beiden anderen in ihren Verlängerungen; oder sie trifft alle drei Seiten in den Verlängerungen derselben. Wird die diesen Bedingungen entsprechende Figur entworfen, und wendet man bei derselben die obige Bezeichnung und Construction an: so läßt sich in gleicher Weise, wie bei dem obigen Lehrsatze, die Richtigkeit der Behauptung auch für diesen Fall nachweisen. Der Lehrsatz hat also allgemeine Gültigkeit.

4. Lehrsatz. Werden die drei Seiten eines Dreiecks so getheilt, daß die beiden Produkte von je drei Wechsel-Abschnitten gleich groß sind, so müssen die drei Theilpunkte in gerader Linie liegen.



Beweis. Sind die drei Theilpunkte m, n und p; und wird die dritte Seite des Dreiecks von der durch m und n gelegten Transversale in q geschnitten: so ist, wenn man den Abschnitt pq mit z bezeichnet,

$$ab\,(c + z) = \alpha\beta\,(\gamma + z) \quad \text{(p. h.)}$$
$$\text{und} \quad abc = \alpha\beta\gamma \quad \text{(nach Nr. 2.)}$$

$$\text{folglich} \quad \frac{c + z}{c} = \frac{\gamma + z}{\gamma}$$

$$\text{und also auch} \quad \frac{z}{c} = \frac{z}{\gamma}$$

$$\text{und sonach} \quad c : z = \gamma : z$$

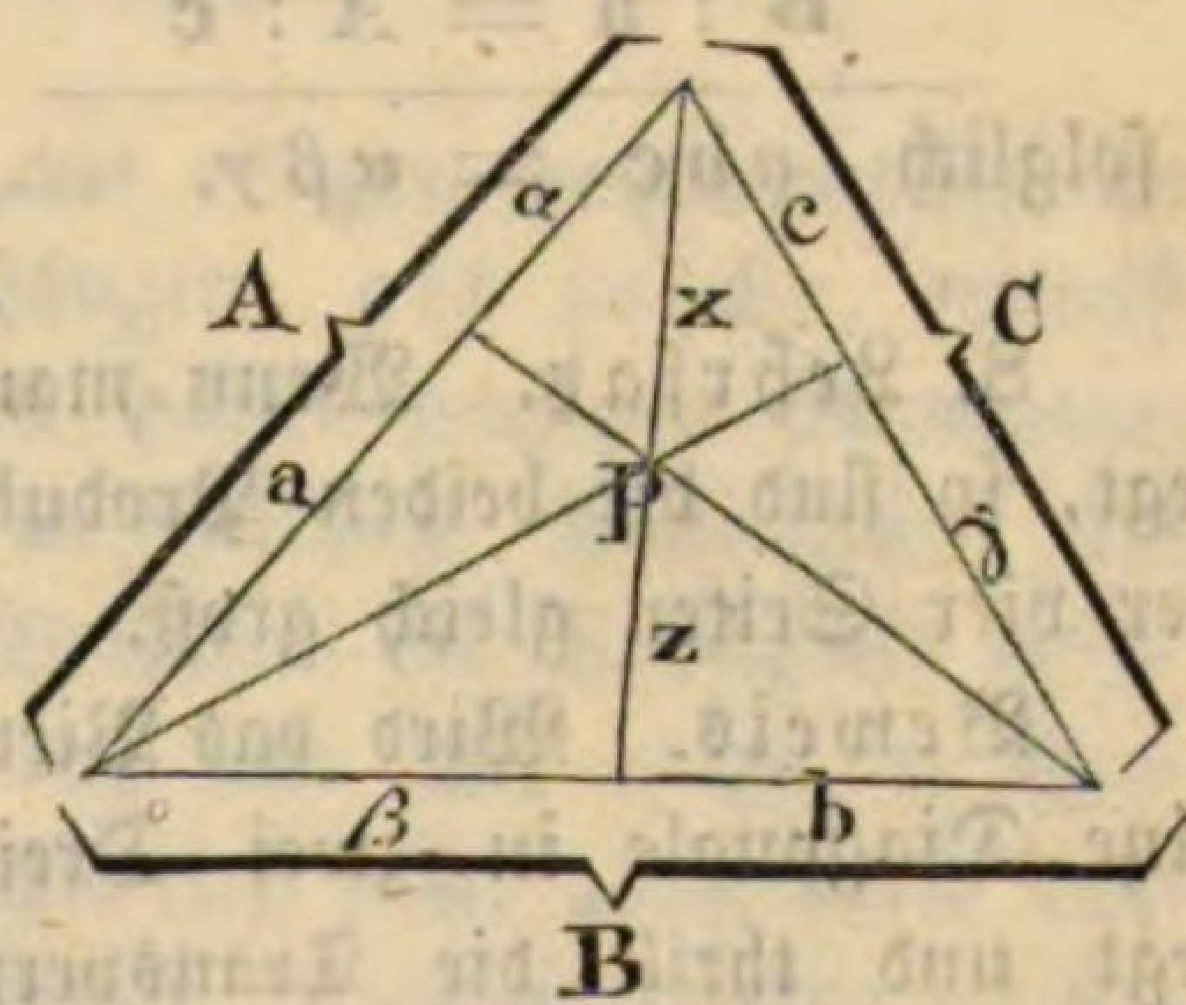
eine Folgerung, die nur zulässig ist für $z = o$; und es müssen daher die Punkte p und q zusammenfallen.

5. **Lehrsatz.** Legt man durch irgend einen Punkt p und durch die drei Ecken eines Dreiecks Transversalen: so werden die drei Seiten von denselben so geschnitten, daß die beiden Produkte von je drei Wechselabschnitten gleich groß sind.

Beweis. Für das Dreieck, dessen Seiten sind

C, b und x + z, ist $cBz = \gamma\beta x$
A, β „ x + z, „ $abx = \alpha Bz$

und es ist daher $abc = \alpha\beta\gamma$
was bewiesen werden sollte.



6. **Zusatz.** Die Richtigkeit dieses Satzes für den Fall, wenn der Punkt p außerhalb des Dreiecks liegt, läßt durch ein gleiches Verfahren sich beweisen. Auch hat dieser Satz umgekehrt ganz allgemeine Gültigkeit; so daß, wenn man die drei Seiten eines Dreiecks in der Weise theilt, daß die beiden Produkte von je drei Wechsel-Abschnitten gleich groß sind, und die Theilpunkte mit den drei Ecken des Dreiecks verbindet, die drei Verbindungslinien in einem und demselben Punkte sich schneiden müssen.

7. **Folgerungen.** Es folgt hieraus:

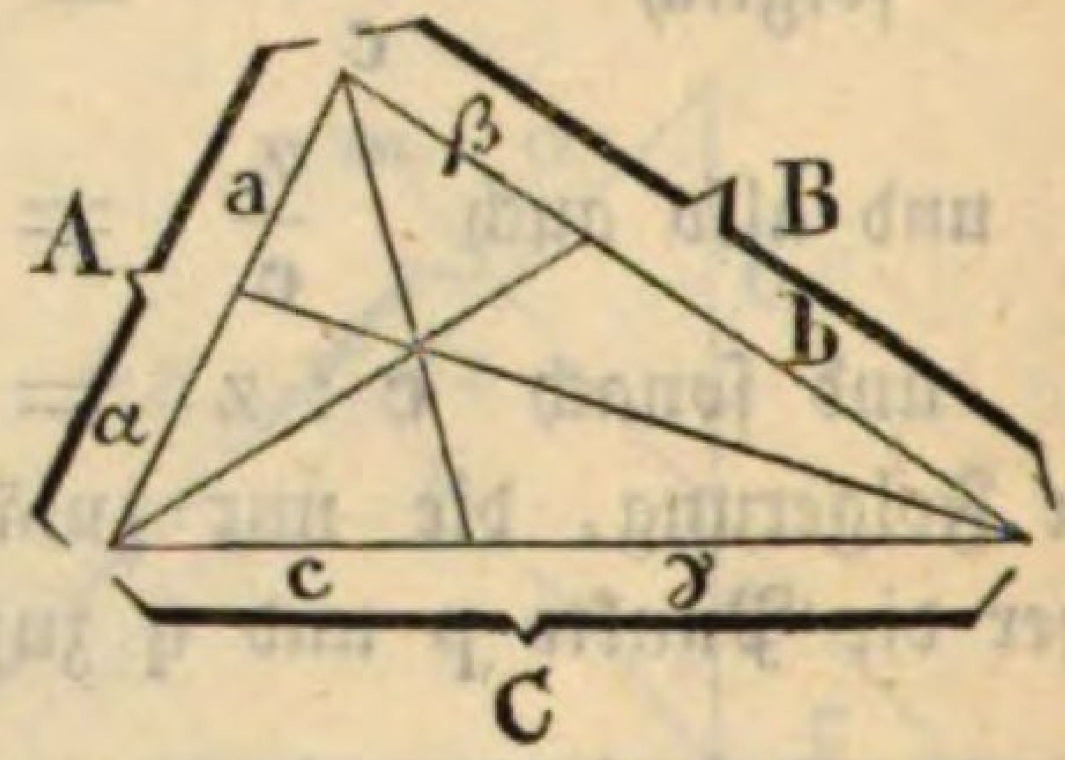
a) Werden die drei Seiten eines Dreiecks halbirt: so schneiden die Linien, welche die Halbirungspunkte mit den gegenüber liegenden Ecken des Dreiecks verbinden, sich in einem Punkte; denn werden die Seiten des Dreiecks mit **A**, **B** und **C** bezeichnet, so sind die Wechsel-Abschnitte beide Mal

$$\frac{A}{2},\ \frac{B}{2} \text{ und } \frac{C}{2}.$$

b) Werden die drei Winkel eines Dreiecks halbirt, so schneiden die Halbirungslinien sich ebenfalls in einem und demselben Punkte; denn es ist

$$A : B = c : \gamma \quad \text{(VI. 3.)}$$
$$B : C = a : \alpha \quad \text{„}$$
$$C : A = b : \beta \quad \text{„}$$

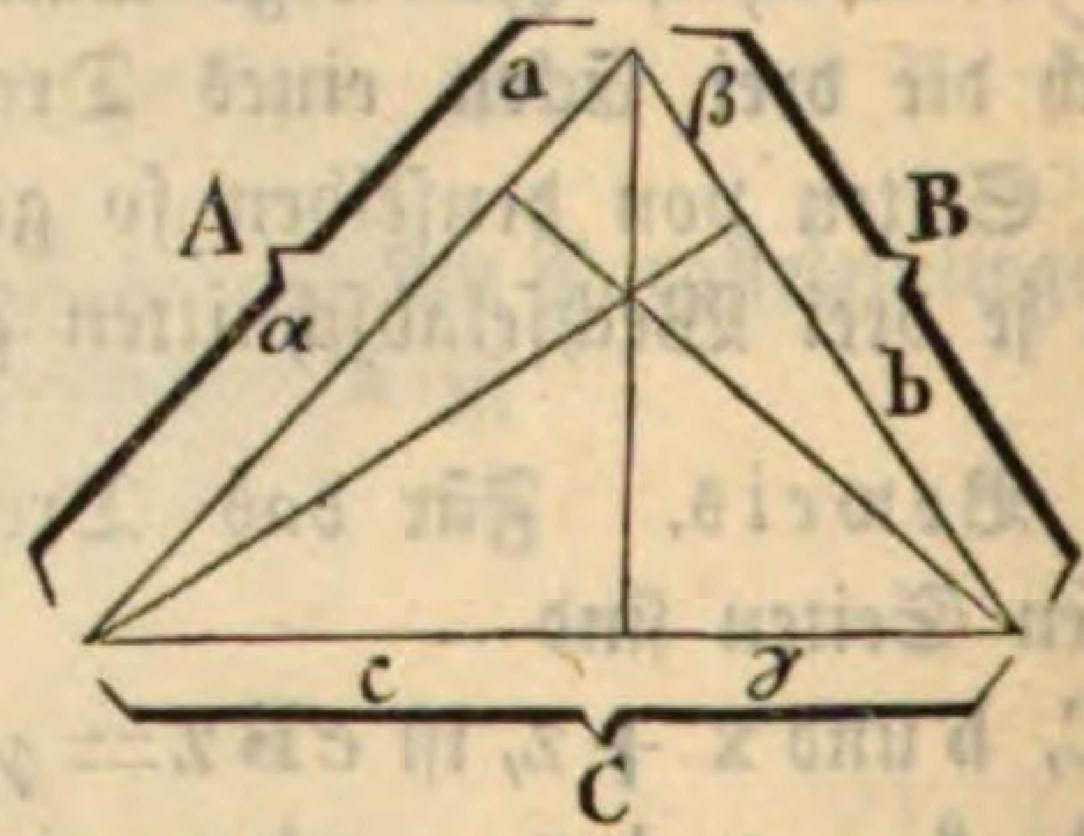
folglich $abc = \alpha\beta\gamma$.



c) Daß auch die drei Normalen eines Dreiecks in demselben Punkte sich schneiden müssen, ergiebt sich wie folgt:

Es ist $A : c = C : \alpha$ (VI. 4.)
$$C : b = B : \gamma \quad \text{„}$$
$$B : a = A : c$$

folglich $abc = \alpha\beta\gamma$.

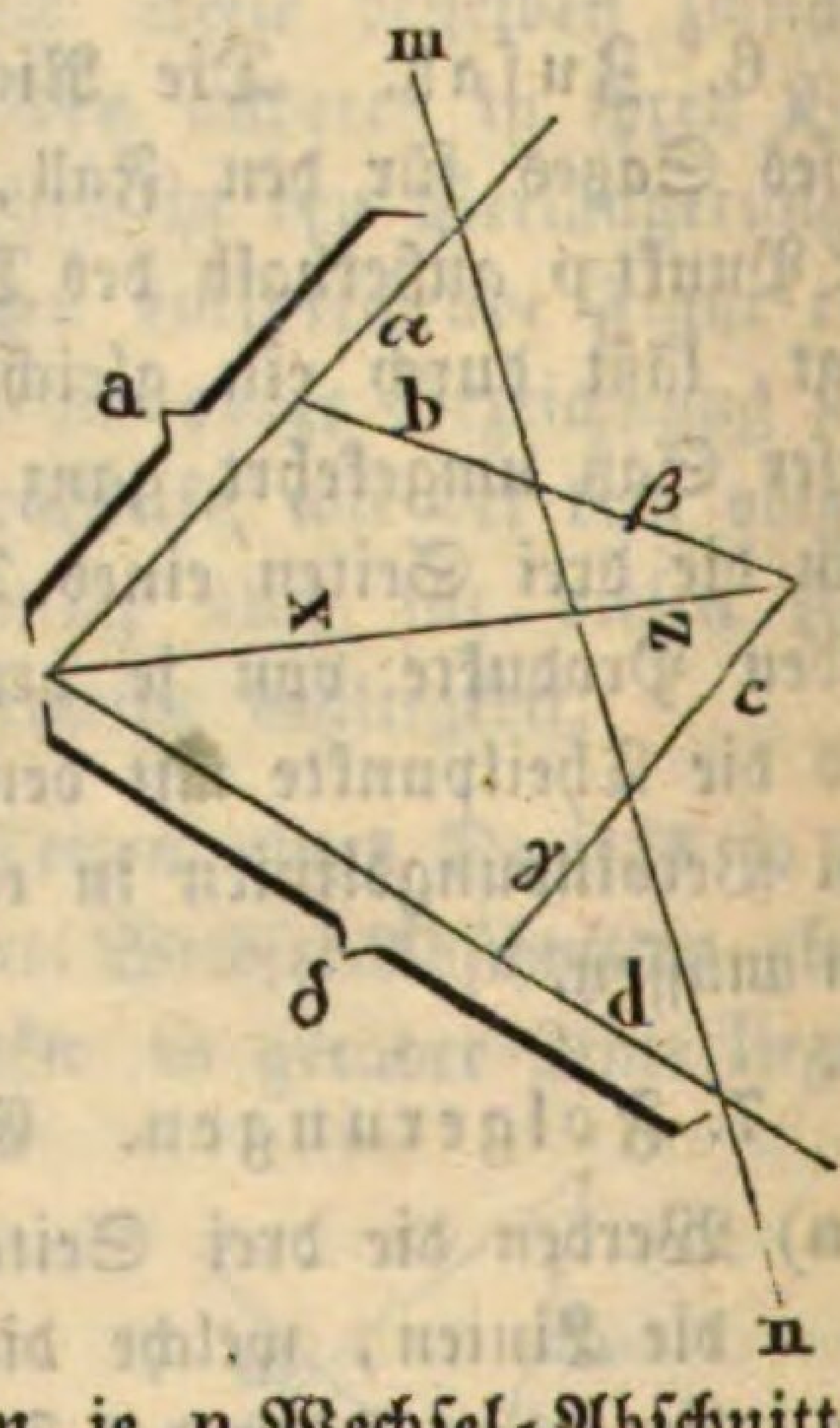


8. Lehrsatz. Wenn man durch ein Viereck eine Transversale legt, so sind die beiden Produkte von je vier Wechsel-Abschnitten der vier Seiten gleich groß.

Beweis. Wird das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt und theilt die Transversale mn diese Diagonale in die beiden Abschnitte x und z: so ist

in dem einen Dreieck $abz = \alpha\beta x$
und in dem anderen $cxd = \gamma z\delta$

folglich ist auch $abcd = \alpha\beta\gamma\delta$



9. Zusatz. Ganz in gleicher Weise folgt: daß dieses Gesetz auch für mehrseitige Figuren Gültigkeit hat, und daß sonach ganz allgemein jede nseitige Figur durch eine Transversale so geschnitten wird, daß die beiden Produkte von je n Wechsel-Abschnitten der Seiten gleich groß sind.

Die Elemente der rechnenden Geometrie.

Einleitung.

Die theoretische Geometrie lehrt „aus einigen gegebenen Raumgrößen andere, die von denselben abhängen, als solche, mittelst einer Construction finden, die in allen Fällen von den Elementar-Aufgaben" abhängt, welche einen wesentlichen Bestandtheil der Euklidischen Geometrie ausmachen. Während die Richtigkeit dieses Verfahrens nicht bezweifelt werden kann, und mit einer der Geometrie eigenthümlichen Strenge sich nachweisen läßt, „daß durch dasselbe in jedem Falle besonders das Gesuchte gefunden werden muß"; wird dieses Verfahren doch in vielen Fällen, in welchen es darauf ankömmt, „die Lehren der Geometrie nun wirklich anzuwenden", unbrauchbar; weil selbst die größte mechanische Fertigkeit nicht ausreicht, die zur Lösung einer Aufgabe erforderliche Construction mit einer solchen Genauigkeit auszuführen, daß das erhaltene Resultat als ganz zuverlässig angesehen werden könnte. Der Gebrauch der Construction wird hierdurch beschränkt; und es ist deßhalb ein Hülfsmittel erforderlich, durch dessen Anwendung das Gesuchte von allen Zufälligkeiten unabhängig werde, und sich unter allen Umständen vollkommen genau ermitteln lasse. Dieses Hülfsmittel gewährt die rechnende Geometrie, welche die Anleitung enthält, „unbekannte Raumgrößen durch Rechnung zu finden".

Die rechnende Geometrie dient zur Unterstützung der Construction, um diese zu vereinfachen, und so den Resultaten die möglichst größte Zuverlässigkeit zu verschaffen; sie ist daher das Verbindungsmittel zwischen der theoretischen Geometrie und der praktischen. Um aber

eine Raumgröße durch Rechnung finden zu können, müssen die Werthe der bekannten Größen durch Zahlen gegeben seyn; und man erhält diese dadurch, daß die vorkommenden Raumgrößen wirklich gemessen werden, indem man hierbei eine bestimmte Einheit als allgemeines Maaß annimmt. Die gesuchte Größe wird hierbei natürlich ebenfalls durch Zahlen ausgedrückt erhalten; da diese übrigens sich auf dieselbe Einheit beziehen, welche bei den gegebenen Größen angenommen worden ist: so läßt sich, wenn es nöthig seyn sollte, das Resultat jedenfalls wieder auf eine Raumgröße zurückführen und durch eine solche darstellen. Der Maaßstab bildet hierbei das allgemeine Hülfsmittel.

Die Regeln, welche bei der Berechnung von Raumgrößen anzuwenden sind, müssen aus der theoretischen Geometrie abgeleitet werden; und es lassen sich hierbei alle die geometrischen Sätze benutzen, welche auch arithmetisch sich ausdrücken lassen. Das vollständige Material für die rechnende Geometrie ist daher in den Sätzen des zweiten und fünften Buches, und in allen von diesen abhängenden oder mit diesen verwandten Sätzen enthalten; und da bei allen diesen Sätzen sogleich ihre arithmetische Bedeutung in den Beilagen zu den angeführten Büchern vollständig angegeben worden ist, so kann jetzt ohne Weiteres von denselben Gebrauch gemacht werden. Da indessen alle diese Sätze nur auf Linien und Flächen sich beziehen, so kann man mit Hülfe derselben auch nur, wenn Linien oder Flächen in Zahlen gegeben sind, ebenfalls Linien oder Flächen durch Rechnung finden.

Gehören Winkel zu den gegebenen Größen, oder sollen Winkel durch Rechnung gefunden werden, so sind hierzu eigne Hülfsmittel erforderlich, für welche der letzte Satz des sechsten Buches die Grundlage enthält. Nach diesem Satze verhalten in gleichen Kreisen sich Centriwinkel zu einander, wie die Kreisbogen, auf welchen sie stehen; und es können daher, wenn einmal für den Radius ein bestimmter Werth angenommen ist, Kreisbogen für die Winkel substituirt werden. In einem und demselben Kreise aber hängen von jedem Kreisbogen demselben eigenthümlich zugehörige gerade Linien so ab, daß dieselben ihrer Größe nach sich ändern, sobald der Kreisbogen größer oder kleiner wird; und es können daher diese geraden Linien die Stelle der Kreisbogen und somit auch die der zu diesen Bogen gehörigen Winkel vertreten, wenn man hierbei den Radius des Kreises als gemeinschaftliche und unveränderliche Einheit annimmt.

Jede geometrische Rechnung, bei welcher Winkel vorkommen, kann daher auf eine andere zurückgeführt werden, in welcher die den Kreisbogen, durch welche die Winkel gemessen werden, zugehörigen geraden Linien, und deren Einheit der Radius ist, die Stelle der Winkel vertreten. Hierdurch entsteht ein eigner Tleil der rechnenden Geometrie, die Trigonometrie; die in ihrer vollständigen Ausbildung zu einer eignen Wissenschaft wird, und als solche den wichtigsten Theil der ganzen Mathematik bildet.

Die Elemente der rechnenden Geometrie lehren:

1) das Berechnen gerader Linien aus gegebenen Linien und Flächen;
2) das Berechnen der Flächen geradliniger Figuren;
3) das Theilen der Figuren durch Rechnung, und
4) das Berechnen der Werthe der bei dem Kreise vorkommenden Größen, und hiermit enthalten die Elemente zugleich die Vorbereitung zu der Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Das Berechnen gerader Linien.

Jede ihrer Größe nach gegebene gerade Linie wird durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet, also durch a, b, c oder d 2c. Sind nun die Linien a, b und c drei Glieder einer Proportion, deren viertes Glied = x seyn mag,

$$\text{ist also } a : b = c : x$$

$$\text{so folgt } \quad x = \frac{b\,c}{a}$$

Da nun das vierte Glied x der Proportion ebenfalls eine gerade Linie ist: so folgt, daß $\frac{b\,c}{a}$ ebenfalls eine gerade Linie seyn muß. Wird diese als das dritte Glied einer Proportion angenommen, deren erste beiden Glieder a′ und b′ sind, und setzt man das vierte Glied derselben = x′, so ist

$$a' : b' = \frac{b\,c}{b} : x'$$

$$\text{und daher } x' = \frac{b'\,b\,c}{a'\,a}$$

Der Ausdruck $\frac{b'bc}{a'a}$ bedeutet also ebenfalls eine gerade Linie, und es gilt dasselbe auch von den Ausdrücken $\frac{b''b'bc}{a''a'a}$; $\frac{b'''b''b'bc}{a'''a''a'a}$ ꝛc.

Wird also eine gerade Linie durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet, so hat jeder gebrochene Ausdruck, in welchem der Zähler einen allgemeinen Factor mehr als der Nenner hat, ebenfalls die Bedeutung von einer geraden Linie.

Sind b und c die Seiten eines Rechtecks, so wird die Fläche desselben $= b \times c = bc$; wenn also ein einfacher Buchstab eine gerade Linie bedeutet, so wird durch das Produkt zweier eine Fläche ausgedrückt. Sucht man aber zu den Linien a', b' und der Fläche bc die vierte Proportionale X, so ist diese ebenfalls eine Fläche; und es ist

$$a' : b' = bc : X$$

$$\text{also } X = \frac{b'bc}{a'}.$$

Die vierte Proportionale zu a'', b'' und $\frac{b'bc}{a'}$, welche ebenfalls eine Fläche seyn muß, ist $\frac{b''b'bc}{a''a'}$.

Hieraus folgt: daß jeder gebrochene Ausdruck, in welchem der Zähler zwei allgemeine Factoren mehr als der Nenner hat, eine Fläche bedeutet.

Soll zwischen zwei gegebenen Linien b und c die mittlere Proportionale gefunden werden, und setzt man diese $= x$: so ist

$$b : x = x : c$$

$$\text{also } x^2 = bc, \text{ und daher } x = \sqrt{bc}.$$

Da nun diese mittlere Proportionale ebenfalls eine Linie seyn muß, so folgt, daß auch $\sqrt{bc}$ eine Linie ausdrückt.

Die Quadratwurzel aus einer Fläche ist also immer eine Linie.

Sollen mehrere Größen addirt werden, so müssen sie sämmtlich gleichartig seyn, und die Summe Aller ist denselben ebenfalls gleichartig. Es ist also nicht möglich, eine Linie und eine Fläche in eine Summe zu vereinigen. Hieraus folgt: wenn in einer aus mehreren Gliedern bestehenden Größe ein Glied eine Linie bedeutet:

so muß von den übrigen Gliedern, jedes für sich, ebenfalls eine Linie ausdrücken, und die mehrgliedrige Größe ist alsdann ebenfalls eine Linie. Eben so müssen alle Glieder Flächen ausdrücken, wenn ein Glied eine Fläche bedeutet, und es ist alsdann die mehrgliederige Größe ebenfalls eine Fläche.

Hiernach ist $x = a + \frac{bc}{a'} - \sqrt{b'c'}$ eine Linie

und $X = ab + \frac{b'b''c}{a'} - d\sqrt{gh}$ eine Fläche.

Von jeder Größe, welche eine Linie ausdrückt, sagt man, es ist eine Größe von einer Dimension, oder eine Größe, deren Dimension = 1 ist; und jeder Ausdruck, der eine Fläche bedeutet, wird eine Größe von zwei Dimensionen genannt, oder eine Größe, deren Dimension = 2 ist, und haben mehrere Größen eine gleiche Dimension, so nennt man sie symmetrisch. Hieraus folgt also, daß, wenn bei einer geometrischen Rechnung eine mehrgliedrige Größe vorkömmt, und bei dieser jeder Buchstab für sich eine Linie bedeutet, der ganze Ausdruck immer symmetrisch seyn muß; und es läßt sich aus der Dimension jedes einzelnen Gliedes erkennen, ob der Ausdruck eine Linie oder eine Fläche bedeutet.

Da hiernach z. B. $ab + cd$ eine Fläche ist, so muß $\sqrt{(ab + cd)}$ eine Linie bedeuten; und weil auch $m + n$ eine Linie bedeutet, so ist $\frac{ab + cd}{m + n}$ und eben so auch $\frac{ef + gh}{\sqrt{(ab + cd)}}$ eine Linie; dagegen ist $(m + n)\sqrt{(ab + cd)}$ eine Fläche 2c.

Es geht hieraus hervor, daß auch für zusammengesetzte Ausdrücke die so eben abgeleiteten Sätze ihre Gültigkeit behalten; und es wird hierbei die Bedeutung einer Klammergröße wie die einer mehrgliedrigen beurtheilt, und hierauf wird dieselbe wie eine eingliedrige Größe benutzt. Der Zähler oder Nenner eines Bruches ist übrigens ebenfalls als eine Klammergröße anzusehen.

Hat man die beiden Linien a und b, so ist $\frac{a}{b}$ eine bloße Zahl, welche ausdrückt, wie oft b in a enthalten ist, oder es giebt $\frac{a}{b}$ die Zahl an, mit welcher b multiplicirt werden muß, um a zu erhalten. Der Ausdruck $\frac{b}{a}$ bedeutet also gar keine Raumgröße, und

es ist dieses eben so auch mit dem Ausdrucke $\frac{cd}{ab}$ der Fall. Von einem solchen Ausdruck sagt man, er hat eine Dimension = o, und der Werth desselben ist ein bloßer Coëfficient, also eine bloße Zahl. Ist z. B. a drei Mal so groß als b, so wird $\frac{a}{b} = 3$; und es ist für diesen Werth $\frac{a}{b} \cdot c = 3\,c$ eine Linie, welche die dreifache Länge der Linie c hat.

Wird überhaupt eine Linie mit einer Zahl multiplicirt: so giebt das Product wieder eine Linie, welche die gegebene so vielmal enthält, so vielmal die Einheit in der gegebenen Zahl enthalten ist. Hiernach ist

$5\,a$ eine Linie, welche 5 Mal so groß ist als a.

$\frac{5}{8}a$ „ „ „ den achten Theil von $5\,a$ beträgt.

Dasselbe gilt von den Flächen; und es ist hiernach,

$5\,ab$ eine Fläche, die 5 Mal so groß ist als die Fläche ab 2c.

Anmerkung. Die folgenden Aufgaben enthalten eine Anleitung, die Werthe unbekannter Linien durch Rechnung zu finden, wenn die Linien oder Flächen, von welchen diese Linien abhängen, in Zahlen gegeben sind, und es sind einige der hierher gehörigen Aufgaben bereits in der Beilage XII. Seite 231. u. f. gelös't. Hierdurch ist das Verfahren bereits angedeutet, welches bei der Auflösung solcher Aufgaben angewendet werden muß.

---

§. 37.

Aufgaben zur Berechnung gerader Linien.

Aufgabe 661. Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben; es soll die Hypotenuse desselben gefunden werden.

Analysis. Werden die Katheten mit a und b und die Hypotenuse mit h bezeichnet, so ist

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad (I.\ 47.)$$

$$\text{und daher } h = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Auflösung. Man addire die Quadrate beider Katheten, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, so giebt diese die gesuchte Hypotenuse.

Beispiel. Sind die Katheten 28 und 37, so ist die Hypotenuse $h = \sqrt{(28^2 + 37^2)} = \sqrt{(784 + 1369)}$
$= \sqrt{2153} = 46,4.$

Aufgabe 662. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse h und die eine Kathete a gegeben; man soll die andere = b finden.

Analysis. Da $a^2 + b^2 = h^2$ (I. 47.).

so ist $b^2 = h^2 - a^2$

und daher $b = \sqrt{(h^2 - a^2)}$.

Zusatz. Da $h^2 - a^2 = (h + a)(h - a)$ (II. 5.) und Seite 201. Nr. 5., so ist auch

$$b = \sqrt{(h + a)(h - a)}.$$

Beispiel. Es ist $h = 38$ und $a = 28$.

Hiernach ist $b = \sqrt{(38 + 28)(38 - 28)} = \sqrt{66 \cdot 10}$
$= \sqrt{660} = 25,69.$

Aufgabe 663. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks = g und die zweite Seite desselben = c sind gegeben; man soll hieraus die Höhe dieses Dreiecks, also die zu der Grundlinie g gehörige Normale γ berechnen.

Analysis. Da g durch γ halbirt wird, so ist γ die eine und $\frac{1}{2}g$ die andere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse = c ist, und es ist daher $\gamma = \sqrt{\left[c^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2\right]}$ (Aufg. 662.).

und weil $\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{g^2}{4}$, so ist

$$\gamma = \sqrt{\left(c^2 - \frac{g^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(c + \frac{g}{2}\right)\left(c - \frac{g}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2c + g}{2}\right)\left(\frac{2c - g}{2}\right)}.$$

Aufgabe 664. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse und die eine Kathete gegeben; es soll der an dieser Kathete anliegende Abschnitt der Hypotenuse berechnet werden, welcher durch die von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Normale abgeschnitten wird.

Analysis. Ist a die gegebene Kathete und α der an derselben anliegende Abschnitt der Hypotenuse h:

$$\text{so ist } \alpha : a = a : h \quad (\text{VI. } 8.)$$

$$\text{also } \alpha h = a^2$$

$$\text{und } \alpha = \frac{a^2}{h}$$

Aufgabe 665. Die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben; es soll hieraus der an a anliegende Abschnitt α der Hypotenuse gefunden werden.

Analysis. Nach (Aufg. 664.) ist $\alpha = \frac{a^2}{h}$

und nach (Aufg. 661.) $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

folglich ist $\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

Aufgabe 666. Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben; es soll hieraus die Normale p, welche von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt werden kann, gefunden werden.

Analysis. Der an a liegende Abschnitt α und p sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a ist. Daher wird

$$p^2 + \alpha^2 = a^2$$

$$\text{also } p^2 = a^2 - \alpha^2$$

und weil $\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ so ist $\alpha^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}$

und daher $p^2 = a^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{a^2(a^2 + b^2) - a^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Folglich ist $p = \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

Aufgabe 667. Aus der einen Kathete a und der Hypotenuse h soll die Normale p berechnet werden.

Auflösung. Da $p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$

so ist auch $p = \frac{ab}{h}$

$$\text{und weil } b = \sqrt{(h^2 - a^2)}$$
$$\text{so muß seyn } p = \frac{a}{h}\sqrt{(h^2 - a^2)}$$

Beispiel. Ist die Hypotenuse = 34 und die eine Kathete = 30, so wird $p = \frac{30}{34}\sqrt{(34^2 - 30^2)}$

$$\frac{30}{34}\sqrt{256} = \frac{30}{34} \cdot 16 = 14\tfrac{2}{17}.$$

Aufgabe 668. Die Grundlinie g und die zweite Seite c eines gleichschenkligen Dreiecks sind gegeben; man soll hieraus die Abschnitte berechnen, in welche die Seite c durch die zu derselben gehörige Normale γ geschnitten wird.

Analysis. Setzt man den an g anliegenden Abschnitt der Seite $c = x$, so ist der andere Abschnitt $= c - x$; und es ist nun

$$g^2 = x^2 + \gamma^2 \qquad \text{und } c^2 = (c - x)^2 + \gamma^2$$

$$\text{also } g^2 - x^2 = \gamma^2 \text{ und } c^2 - (c - x)^2 = \gamma^2$$
$$\text{oder, weil } (c - x)^2 = c^2 - 2cx + x^2$$
$$2cx - x^2 = \gamma^2.$$

Werden beide Werthe von γ^2 einander gleich gesetzt, so erhält man

$$2cx - x^2 = g^2 - x^2$$

$$\text{folglich ist } 2cx = g^2$$
$$\text{und daher } x = \frac{g^2}{2c}.$$

Da nun der andere Abschnitt $= c - x$ seyn muß, so ist derselbe $= c - \frac{g^2}{2c} = \frac{2c^2 - g^2}{2c}$.

Aufgabe 669. Man soll von einem gleichschenkligen Dreieck den Werth der zu c gehörigen Normale aus den beiden Seiten g und c des Dreiecks berechnen.

Analysis. Da $\gamma^2 = g^2 - x^2 = (g + x)(g - x)$

$$\text{und } x = \frac{g^2}{2c} \text{ (Aufg. 668.)}$$

so ist $f^2 = \left(g + \frac{g^2}{2c}\right)\left(g - \frac{g^2}{2c}\right)$

$$= \frac{(2cg + g^2)(2cg - g^2)}{2c \cdot 2c} = \frac{g(2c+g) \cdot g(2c-g)}{2c \cdot 2c}$$

$$= \frac{g^2}{4c^2}(2c + g)(2c - g)$$

und daher ist $\gamma = \frac{g}{2c}\sqrt{(2c + g)(2c - g)}$.

Aufgabe 670. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Normalen gegeben; es sollen hieraus die Seiten des Dreiecks gefunden werden.

Analysis. Es sey die zu der Grundlinie g gehörige Normale $= \alpha$ und die zu der Seite c gehörige $= \gamma$: so ist, weil in jedem Dreieck die Seiten mit den zugehörigen Normalen umgekehrt proportionirt sind, $g\alpha = c\gamma$ (14.); und es ist also $c = \frac{g\alpha}{\gamma}$.

Nun ist aber $c^2 = \frac{g^2}{4} + \alpha^2$

folglich ist auch $\frac{g^2\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{g^2}{4} + \alpha^2$

und daher $\frac{g^2\alpha^2}{\gamma^2} - \frac{g^2}{4} = \alpha^2$

also $\frac{4g^2\alpha^2 - g^2\gamma^2}{4\gamma^2} = \alpha^2$

Folglich ist $\frac{g^2(4\alpha^2 - \gamma^2)}{4\gamma^2} = \alpha^2$

und $\frac{g\sqrt{(4\alpha^2 - \gamma^2)}}{2\gamma} = \alpha$

daher ist $g = \frac{2\alpha\gamma}{\sqrt{(4\alpha^2 - \gamma^2)}}$

der Werth der Grundlinie; und hieraus findet man den der Seite $c = \frac{\alpha g}{\gamma} = \frac{2\alpha^2}{\sqrt{(4\alpha^2 - \gamma^2)}}$.

Aufgabe 671. Von einem Dreieck sind die drei Seiten a, b und c gegeben; man soll den durch die zu b gehörige Normale β bestimmten Abschnitt $= x$ der Seite b finden, der an a anliegt.

Auflösung. Es ist $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}$ nach Nr. 9. Seite 228 (vid. Aufg. 196. Seite 234.)

Aufgabe 672. Aus den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks soll die zu der Seite b gehörige Normale β berechnet werden.

Analysis. Der an a anliegende Abschnitt x der Seite b ist $= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}$ und $\beta^2 = a^2 - x^2$

Folglich ist auch $\beta^2 = (a + x)(a - x)$ (II. 5.) und daher, wenn man für x den Werth setzt

$$\beta^2 = \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}\right)\left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}\right).$$

Der erste dieser beiden Factoren, aus welchen β^2 besteht, ist $a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b} = \frac{2\,ab + a^2 + b^2 - c^2}{2\,b} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2\,b}$ (II. 4.), und weil $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$ so ist dieser Factor $= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2\,b}$.

Der zweite Factor von β^2 ist $= a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}$ $= \frac{2\,ab - a^2 - b^2 + c^2}{2\,b} = \frac{c^2 - (a^2 - 2\,ab + b^2)}{2\,b}$ $= \frac{c^2 - (a - b)^2}{2\,b}$ (II. 7.), und da $c^2 - (a - b)^2$ $= (c + a - b)(c - a + b)$, so ist dieser Factor $= \frac{(a + c - b)(b + c - a)}{2\,b}$.

Werden diese beiden Werthe in dem Ausdrucke für β^2 gesetzt, so erhält man

$$\beta^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2\,b} \cdot \frac{(a + c - b)(b + c - a)}{2\,b}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4\,b^2}$$

und hieraus erhält man endlich

$$\beta = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2\,b}.$$

Auflösung. Man ziehe von der Summe je zweier Seiten des Dreiecks die dritte ab, multiplicire die drei auf diese Weise erhaltenen Zahlen mit einander, und mit der Summe der drei Seiten; aus dem Produkte ziehe man die Quadratwurzel und theile dieselbe durch die zweifache Grundlinie des Dreiecks: so giebt der Quotient die Höhe desselben.

Beispiel. Die drei Seiten sind 28, 37 und 43; es soll die zu der Seite = 28 gehörige Normale gefunden werden.

28	28	37	28
37	43	43	37
65	71	80	43
43	37	28	108
22	34	52	

$$\text{Die Normale ist} = \frac{\sqrt{22 \,.\, 34 \,.\, 52 \,.\, 108}}{2 \,.\, 28} = 36{,}6.$$

Zusatz. Die für die Normale β erhaltene Formel läßt sich auf folgende Art noch auf eine etwas einfachere Form bringen:

Man bezeichne die Summe der drei Seiten eines Dreiecks mit 2 H, so daß also H die halbe Summe der drei Seiten wird, so ist

$$a + b + c = 2\,H$$

$$\text{also } a + b = 2\,H - c$$

$$\text{und } a + b - c = 2\,H - 2\,c = 2\,(H - c)$$

$$\text{und eben so } a + c - b = 2\,H - 2\,b = 2\,(H - b)$$

$$\text{und } b + c - a = 2\,H - 2\,a = 2\,(H - a).$$

Es ist also

$$\beta = \frac{\sqrt{2\,H \,.\, 2\,(H - c) \,.\, 2\,(H - b) \,.\, 2\,(H - a)}}{2\,b}$$

$$= \frac{\sqrt{16\,H\,(H - c)\,(H - b)\,(H - a)}}{2\,b}$$

$$= \frac{4\sqrt{H\,(H - c)\,(H - b)\,(H - a)}}{2\,b}$$

und dieses giebt endlich

$$\beta = \frac{2\sqrt{H\,(H - c)\,(H - b)\,(H - a)}}{b}.$$

Die Normale β wird also auch gefunden: wenn man die halbe Summe der drei Seiten nimmt, von derselben nach und nach die drei Seiten abzieht, die drei hierdurch erhaltenen Reste mit einander und mit der halben Summe der Seiten multiplicirt, und das Zweifache der Quadratwurzel aus diesem Produkte endlich durch die Grundlinie theilt.

Hiernach steht das obige Beispiel

28			
37			
43	54	54	54
108	28	37	43
$H = 54$	$H - b = 26$	$H - a = 17$	$H - c = 11$

daher ist $\beta = \frac{2\sqrt{54 \,.\, 26 \,.\, 17 \,.\, 11}}{28} = 36{,}6.$

Anmerkung. Die hier entwickelte Formel für die Höhe eines Dreiecks aus den drei Seiten desselben läßt sich auch geometrisch finden. Die verschiedenen Methoden, durch welche dieses möglich ist, findet man angegeben in einer Gelegenheitsschrift von J. J. J. Hoffmann: „Ueber die Berechnung der Dreiecksebenen aus ihren gegebenen drei Seiten". Aschaffenburg, 1813.

Aufgabe 673. Man kennt von einem Dreieck zwei Seiten und die zu einer dieser Seiten gehörige Normale; es soll die dritte Seite gefunden werden.

Analysis. Sind a und b die gegebenen Seiten, β die zu b gehörige Normale, und wird der an a anliegende Abschnitt von $b = x$, also der an c anliegende $= b - x$ gesetzt, so ist

$$c^2 = \beta^2 + (b - x)^2 = \beta^2 + b^2 + x^2 - 2\,bx$$

und $x^2 = a^2 - \beta^2$, also $x = \sqrt{(a^2 - \beta^2)}$.

Es ist also auch

$$c^2 = \beta^2 + b^2 + a^2 - \beta^2 - 2\,b\sqrt{(a^2 - \beta^2)}$$

und daher $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,b\sqrt{(a^2 - \beta^2)}$

folglich ist $c = \sqrt{[a^2 + b^2 - 2\,b\sqrt{(a^2 - \beta^2)}]}$.

Aufgabe 674. Aus zwei Seiten a und b eines Dreiecks, und der zu der dritten Seite gehörigen Normale γ, soll die dritte Seite gefunden werden.

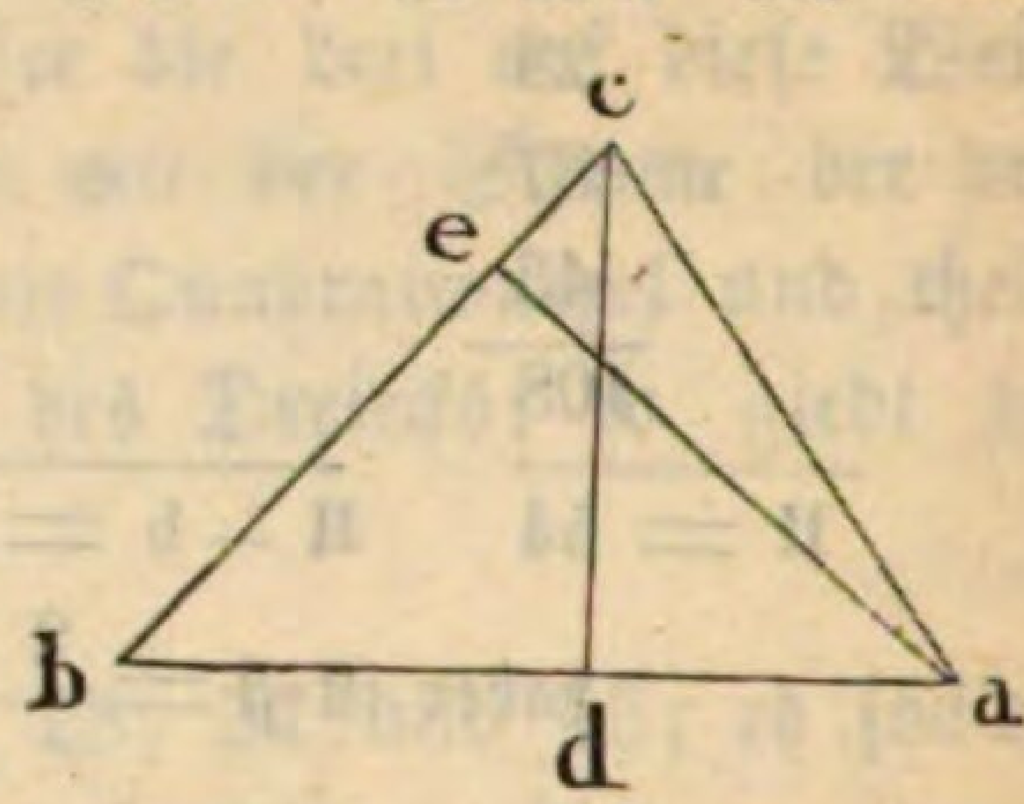
Auflösung. Es ist $c = \sqrt{(a^2 - \gamma^2)} \pm \sqrt{(b^2 - \gamma^2)}$. (Aufgabe 21. S. 121.)

Aufgabe 675. Man kennt von einem Dreieck die beiden Normalen α, β, und die zu der einen gehörige Seite a; es sollen die beiden übrigen Seiten gefunden werden.

Analysis. Es ist $b\beta = a\alpha$, und daher $b = \frac{a\alpha}{\beta}$; folglich kennt man a, b und β, und daher auch c. (Aufg. 674.)

Aufgabe 676. Von einem Dreieck ist eine Seite b gegeben, und die zu den beiden übrigen Seiten gehörigen Normalen α und γ; es sollen hieraus die Seiten a und c gefunden werden.

Analysis. Da man $ac = b$, $ae = \alpha$ und $cd = \gamma$ kennt, so sind ce und ad ebenfalls gegeben, und es ist für $ce = m$ und $ad = n$



$m = \sqrt{(b^2 - \alpha^2)}$ und $n = \sqrt{(b^2 - \gamma^2)}$

ferner ist nun $be = a - m$ und $bd = c - n$

und da $\Delta aeb \sim \Delta cdb$, so ist

$$be : ea = bd : dc$$

$$\text{also } a - m : \alpha = c - n : \gamma$$

$$\text{Folglich ist } a - m = \frac{\alpha\,(c - n)}{\gamma}.$$

Es ist aber auch $a\alpha = c\gamma$, also $a = \frac{c\gamma}{\alpha}$

$$\text{also ist } \frac{c\gamma}{\alpha} - m = \frac{\alpha\,(c - n)}{\gamma}$$

$$\text{und } c\gamma^2 - \alpha\gamma m = \alpha^2 c - \alpha^2 n$$

$$\text{und daher } (\gamma^2 - \alpha^2)\,c = \alpha\,(\gamma m - \alpha n)$$

$$\text{folglich ist } c = \frac{\alpha\,(\gamma m - \alpha n)}{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

Aufgabe 677. Aus den drei Seiten eines Dreiecks soll der Radius r des Kreises berechnet werden, der in dieses Dreieck eingezeichnet werden kann.

Analysis. Es ist $(a + b + c)\,r = a\alpha = b\beta = c\gamma$ (Aufg. 392. S. 396) und $b\beta =$
$\frac{1}{2}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$ (Aufg. 672.); folglich ist auch
$2\,(a + b + c)\,r =$
$\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$
und daher ist
$4\,(a + b + c)^2\,r^2$
$= (a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$

$$\text{also } 4\,r^2 = \frac{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{a + b + c}$$

und es ist daher

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{a + b + c}\right)}.$$

Aufgabe 678. Von einem Dreieck sind zwei Seiten a, c gegeben, und die zu der dritten Seite gehörige Normale β; man

soll hieraus den Radius des Kreises finden, der um dieses Dreieck sich beschreiben läßt.

Auflösung. Es ist $2\,\mathbf{R} : a = c : \beta$

$$\text{und daher } \mathbf{R} = \frac{ac}{2\beta}.$$

Aufgabe 679. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse h gegeben, und die Summe beider Katheten $= s$; man soll hieraus die Katheten berechnen.

Analysis. Sind a und b die gesuchten Katheten, so ist

$$s = a + b$$

$$\text{also } s^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 \quad \text{(II. 4.)}$$
$$\text{und } 2\,h^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2 \quad \text{(I. 47.)}$$

$$\text{Daher ist } 2\,h^2 - s^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$

$$\text{oder } 2\,h^2 - s^2 = (a - b)^2$$

$$\text{folglich ist } \sqrt{(2\,h^2 - s^2)} = a - b$$
$$\text{und da } s = a + b$$

$$\text{so ist } \frac{s + \sqrt{(2\,h^2 - s^2}}{2} = a.$$

Aufgabe 689. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks $= h$ und die Differenz beider Katheten $= d$ ist gegeben; es sollen diese hieraus berechnet werden.

Auflösung. Durch ein gleiches Verfahren, wie bei der vorigen Aufgabe, findet man

$$\frac{d + \sqrt{(2\,h^2 - d^2)}}{2} = a.$$

Aufgabe 681. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $= q^2$ ist gegeben, und die Hypotenuse h; man soll die Katheten finden.

Analysis. Sind a und b die Katheten, so ist bekanntlich $\frac{ab}{2} = q^2$, also $ab = 2\,q^2$.

$$\text{Nun ist } a^2 + b^2 = h^2$$
$$\text{und } 2\,ab = 4\,q^2$$

$$\text{also } a^2 + 2\,ab + b^2 = h^2 + 4\,q^2$$
$$\text{und } a^2 - 2\,ab + b^2 = h^2 - 4\,q^2$$

$$\text{folglich ist } a + b = \sqrt{(h^2 + 4\,q^2)}$$
$$\text{und } a - b = \sqrt{(h^2 - 4\,q^2)}$$

Und hieraus folgt durch Addition und Subtraction

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 + 4q^2)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 - 4q^2)}$$

und $$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 + 4q^2)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(h^2 - 4q^2)}.$$

Aufgabe 682. Man kennt die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $= q^2$ und die Summe beider Katheten $= s$; es soll die Hypotenuse h gefunden werden.

Analysis. Da $a + b = s$

so ist $a^2 + 2ab + b^2 = s^2$

und $2ab = 4q^2$

folglich ist $a^2 + b^2 = s^2 - 4q^2$

also $h^2 = s^2 - 4q^2$

und daher $h = \sqrt{(s^2 - 4q^2)}$

Aufgabe 683. Aus der gegebenen Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks und der Summe beider Katheten sollen diese berechnet werden.

Aufgabe 684. Man soll aus der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks und der Differenz beider Katheten die Hypotenuse finden.

Aufgabe 685. Aus der gegebenen Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks und der Differenz beider Katheten sollen diese berechnet werden.

Aufgabe 686. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse h gegeben und die zu derselben gehörige Normale p; man soll die Katheten finden.

Analysis. Wenn a und b die gesuchten Katheten sind, so ist $ab = hp$. Nun ist

$$a^2 + b^2 = h^2$$
$$2ab = 2hp$$

also $a^2 \pm 2ab + b^2 = h^2 \pm 2hp$

Daher ist $a + b = \sqrt{h(h + 2p)}$

und $a - b = \sqrt{h(h - 2p)}$

folglich $a = \tfrac{1}{2}\sqrt{h(h + 2p)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{h(h - 2p)}$

und $b = \tfrac{1}{2}\sqrt{h(h + 2p)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{h(h - 2p)}$.

Aufgabe 687. Aus der Summe s beider Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und der zu der Hypotenuse h gehörigen Normale p soll die Hypotenuse berechnet werden.

Analysis. Es ist $h^2 = a^2 + b^2$

$$2ph = 2ab$$

also $h^2 + 2ph = a^2 + 2ab + b^2$

$$= (a + b)^2$$

und $h^2 + 2ph = s^2$

$$p^2 = p^2$$

daher $h^2 + 2ph + p^2 = s^2 + p^2$

oder $(h + p)^2 = s^2 + p^2$

und $h + p = \sqrt{(s^2 + p^2)}$

folglich ist $h = - p + \sqrt{(s^2 + p^2)}$.

Aufgabe 688. Aus der Differenz beider Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $= d$ und der zu der Hypotenuse gehörigen Normale p soll die Hypotenuse gefunden werden.

Aufgabe 689. Von einem Dreieck kennt man die Summe je zweier Seiten; es sollen die Seiten hieraus berechnet werden.

Analysis. Setzt man die gegebenen Größen

$$a + b = C$$
$$a + c = B$$
$$b + c = A$$

so ist $2a + b + c = B + C$

und $b + c = A$

also $2a = B + C - A$

daher $a = \frac{B + C - A}{2}$

Aufgabe 690. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete $h + a = B$, und die Summe der Hypotenuse und der anderen Kathete $h + b = A$; es sollen die Seiten des Dreiecks gefunden werden.

Analysis. Da $h + a = B$ und $h + b = A$

so ist $a = B - h$ und $b = A - h$.

Da nun $a^2 + b^2 = h^2$

so ist auch $(B - h)^2 + (A - h)^2 = h^2$

und da $(B - h)^2 = B^2 - 2Bh + h^2$

und $(A - h)^2 = A^2 - 2Ah + h^2$

so ist $A^2 + B^2 - 2(A + B)h + 2h^2 = h^2$

Hierzu $2AB = 2AB$

giebt $(A + B)^2 - 2(A + B)h + 2h^2 = h^2 + 2AB$

$$\text{und } (A + B)^2 - 2(A + B)h + h^2 = 2AB$$

$$\text{also } (A + B - h)^2 = 2AB.$$

Folglich ist $A + B - h = \sqrt{2AB}$
und hieraus folgt $h = A + B - \sqrt{2AB}$
und da $a = B - h$ und $b = A - h$
so sind durch den gefundenen Werth von h auch die Werthe von a und b bestimmt.

Beispiel. Die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete $= 32$, und die Summe derselben und der andern Kathete $= 25$.

Für $A = 32$ und $B = 25$ ist
$h = 32 + 25 - \sqrt{2 \cdot 32 \cdot 25} = 57 - \sqrt{1600}$
$= 57 - 40 = 17;$
und daher ist nun $a = B - h = 25 - 17 = 8$
und $b = A - h = 32 - 17 = 15.$

Aufgabe 691. Es ist von einem rechtwinkligen Dreieck gegeben die Differenz der Hypotenuse und der einen Kathete, und die Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete; es sollen die Seiten des Dreiecks berechnet werden.

Aufgabe 692. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks $= T$ ist gegeben, und die Fläche $= q^2$; man soll hieraus die Seiten berechnen.

Analysis. Es ist $a + b + h = T$
also $a + b = T - h$
und daher $(a + b)^2 = (T - h)^2$
also $a^2 + b^2 + 2ab = T^2 - 2Th + h^2$
und da $a^2 + b^2 = h^2$

$$2ab = T^2 - 2Th$$

Und weil $2ab = 4q^2$, so ist
$4q^2 = T^2 - 2Th$
und daher $2Th = T^2 - 4q^2$
folglich ist $h = \dfrac{T^2 - 4q^2}{2T}$
und hierdurch sind nun die Katheten a und b ebenfalls bestimmt.

Aufgabe 693. Die drei Seiten eines Dreiecks sind α, β, γ; und von einem andern Dreieck sind zwei Seiten a und b gegeben, und es ist der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel dem Winkel gleich, welcher in dem ersten Dreieck von α und β eingeschlossen wird; man soll die dritte Seite c des zweiten Dreiecks finden.

Analysis. Wird in dem ersten Dreieck die zu β gehörige Normale gezogen, welche $= p$ seyn soll, und in dem zweiten Dreieck die zu b gehörige $= y$, so ist

$$\alpha : p = a : y, \text{ also } y = \frac{a\,p}{\alpha}.$$

$$\text{Nun ist } p = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)}}{2\beta}$$

(Aufg. 672.); es ist also p gegeben, folglich auch y, und daher sind von dem zweiten Dreieck zwei Seiten a und b gegeben, und die zu der zweiten Seite gehörige Normale y, wodurch der Werth der dritten Seite c bestimmt ist (Aufg. 673.).

Aufgabe 694. Die Differenz der Diagonale und Seite eines Quadrats $= d$ ist gegeben; es soll hieraus die Seite desselben gefunden werden.

Analysis. Wird die Seite $= x$ gesetzt, so ist die Diagonale $= x + d$; und es ist daher

$$x^2 + x^2 = (x + d)^2$$

$$2x^2 = x^2 + 2xd + d^2$$

$$\text{also } x^2 - 2xd = d^2$$

$$\text{Hierzu } \quad d^2 = d^2$$

$$\text{giebt } x^2 - 2xd + d^2 = 2d^2$$

$$\text{folglich ist } x - d = d\sqrt{2}$$

$$\text{und } x = d + d\sqrt{2} = d(1 + \sqrt{2}).$$

Aufgabe 695. Die Summe der Seite und der Diagonale eines Quadrats $= S$ ist gegeben; man soll hieraus die Seite berechnen.

Auflösung. Es ist die Seite $x = S(-1 + \sqrt{2})$.

Aufgabe 696. Von einem Dreieck ist die Grundlinie $= g$ und die Höhe $= h$ gegeben; es soll hieraus die Seite x des Quadrats gefunden werden, das in dieses Dreieck beschrieben werden kann.

Analysis. Es ist, wie bei Aufg. 521. die eine Seite x des Quadrats der g parallel in einem Abstande $= x$ von derselben, und ihr Abstand von der Spitze des Dreiecks ist daher $= h - x$.

$$\text{Hiernach ist } h - x : x = h : g$$

$$\text{also } h : x = h + g : g$$

$$\text{und daher } x = \frac{hg}{h + g}.$$

Aufgabe 697. Von einem Dreieck ist die Grundlinie gegeben $= g$, und das Verhältniß der beiden übrigen Seiten $= m : n$; es soll hieraus der Radius des Kreises berechnet werden, in dessen Umfang die Spitze dieses Dreiecks liegen muß.

Analysis. Nach Aufgabe 588. Seite 578 ist für $ab = g$ und $ac : cb = m : n$, der Durchmesser $d\delta$ des gesuchten Kreises dadurch bestimmt, daß

$$ad : db = m : n$$

$$\text{und } a\delta : \delta b = m : n$$

Aus der ersten dieser beiden Proportionen folgt durch Verbindung $ab : db = m + n : n$

und aus der zweiten durch Trennung

$$ab : \delta b = m - n : n.$$

Da nun ist $ab = g$, so folgt

$$db = \frac{ng}{m + n}$$

$$\text{und } \delta b = \frac{ng}{m - n}$$

Folglich ist $db + \delta b = \frac{ng}{m + n} + \frac{ng}{m - n}$.

Es ist aber $db + \delta b = d\delta = 2x$ der Durchmesser des gesuchten Kreises; derselbe ist also

$$2x = \frac{ng(m - n) + ng(m + n)}{(m + n)(m - n)}$$

$$= \frac{2mng}{m^2 - n^2}$$

und folglich ist $x = \frac{mng}{m^2 - n^2}$.

Aufgabe 698. Von einem Dreieck ist der Umfang gegeben $= T$, und das Verhältniß der drei Seiten $a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$; es sollen hieraus die Seiten des Dreiecks gefunden werden.

Analysis. Da $a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$;
so ist $(a + b + c) : (\alpha + \beta + \gamma) = a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$ (V. 12.).

Da nun seyn soll $a + b + c = T$, so ist auch

$$T : (\alpha + \beta + \gamma) = a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$$

und es ist daher

$$a = \frac{\alpha T}{\alpha + \beta + \gamma};\ b = \frac{\beta T}{\alpha + \beta + \gamma};\ c = \frac{\gamma T}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Aufgabe 699. Von einem Dreieck sind die Abschnitte m und n gegeben, in welche die Grundlinie c durch die zu derselben gehörige Normale getheilt wird, und die Summe der beiden übrigen Seiten; man soll diese hieraus berechnen.

Analysis. Setzt man die an dem Abschnitte m anliegende unbekannte Seite $= x$, so ist die an n anliegende $= S - x$; und wird nun die zu c gehörige Normale mit γ bezeichnet, so ist

$$\gamma^2 = x^2 - m^2$$

$$\text{und auch } \gamma^2 = (S - x)^2 - n^2$$

$$\text{Folglich ist } x^2 - m^2 = (S - x)^2 - n^2$$

$$\text{also } x^2 - m^2 = S^2 - 2Sx + x^2 - n^2$$

$$\text{und daher ist } 2Sx = S^2 + m^2 - n^2$$

$$\text{also } x = \frac{S^2 + m^2 - n^2}{2S}.$$

Aufgabe 700. Von einem Dreieck sind die Abschnitte m und n der Grundlinie c gegeben, und die Differenz D der beiden übrigen Seiten; es sollen diese hieraus berechnet werden.

Auflösung. Es ist für $m < n$ die an m anliegende Seite $x = \dfrac{n^2 - m_2 - D^2}{2D}$.

Aufgabe 701. Die Abschnitte m und n der Grundlinie c eines Dreiecks sind gegeben, und das Verhältniß der beiden übrigen Seiten $= \alpha : \beta$; es sollen die Seiten hieraus gefunden werden.

Analysis. Werden die beiden unbekannten Seiten mit x und y bezeichnet: so ist

$$x : y = \alpha : \beta, \text{ also } y = \frac{\beta x}{\alpha}.$$

Und ist nun x die an dem Abschnitte m anliegende Seite, so hat man, wenn γ die zu c gehörige Normale ist,

$$\gamma^2 = x^2 - m^2$$

$$\text{und } \gamma^2 = y^2 - n^2 = \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} - n^2$$

$$\text{folglich ist auch } x^2 - m^2 = \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} - n^2$$

$$\text{also } x^2 - \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} = m^2 - n^2$$

$$\text{und } \alpha^2 x^2 - \beta^2 x^2 = \alpha^2 (m^2 - n^2)$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) x^2 = \alpha^2 (m^2 - n^2)$$

und dieses giebt

$$x^2 = \frac{\alpha^2 (m^2 - n^2)}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\alpha^2 (m + n) (m - n)}{(\alpha + \beta) (\alpha - \beta)}$$

und hieraus folgt endlich

$$x = \alpha \sqrt{\frac{(m + n) (m - n)}{(\alpha + \beta) (\alpha - \beta}}$$

und die zweite Seite ist

$$y = \beta \sqrt{\frac{(m + n) (m - n)}{(\alpha + \beta) (\alpha - \beta)}}.$$

Zweiter Abschnitt.

Das Berechnen der Flächen.

Ist die Seite eines Quadrats $= q$, die Fläche desselben $= Q^2$, und sind die Seiten eines Rechtecks a und b, und wird die Fläche dieses Rechtecks mit P^2 bezeichnet: so ist, da beide Figuren Parallelogramme sind, welche den rechten Winkel gleich haben,

$$Q^2 : P^2 = q \times q : a \times b \quad \text{(VI. 23.)}$$

also $Q^2 : P^2 = q^2 : ab$.

Da nun $Q^2 = q^2$, so ist auch $P^2 = ab$.

Die Fläche eines Rechtecks wird also, wenn die Seiten desselben in Zahlen gegeben sind, durch das Produkt dieser Zahlen ausgedrückt, und dieses giebt die bereits Seite 199 aufgestellte Regel: **Die Fläche eines Rechtecks wird erhalten, wenn man die Seiten desselben mit einander multiplicirt.**

Ist die Seite q des Quadrats die Einheit des Maaßes, wornach a und b gemessen sind, so wird $q \times q = 1 \times 1 = 1$; und es ist daher

$$Q^2 : P^2 = 1 : ab$$

---

folglich ist $P^2 = ab \times Q^2$

und es ist hier nun Q^2 die Flächeneinheit. Halten also die Seiten eines Rechtecks a und b Längeneinheiten, so besteht die Fläche aus $a \times b$ Quadraten, deren Seite die Längeneinheit ist. Sind z. B. die Seiten eines Rechtecks 28 und 18 Fuß, so ist die Fläche desselben $= 28 \times 18 = 504$ Quadratfuß.

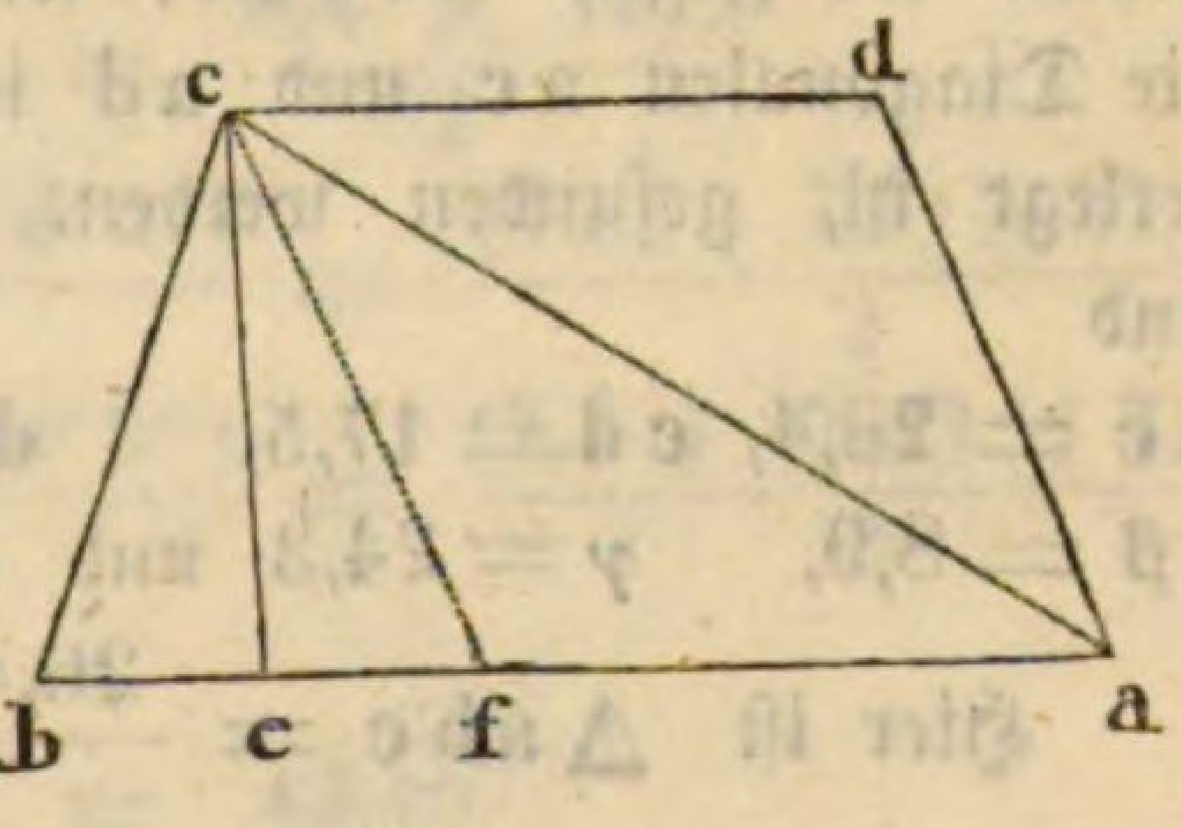
Diese Regel, nach welcher die Fläche eines Rechtecks berechnet wird, ist die Grundregel für die Berechnung aller Flächen.

Ist die Grundlinie eines Dreiecks = g und die Höhe desselben = h, so ist die Fläche desselben die Hälfte eines Rechtecks, dessen Seiten g und h sind (I. 41.). Da nun die Fläche dieses Rechtecks = gh, so ist die des Dreiecks = $\frac{gh}{2}$. Die Fläche eines Dreiecks wird also gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt, und von dem Produkte die Hälfte nimmt.

Nun läßt jede geradlinige Figur durch Diagonalen in Dreiecke sich zerlegen; folglich kann auch die Fläche einer jeden geradlinigen Figur mit Hülfe dieser Regel gefunden werden, wenn man dieselbe in Dreiecke zerlegt und jedes dieser Dreiecke besonders berechnet.

Da ferner jedes Parallelogramm aus zwei gleichen Dreiecken besteht, so folgt: daß die Fläche eines Parallelogramms zwei Mal so groß als die eines dieser Dreiecke seyn muß. Nimmt man aber die eine Seite des Parallelogramms als Grundlinie eines Dreiecks an, so ist der Abstand dieser Seite von ihrer Parallele die Höhe des Dreiecks, und es ist dieses auch zugleich die Höhe des Parallelogramms. Die Fläche eines Parallelogramms wird also gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt.

Für das Paralleltrapez, also für ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel sind, wie bei abcd, erhält man die Regel, durch welche dasselbe gefunden wird (und von welcher bereits in §. 35. Gebrauch gemacht worden ist) auf folgende Art: Zieht man die Diagonale ac, so wird dasselbe in zwei Dreiecke zerlegt, von welchen die parallelen Seiten ab und cd die Grundlinien sind; und die eine gemeinschaftliche Höhe ce haben, welche dem Abstande der beiden parallelen Seiten von einander gleich ist. Wird diese Höhe mit h bezeichnet, und setzt man die Grundlinie ab des einen Dreiecks abc = a und die des andern Dreiecks adc, also cd = b: so ist



$$\Delta abc = \frac{ah}{2}$$

und $\Delta adc = \frac{bh}{2}$

---

also $\Delta abc + \Delta adc = \frac{ah + bh}{2}$

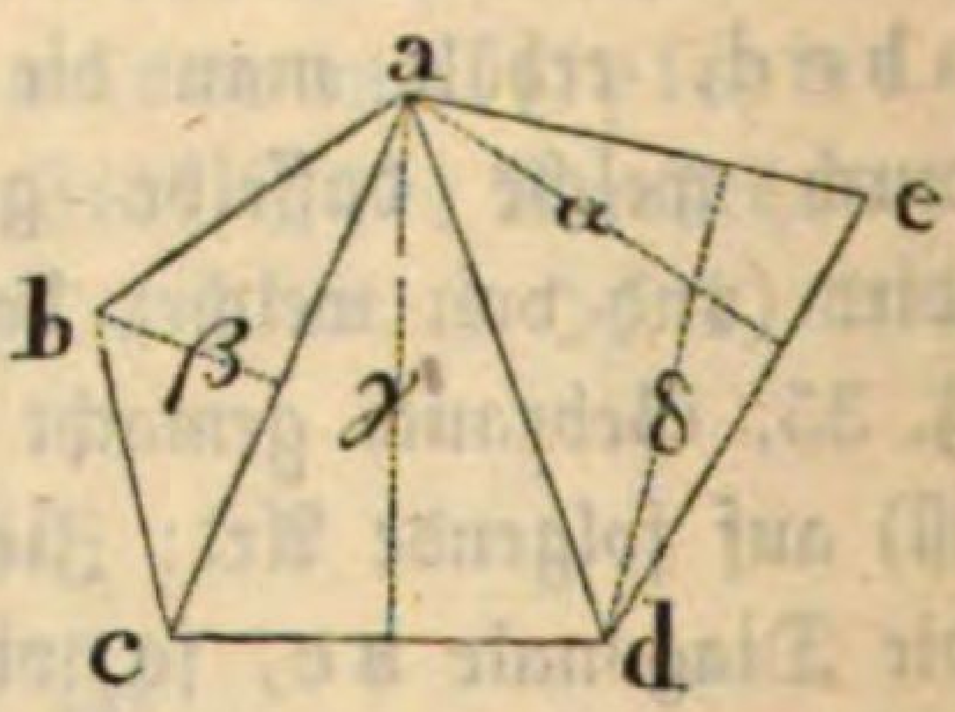
und es ist sonach die Fläche des Paralleltrapezes

$$abcd = \frac{(a + b)\,h}{2}.$$

Die Fläche eines Paralleltrapezes wird also erhalten, wenn man die parallelen Seiten a und b addirt, die Summe mit ihrem Abstande von einander = h multiplicirt und von dem Produkte die Hälfte nimmt.

Treffen in einem besondern Falle die parallelen Seiten eines Paralleltrapezes eine der beiden übrigen Seiten unter einem rechten Winkel, so ist diese Seite selbst = h.

Wird durch eine geradlinige Figur eine gerade Linie gezogen, und fället man von allen Ecken Normalen auf diese Linie, so wird die ganze Figur dadurch in Paralleltrapeze und rechtwinklige Dreiecke zerlegt; und da in diesen Trapezen die eine Seite unter einem rechten Winkel von den parallelen Seiten getroffen wird, so gehören sie zu der zuletzt angeführten Gattung, und es läßt sich nun durch eine ganz einfache Rechnung die Fläche der Figur ermitteln.



Beispiele 1. Es soll der Flächeninhalt der Figur **abcde**, welche durch die Diagonalen **ac** und **ad** in Dreiecke zerlegt ist, gefunden werden. Gegeben sind

$ac = 26{,}4$, $cd = 17{,}5$, $de = 23{,}3$
$\beta = 8{,}9$, $\gamma = 24{,}3$ und $\alpha = 19{,}5$

Hier ist $\Delta abc = \frac{26{,}4 \times 8{,}9}{2} = 117{,}48$

$$\Delta cad = \frac{17{,}5 \times 24{,}3}{2} = 212{,}625$$

und $\Delta dae = \frac{23{,}3 \times 19{,}5}{2} = 227{,}175$

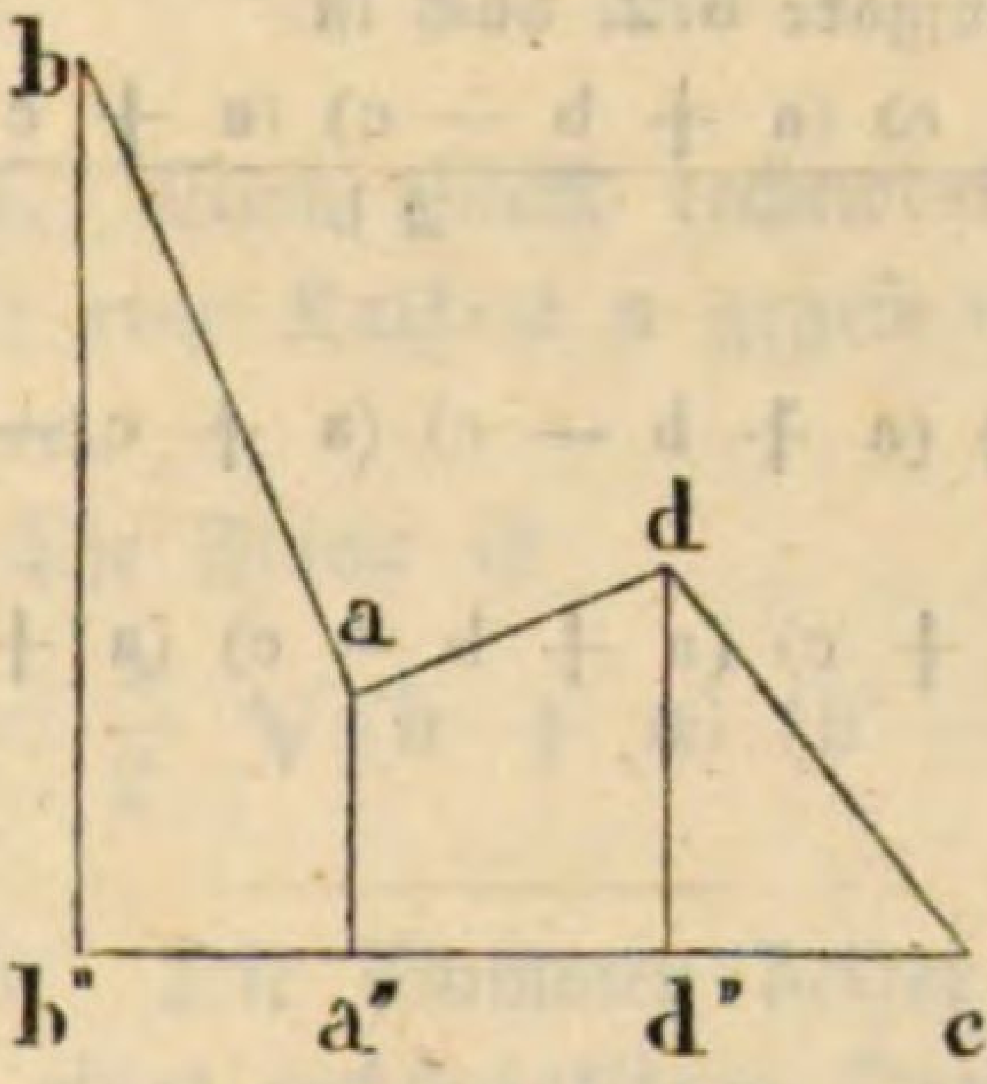
Summe 557,28.

Ist also die Einheit des Maaßes, nach welchem die Linien gemessen sind, die Ruthe von 10 Fuß, so daß hiernach z. B. **ac** $= 26{,}4 = 26$ Ruthen, 4 Fuß, so ist die Fläche der ganzen Figur **abcde** $= 557{,}28 = 557\frac{28}{100}$ Ruthen; oder weil, wenn die Ruthe 10 Fuß hält, die Quadratruthe aus $10^2 = 100$ Quadratfuß besteht, so ist die Fläche der Figur $= 557$ Quadratruthen, 28 Quadratfuß.

2. Die Fläche der Figur, **cdabb''**, in welcher bei **b''** ein rechter Winkel ist, soll berechnet werden. Es ist diese Figur durch die Normalen **dd''** und **aa''** auf **cb''** in ein rechtwinkliges Dreieck **cdd''** und zwei rechtwinklige Paralleltrapeze **add''a''** und **abb''a''** zerlegt. Gegeben ist

$$cd'' = 8{,}4,\ ca'' = 19{,}6,\ cb'' = 26{,}8$$
$$d''d = 10{,}5,\ a''a = 7{,}3,\ b''c = 28{,}1.$$

Da $ca'' = 19{,}6$	$cb'' = 26{,}8$
und $cd'' = 8{,}4$	$ca'' = 19{,}6$
so ist $d''a'' = 11{,}2$	$a''b'' = 7{,}2.$



Daher ist nun

$$\Delta cdd'' = \frac{cd'' \times d''d}{2} = \frac{8{,}4 \times 10{,}5}{2}$$

$$\text{Trapez } add''a'' = \frac{(d''d + a''a).(d''a'')}{2} = \frac{(10{,}5 + 7{,}3) \times 11{,}2}{2}$$

$$\text{„}\ abb''a'' = \frac{(a''a + b''b).(a''b'')}{2} = \frac{(7{,}3 + 28{,}1) \times 7{,}2}{2}$$

und es ist daher

$$\Delta cdd'' = \frac{8{,}4 \times 10{,}5}{2} = 44{,}10$$

$$\text{Trapez } add''a = \frac{17{,}8 \times 11{,}2}{2} = 99{,}68$$

$$\text{„}\ abb''a'' = \frac{35{,}4 \times 7{,}2}{2} = 127{,}44$$

die ganze Fläche ist also $= 271{,}22.$

§. 38.

Aufgaben von der Berechnung der Flächen.

Aufgabe 702. Der Flächeninhalt eines Dreiecks soll aus den drei Seiten desselben berechnet werden.

Analysis. Nach Aufg. 672. ist, wenn H die halbe Summe der drei Seiten bedeutet, die Normale

$$\beta = \frac{2\sqrt{H(H-a)(H-b)(H-c)}}{b}$$

und hieraus folgt

$$\frac{b\beta}{2} = \sqrt{H(H-a)(H-b)(H-c)}.$$

Nun ist aber $\frac{b\beta}{2}$ die Fläche des Dreiecks, welche $= q^2$ seyn mag. Es ist also

$$q^2 = \sqrt{H(H-a)(H-b)(H-c)}.$$

Zusatz. Da nach Aufgabe 672. auch ist

$$\beta = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2b}$$

so wird $2b\beta = 4q^2$

$$= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

und es ist daher auch

$$q^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Aufgabe 703. Die beiden Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks sind c und g, so daß g die Grundlinie bedeutet; es soll hieraus die Fläche dieses Dreiecks $= q^2$ gefunden werden.

Analysis. Allgemein ist

$$q^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

und es wird hieraus die Fläche für das gleichschenklige Dreieck erhalten, wenn man setzt $b = c$ und $a = g$.

Hierdurch erhält man

$$q^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(g+2c) \cdot g \cdot g \cdot (2c-g)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{g^2(2c+g)(2c-g)}$$

$$= \frac{g}{4}\sqrt{(2c+g)(2c-g)} = \frac{g}{4}\sqrt{(4c^2-g^2)}.$$

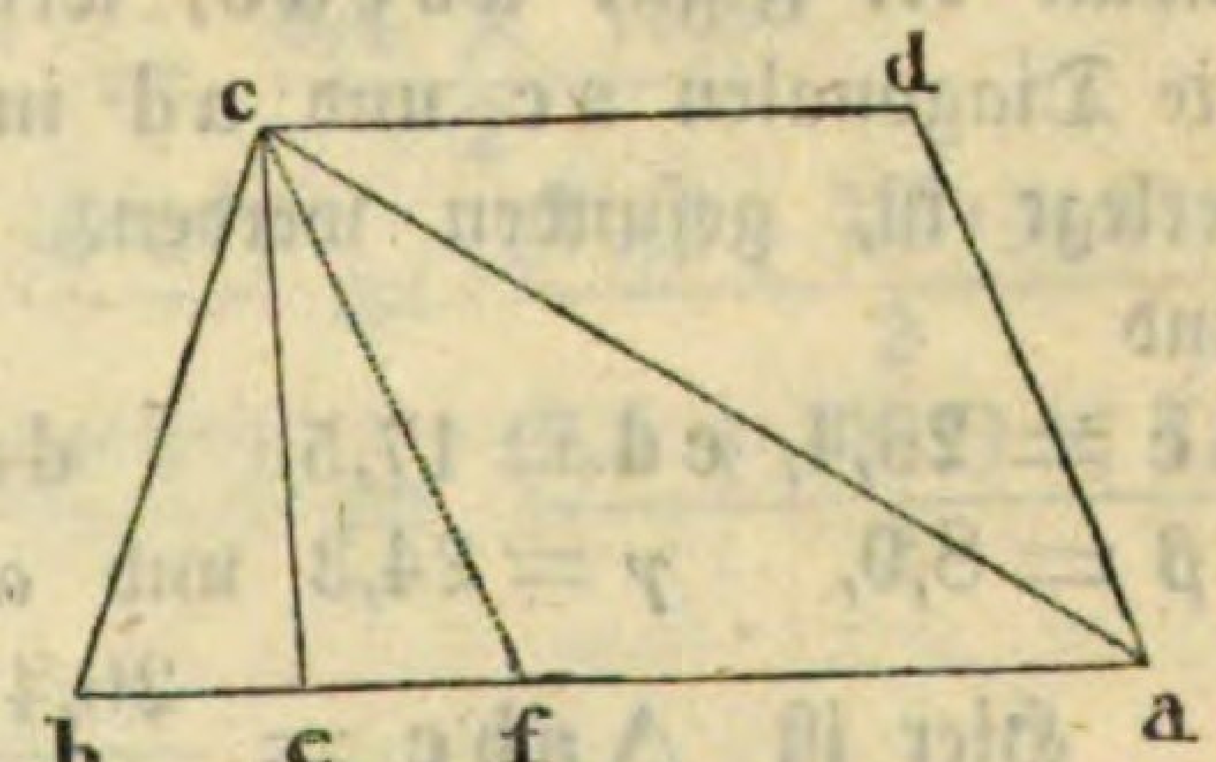
Aufgabe 704. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist $= a$; es soll hieraus die Fläche q^2 desselben gefunden werden.

Ist die Grundlinie eines Dreiecks $= g$ und die Höhe desselben $= h$, so ist die Fläche desselben die Hälfte eines Rechtecks, dessen Seiten g und h sind (I. 41.). Da nun die Fläche dieses Rechtecks $= gh$, so ist die des Dreiecks $= \frac{gh}{2}$. Die Fläche eines Dreiecks wird also gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt, und von dem Produkte die Hälfte nimmt.

Nun läßt jede geradlinige Figur durch Diagonalen in Dreiecke sich zerlegen; folglich kann auch die Fläche einer jeden geradlinigen Figur mit Hülfe dieser Regel gefunden werden, wenn man dieselbe in Dreiecke zerlegt und jedes dieser Dreiecke besonders berechnet.

Da ferner jedes Parallelogramm aus zwei gleichen Dreiecken besteht, so folgt: daß die Fläche eines Parallelogramms zwei Mal so groß als die eines dieser Dreiecke seyn muß. Nimmt man aber die eine Seite des Parallelogramms als Grundlinie eines Dreiecks an, so ist der Abstand dieser Seite von ihrer Parallele die Höhe des Dreiecks, und es ist dieses auch zugleich die Höhe des Parallelogramms. Die Fläche eines Parallelogramms wird also gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt.

Für das Paralleltrapez, also für ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel sind, wie bei abcd, erhält man die Regel, durch welche dasselbe gefunden wird (und von welcher bereits in §. 35. Gebrauch gemacht worden ist) auf folgende Art: Zieht man die Diagonale ac, so wird dasselbe in zwei Dreiecke zerlegt, von welchen die parallelen Seiten ab und cd die Grundlinien sind; und die eine gemeinschaftliche Höhe ce haben, welche dem Abstande der beiden parallelen Seiten von einander gleich ist. Wird diese Höhe mit h bezeichnet, und setzt man die Grundlinie ab des einen Dreiecks abc $= a$ und die des andern Dreiecks adc, also $cd = b$: so ist



$$\Delta abc = \frac{ah}{2}$$

$$\text{und } \Delta adc = \frac{bh}{2}$$

$$\text{also } \Delta abc + \Delta adc = \frac{ah + bh}{2}$$

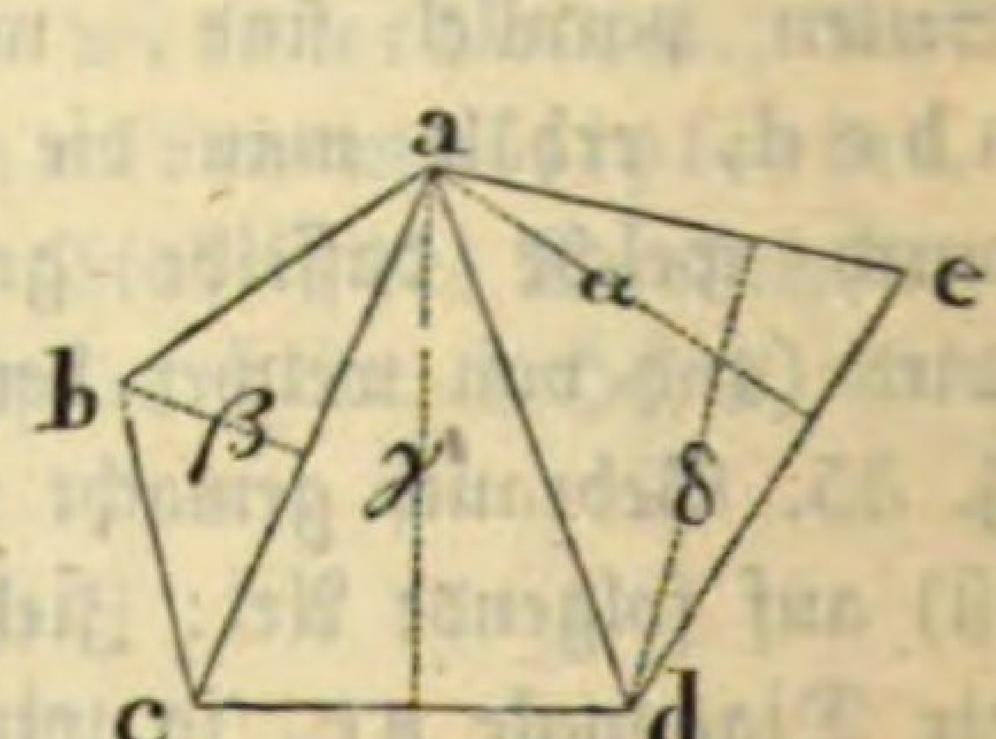
und es ist sonach die Fläche des Paralleltrapezes

$$abcd = \frac{(a + b)\, h}{2}.$$

Die Fläche eines Paralleltrapezes wird also erhalten, wenn man die parallelen Seiten a und b addirt, die Summe mit ihrem Abstande von einander = h multiplicirt und von dem Produkte die Hälfte nimmt.

Treffen in einem besondern Falle die parallelen Seiten eines Paralleltrapezes eine der beiden übrigen Seiten unter einem rechten Winkel, so ist diese Seite selbst = h.

Wird durch eine geradlinige Figur eine gerade Linie gezogen, und fället man von allen Ecken Normalen auf diese Linie, so wird die ganze Figur dadurch in Paralleltrapeze und rechtwinklige Dreiecke zerlegt; und da in diesen Trapezen die eine Seite unter einem rechten Winkel von den parallelen Seiten getroffen wird, so gehören sie zu der zuletzt angeführten Gattung, und es läßt sich nun durch eine ganz einfache Rechnung die Fläche der Figur ermitteln.



Beispiele 1. Es soll der Flächeninhalt der Figur abcde, welche durch die Diagonalen ac und ad in Dreiecke zerlegt ist, gefunden werden. Gegeben sind

$ac = 26{,}4$, $cd = 17{,}5$, $de = 23{,}3$
$\beta = 8{,}9$, $\gamma = 24{,}3$ und $\alpha = 19{,}5$

$$\text{Hier ist } \Delta abc = \frac{26{,}4 \times 8{,}9}{2} = 117{,}48$$

$$\Delta cad = \frac{17{,}5 \times 24{,}3}{2} = 212{,}625$$

$$\text{und } \Delta dae = \frac{23{,}3 \times 19{,}5}{2} = 227{,}175$$

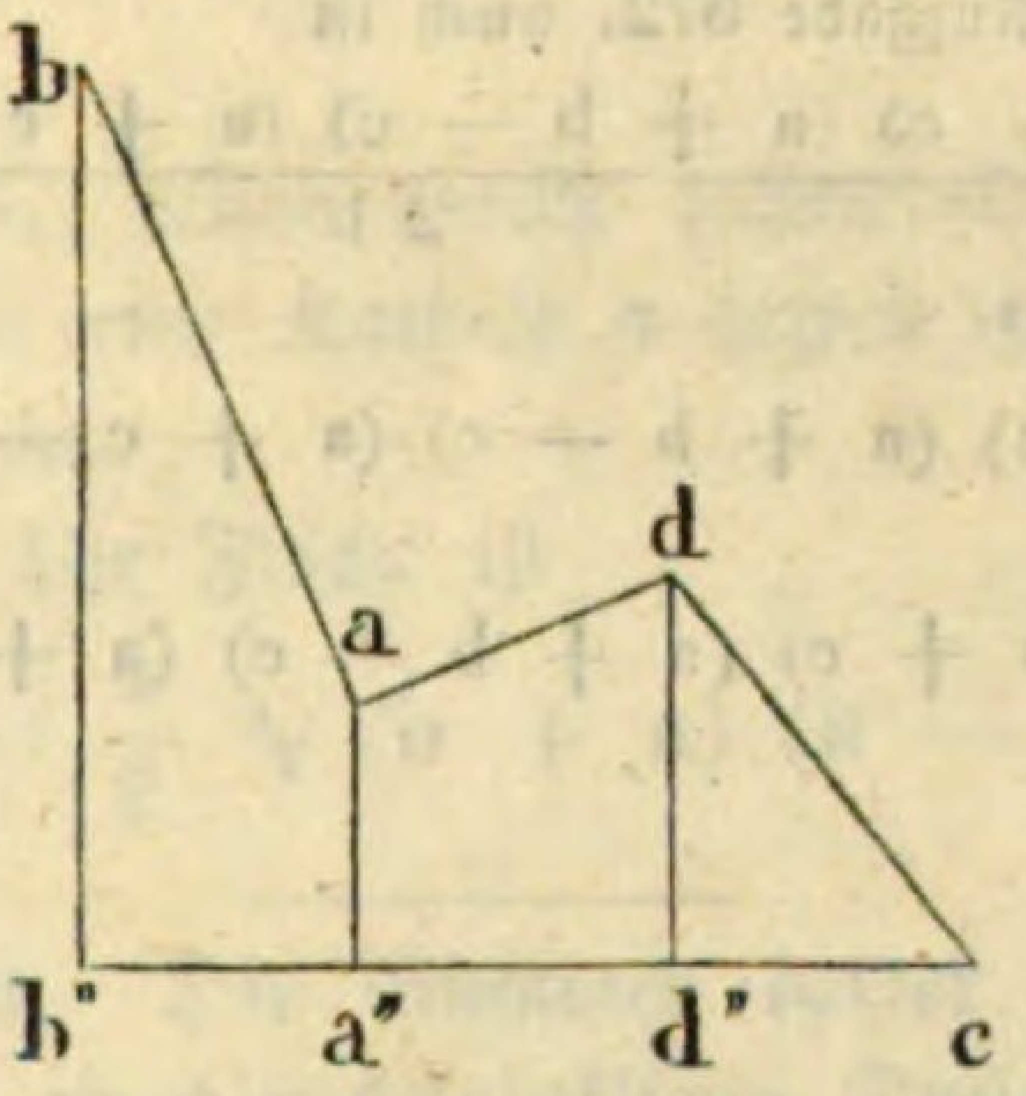
Summe 557,28.

Ist also die Einheit des Maaßes, nach welchem die Linien gemessen sind, die Ruthe von 10 Fuß, so daß hiernach z. B. $ac = 26{,}4 = 26$ Ruthen, 4 Fuß, so ist die Fläche der ganzen Figur $abcde = 557{,}28 = 557\frac{28}{100}$ Ruthen; oder weil, wenn die Ruthe 10 Fuß hält, die Quadratruthe aus $10^2 = 100$ Quadratfuß besteht, so ist die Fläche der Figur = 557 Quadratruthen, 28 Quadratfuß.

2. Die Fläche der Figur, $cdabb''$, in welcher bei b'' ein rechter Winkel ist, soll berechnet werden. Es ist diese Figur durch die Normalen dd'' und aa'' auf cb'' in ein rechtwinkliges Dreieck cdd'' und zwei rechtwinklige Paralleltrapeze $add''a''$ und $abb''a''$ zerlegt. Gegeben ist

$$cd'' = 8{,}4,\quad ca'' = 19{,}6,\quad cb'' = 26{,}8$$
$$d''d = 10{,}5,\quad a''a = 7{,}3,\quad b''c = 28{,}1.$$

Da $ca'' = 19{,}6$ und $cd'' = 8{,}4$, so ist $d''a'' = 11{,}2$ — $cb'' = 26{,}8$, $ca'' = 19{,}6$, $a''b'' = 7{,}2$.



Daher ist nun

$$\Delta cdd'' = \frac{cd'' \times d''d}{2} = \frac{8{,}4 \times 10{,}5}{2}$$

$$\text{Trapez } add''a'' = \frac{(d''d + a''a) \, . \, (d''a'')}{2} = \frac{(10{,}5 + 7{,}3) \times 11{,}2}{2}$$

$$\text{„} \quad abb''a'' = \frac{(a''a + b''b) \, . \, (a''b'')}{2} = \frac{(7{,}3 + 28{,}1) \times 7{,}2}{2}$$

und es ist daher

$$\Delta cdd'' = \frac{8{,}4 \times 10{,}5}{2} = 44{,}10$$

$$\text{Trapez } add''a = \frac{17{,}8 \times 11{,}2}{2} = 99{,}68$$

$$\text{„} \quad abb''a'' = \frac{35{,}4 \times 7{,}2}{2} = 127{,}44$$

die ganze Fläche ist also = 271,22.

§. 38.

Aufgaben von der Berechnung der Flächen.

Aufgabe 702. Der Flächeninhalt eines Dreiecks soll aus den drei Seiten desselben berechnet werden.

Analysis. Nach Aufg. 672. ist, wenn **H** die halbe Summe der drei Seiten bedeutet, die Normale

$$\beta = \frac{2 \sqrt{H (H - a) (H - b) (H - c)}}{b}$$

und hieraus folgt

$$\frac{b\beta}{2} = \sqrt{H (H - a) (H - b) (H - c)}.$$

Nun ist aber $\frac{b\beta}{2}$ die Fläche des Dreiecks, welche $= q^2$ seyn mag. Es ist also

$$q^2 = \sqrt{H (H - a) (H - b) (H - c)}.$$

Zusatz. Da nach Aufgabe 672. auch ist

$$\beta = \frac{\sqrt{(a + b + c) (a + b - c) (a + c - b) (b + c - a)}}{2 b}$$

so wird $2 b\beta = 4 q^2$

$= \sqrt{(a + b + c) (a + b - c) (a + c - b) (b + c - a)}$

und es ist daher auch

$q^2 = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c) (a + b - c) (a + c - b) (b + c - a)}$.

Aufgabe 703. Die beiden Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks sind **c** und **g**, so daß **g** die Grundlinie bedeutet; es soll hieraus die Fläche dieses Dreiecks $= q^2$ gefunden werden.

Analysis. Allgemein ist

$q^2 = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c) (a + b - c) (a + c - b) (b + c - a)}$

und es wird hieraus die Fläche für das gleichschenklige Dreieck erhalten, wenn man setzt $b = c$ und $a = g$.

Hierdurch erhält man

$$q^2 = \frac{1}{4}\sqrt{(g + 2 c) \cdot g \cdot g \cdot (2 c - g)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{g^2 (2 c + g) (2 c - g)}$$
$$= \frac{g}{4}\sqrt{(2 c + g) (2 c - g)} = \frac{g}{4} \sqrt{(4c^2 - g^2)}.$$

Aufgabe 704. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist $= a$; es soll hieraus die Fläche q^2 desselben gefunden werden.

Aufgabe 714. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind beide Normalen gegeben; es soll hieraus die Fläche gefunden werden.

Analysis. Ist die zu g gehörige Normale $= p$, und die zu c gehörige $= \gamma$, so ist

$$g = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{(4p^2 - \gamma^2)}} \text{ (Aufg. 670.)}$$

Da nun $\frac{gp}{2} = q^2$, so ist auch

$$q^2 = \frac{p\gamma^2}{\sqrt{(4p^2 - \gamma^2)}} = \frac{p\gamma^2}{\sqrt{(2p + \gamma)(2p - \gamma)}}.$$

Aufgabe 715. Die Fläche eines Dreiecks soll aus den drei Normalen α, β, γ desselben berechnet werden.

Analysis. Da, wenn die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c bezeichnet werden, $a\alpha = b\beta = c\gamma$

so ist $a : b = \beta : \alpha$

und $b : c = \gamma : \beta = \alpha\gamma : \alpha\beta = \alpha : \frac{\alpha\beta}{\gamma}$

folglich ist $a : b : c = \beta : \alpha : \frac{\alpha\beta}{g}$.

Werden also β, α, $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ als die drei Seiten eines Dreiecks angenommen, so ist dieses dem Dreieck, dessen Seiten a, b, c seyn sollen, ähnlich, und es ist β gleichnamig der a.

Nun ist in dem Dreieck, dessen Seiten β, α und $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ seyn sollen, die zu β gehörige Normale x durch Aufg. 672. bestimmt, und es ist alsdann

$$\beta : x = a : \alpha, \text{ also } a = \frac{\alpha\beta}{x}$$

und daher $\frac{a\alpha}{2} = \frac{\alpha^2\beta}{2x}$; nämlich es ist die gesuchte Fläche

$$q^2 = \frac{\alpha^2\beta}{2x}$$

Und weil die Seiten des Dreiecks, in welchem x die zu β gehörige Normale seyn soll, die Werthe haben β, α und $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, so ist (Aufgabe 672.)

Aufgabe 707. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Differenz beider Katheten = D und die Hypotenuse = h; man soll hieraus die Fläche = q^2 berechnen.

Auflösung. Es ist

$$q^2 = \frac{h^2 - D^2}{4} = \frac{(h + D)(h - D)}{4}.$$

Zusatz. Da $q^2 = \frac{(S + h)(S - h)}{4}$

und auch $q^2 = \frac{(h + D)(h - D)}{4}$

so ist $(S + h)(S - h) = (h + D)(h - D)$

und daher $(S + h) : (h + D) = (h - D) : (S - h)$

Nun ist $S = a + b$ und $D = a - b$.

Folglich findet bei einem jeden rechtwinkligen Dreieck die Proportion statt:

$(h + a + b) : (h + a - b) = (h + b - a) : (a + b - h)$.

Aufgabe 708. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete = a gegeben, und die zu der Hypotenuse gehörige Normale = p; man soll hieraus die Fläche des Dreiecks berechnen.

Analysis. Setzt man den an a anliegenden Abschnitt der Hypotenuse = x, so ist

$$x : a = a : h \quad \text{(VI. 8.)}$$

$$\text{also } h = \frac{a^2}{x}$$

$$\text{oder da } x = \sqrt{(a^2 - p^2)}$$

$$h = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - p^2)}}$$

$$\text{und } \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$$

$$\text{folglich } \frac{hp}{2} = \frac{a^2 p}{2\sqrt{(a^2 - p^2)}}.$$

Nun ist aber $\frac{hp}{2} = q^2$ die Fläche des Dreiecks, es ist also

auch $q^2 = \frac{a^2 p}{2\sqrt{(a^2 - p^2)}}$.

Aufgabe 709. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Summe beider Katheten = S, und die zu der Hypo-

Aufgabe 718. Aus zwei Seiten a und b eines Dreiecks und der gegebenen Fläche $= q^2$ soll die dritte Seite c gefunden werden.

Analysis. Für die zu b gehörige Normale $= \beta$ ist

$$b\beta = 2\,q^2,\ \text{also}\ \beta = \frac{2\,q^2}{b}$$

Folglich ist β gegeben, aber auch a und b; folglich kann c gefunden werden (Aufg. 673.).

Aufgabe 719. Von einem Dreieck kennt man eine Seite $= a$, die zu einer zweiten gehörige Normale β und die Fläche $= q^2$; es sollen die beiden übrigen Seiten gefunden werden.

Analysis. Da $b\beta = 2\,q^2$, so ist $b = \frac{2\,q^2}{\beta}$ gegeben, aber auch a und β, also c (Aufg. 773.).

Aufgabe 720. Man kennt von einem Dreieck die beiden Normalen α und β, und die Fläche $= q^2$; es sollen hieraus die Seiten des Dreiecks berechnet werden.

Aufgabe 721. Von einem Dreieck sind die drei Seiten α, β, γ; und von einem anderen Dreieck sind zwei Seiten a und b; und es ist der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel dem von α und β eingeschlossenen gleich; es soll der Flächeninhalt des zweiten Dreiecks berechnet werden.

Analysis. Der Flächeninhalt p^2 des Dreiecks, von welchem α, β und γ die Seiten sind, ist durch diese Seiten bestimmt; und da dieses Dreieck mit dem, zu welchem a und b als Seiten gehören, einen Winkel gleich hat: so ist, wenn man die gesuchte Fläche dieses Dreiecks $= q^2$ setzt,

$$p^2 : q^2 = \alpha\beta : ab \quad \text{(VI. 15.)}$$

$$\text{folglich ist}\ q^2 = \frac{ab}{\alpha\beta} \cdot p^2.$$

Aufgabe 722. Von einem Dreieck sind zwei Seiten a und b gegeben, und der Radius **R** des Kreises, der sich um dasselbe beschreiben läßt; es soll hieraus die Fläche des Dreiecks $= q^2$ berechnet werden.

Analysis. Es ist die zu der dritten Seite c gehörige Normale γ durch die Proportion bestimmt.

$$2\,R : a = b : \gamma$$

$$\text{und daher}\ \gamma = \frac{a\,b}{2\,R}$$

Folglich ist γ gegeben, aber auch a und b, und daher kann c gefunden werden, wodurch die gesuchte Fläche bestimmt ist.

Aufgabe 723. Man soll in einen Kreis, dessen Radius $= R$ gegeben ist, ein Rechteck beschreiben, das einen gegebenen Flächeninhalt $= q^2$ hat; es sollen die Seiten dieses Rechtecks gefunden werden.

Analysis. Setzt man die Seiten dieses Rechtecks x und y, so ist

$$x^2 + y^2 = (2R)^2$$

und $$2xy = 2q^2$$

daher $$x^2 \pm 2xy + y^2 = 4R^2 \pm 2q^2$$

also $$(x \pm y)^2 = 4R^2 \pm 2q^2$$

und daher ist $$x + y = \sqrt{(4R^2 + 2q^2)}$$

und $$x - y = \sqrt{(4R^2 - 2q^2)}$$

folglich ist $$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4R^2 + 2q^2)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - 2q^2)}$$

und $$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4R^2 + 2q^2)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - 2q^2)}.$$

Aufgabe 724. Von einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten $a + b = S$, die dritte Seite $= c$ und der Radius des Kreises, der in das Dreieck beschrieben werden kann $= r$ gegeben; es soll hieraus die Fläche dieses Dreiecks $= q^2$ berechnet werden.

Auflösung. Es ist $q^2 = \frac{(a+b+c)r}{2}$ (Aufg. 392 S. 396)

folglich ist auch $q^2 = \frac{(S+c)r}{2}$.

Aufgabe 725. Von einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten $a + b = S$ gegeben, die dritte Seite c und die zu derselben gehörige Normale $= \gamma$; es sollen hieraus die Seiten a und b berechnet werden.

Analysis. Nach Aufgabe 672. ist

$$\gamma = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c}$$

und daher ist

$$4c^2\gamma^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

und da $a + b = S$, so ist

$$4c^2\gamma^2 = (S+c)(S-c)(c+a-b)(c+b-a).$$

Folglich ist $\frac{4c^2\gamma^2}{(S+c)(S-c)} = [c + (a-b)][c - (a-b)]$

und es ist sonach auch

Aufgabe 714. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind beide Normalen gegeben; es soll hieraus die Fläche gefunden werden.

Analysis. Ist die zu g gehörige Normale = p, und die zu c gehörige = γ, so ist

$$g = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{(4p^2 - \gamma^2)}} \text{ (Aufg. 670.)}$$

Da nun $\frac{gp}{2} = q^2$, so ist auch

$$q^2 = \frac{p\gamma^2}{\sqrt{(4p^2 - \gamma^2)}} = \frac{p\gamma^2}{\sqrt{(2p + \gamma)(2p - \gamma)}}.$$

Aufgabe 715. Die Fläche eines Dreiecks soll aus den drei Normalen α, β, γ desselben berechnet werden.

Analysis. Da, wenn die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c bezeichnet werden, $a\alpha = b\beta = c\gamma$

so ist $a : b = \beta : \alpha$

und $b : c = \gamma : \beta = \alpha\gamma : \alpha\beta = \alpha : \frac{\alpha\beta}{\gamma}$

folglich ist $a : b : c = \beta : \alpha : \frac{\alpha\beta}{g}$.

Werden also β, α, $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ als die drei Seiten eines Dreiecks angenommen, so ist dieses dem Dreieck, dessen Seiten a, b, c seyn sollen, ähnlich, und es ist β gleichnamig der a.

Nun ist in dem Dreieck, dessen Seiten β, α und $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ seyn sollen, die zu β gehörige Normale x durch Aufg. 672. bestimmt, und es ist alsdann

$$\beta : x = a : \alpha, \text{ also } a = \frac{\alpha\beta}{x}$$

und daher $\frac{a\alpha}{2} = \frac{\alpha^2\beta}{2x}$; nämlich es ist die gesuchte Fläche

$$q^2 = \frac{\alpha^2\beta}{2x}$$

Und weil die Seiten des Dreiecks, in welchem x die zu β gehörige Normale seyn soll, die Werthe haben β, α und $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, so ist (Aufgabe 672.)

Analysis. Da $(a + b + c)\, r = 2\, q^2$

$$\text{so ist} \quad S + c = \frac{2\, q^2}{r}$$

$$\text{also} \quad c = \frac{2\, q^2}{r} - S$$

gegeben, und hierdurch nun auch $\gamma = \frac{2\, q^2}{c}$ folglich können a und b gefunden werden. (Aufg. 725.)

Aufgabe 729. Man kennt die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks $a - b = D$, die zu der dritten Seite c gehörige Normale γ und die Fläche $= q^2$; es sollen die Seiten gefunden werden.

Auflösung. Diese ist nicht verschieden von der Auflösung der Aufgabe 727.

Aufgabe 730. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius des Kreises, der sich in dasselbe beschreiben läßt, $= r$, eine Seite $= c$ und die Fläche $= q^2$; es sollen hieraus die beiden übrigen Seiten berechnet werden.

Analysis. Da $c\gamma = 2 q^2$, so ist $\gamma = \frac{2\, q^2}{c}$ gegeben; und da $(a + b + c)\, r = 2 q^2$, so ist $a + b + c = \frac{2\, q^2}{r}$. Also ist $a + b + c$ gegeben, aber auch c; folglich kennt man $a + b = \frac{2\, q^2}{r} - c$, und daher ist von dem Dreieck gegeben $a + b$, c und γ, woraus die Seiten gefunden werden können. (Aufgabe 725.)

Dritter Abschnitt.

Das Theilen der Figuren durch Rechnung.

Das Theilen der Figuren ist einer der wichtigsten Gegenstände der praktischen Geometrie; und obgleich sich jede Theilung durch eine rein geometrische Construktion ausführen läßt, so ist diese doch für den praktischen Gebrauch aus den Seite 623 angegebenen Gründen nicht genügend, weßwegen auch bereits von den Aufgaben

§. 35. Seite 587 u. f. mehrere auf algebraischem Wege gelös't sind. In dem gegenwärtigen Abschnitte soll nun das dort noch Fehlende ergänzt werden.

Man kann bei dem Theilen der Figuren folgende drei Fälle unterscheiden:

1) Die Theilungslinien sollen von einem gegebenen Punkte ausgehen;
2) sie sollen einer gegebenen Linie parallel seyn, und
3) es sollen die Theilungslinien durch gegebene Punkte gehen.

Von allen drei Gattungen sind bereits in §. 35. Aufgaben gelös't, und es ist hier nur noch zu zeigen, wie die dort gegebenen Auflösungen durch den Gebrauch der Gleichungen sich vereinfachen lassen.

---

§. 39.

Aufgaben von der Theilung der Figuren durch Rechnung.

Aufgabe 731. Eine Linie, deren Länge = 387,6 ist, soll in drei Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 5 : 7 : 9.

Auflösung. Da 5 + 7 + 9 = 21, so ist, wenn man die drei Theile mit a, b, c bezeichnet

$$21 : 387{,}6 = 5 : a = 7 : b = 9 : c$$

und da $21 : 387{,}6 = 7 : 129{,}2$, so ist

$$7 : 129{,}2 = 5 : a, \text{ also } a = 92{,}29$$
$$7 : 129{,}2 = 7 : b \quad \text{„} \quad b = 129{,}20$$
$$7 : 129{,}2 = 9 : c \quad \text{„} \quad c = 166{,}11.$$

Aufgabe 732. Die Fläche einer Figur ist = 765 Quadratruthen; es soll dieselbe in vier Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 3, 5, 8 und 9. Wie groß ist jeder Theil?

Auflösung. Es ist 3 + 5 + 8 + 9 = 25 und

$$25 : 765 = 5 : 153 = 1 : 30{,}6$$

daher ist, wenn man die vier Theile mit a, b, c, d bezeichnet,

$a = 30{,}6 \times 3 = 91{,}80$ Quadratruthen
$b = 30{,}6 \times 5 = 153{,}00$ „ „
$c = 30{,}6 \times 8 = 244{,}80$ „ „
$d = 30{,}6 \times 9 = 275{,}40$ „ „

Analysis. Da $(a + b + c)\, r = 2q^2$

$$\text{so ist} \quad S + c = \frac{2q^2}{r}$$

$$\text{also} \quad c = \frac{2q^2}{r} - S$$

gegeben, und hierdurch nun auch $\gamma = \dfrac{2q^2}{c}$ folglich können a und b gefunden werden. (Aufg. 725.)

Aufgabe 729. Man kennt die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks $a - b = D$, die zu der dritten Seite c gehörige Normale γ und die Fläche $= q^2$; es sollen die Seiten gefunden werden.

Auflösung. Diese ist nicht verschieden von der Auflösung der Aufgabe 727.

Aufgabe 730. Von einem Dreieck ist gegeben der Radius des Kreises, der sich in dasselbe beschreiben läßt, $= r$, eine Seite $= c$ und die Fläche $= q^2$; es sollen hieraus die beiden übrigen Seiten berechnet werden.

Analysis. Da $c\gamma = 2q^2$, so ist $\gamma = \dfrac{2q^2}{c}$ gegeben; und da $(a + b + c)\, r = 2q^2$, so ist $a + b + c = \dfrac{2q^2}{r}$. Also ist $a + b + c$ gegeben, aber auch c; folglich kennt man $a + b = \dfrac{2q^2}{r} - c$, und daher ist von dem Dreieck gegeben $a + b$, c und γ, woraus die Seiten gefunden werden können. (Aufgabe 725.)

Dritter Abschnitt.

Das Theilen der Figuren durch Rechnung.

Das Theilen der Figuren ist einer der wichtigsten Gegenstände der praktischen Geometrie; und obgleich sich jede Theilung durch eine rein geometrische Construktion ausführen läßt, so ist diese doch für den praktischen Gebrauch aus den Seite 623 angegebenen Gründen nicht genügend, weßwegen auch bereits von den Aufgaben

§. 35. Seite 587 u. f. mehrere auf algebraischem Wege gelös't sind. In dem gegenwärtigen Abschnitte soll nun das dort noch Fehlende ergänzt werden.

Man kann bei dem Theilen der Figuren folgende drei Fälle unterscheiden:

1) Die Theilungslinien sollen von einem gegebenen Punkte ausgehen;
2) sie sollen einer gegebenen Linie parallel seyn, und
3) es sollen die Theilungslinien durch gegebene Punkte gehen.

Von allen drei Gattungen sind bereits in §. 35. Aufgaben gelös't, und es ist hier nur noch zu zeigen, wie die dort gegebenen Auflösungen durch den Gebrauch der Gleichungen sich vereinfachen lassen.

---

§. 39.

Aufgaben von der Theilung der Figuren durch Rechnung.

Aufgabe 731. Eine Linie, deren Länge = 387,6 ist, soll in drei Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 5 : 7 : 9.

Auflösung. Da 5 + 7 + 9 = 21, so ist, wenn man die drei Theile mit a, b, c bezeichnet

$$21 : 387{,}6 = 5 : a = 7 : b = 9 : c$$

und da 21 : 387,6 = 7 : 129,2, so ist

$$7 : 129{,}2 = 5 : a,\ \text{also}\ a = 92{,}29$$
$$7 : 129{,}2 = 7 : b\quad „\quad b = 129{,}20$$
$$7 : 129{,}2 = 9 : c\quad „\quad c = 166{,}11.$$

Aufgabe 732. Die Fläche einer Figur ist = 765 Quadratruthen; es soll dieselbe in vier Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 3, 5, 8 und 9. Wie groß ist jeder Theil?

Auflösung. Es ist 3 + 5 + 8 + 9 = 25 und

$$25 : 765 = 5 : 153 = 1 : 30{,}6$$

daher ist, wenn man die vier Theile mit a, b, c, d bezeichnet,

$$a = 30{,}6 \times 3 = 91{,}80\ \text{Quadratruthen}$$
$$b = 30{,}6 \times 5 = 153{,}00\quad „\quad „$$
$$c = 30{,}6 \times 8 = 244{,}80\quad „\quad „$$
$$d = 30{,}6 \times 9 = 275{,}40\quad „\quad „$$

Aufgabe 733. Eine Figur, deren Flächeninhalt = 784 ist, besteht aus zwei Theilen, die sich verhalten wie 4 : 3; und es wird von dem ersten Theile ein Stück, dessen Fläche = 232 ist, weggenommen. Wie verhält sich das noch übrige Stück des ersten Theiles zu dem zweiten Theile?

Auflösung. Sind A und B die beiden Theile, so ist, da $A + B = 784$ seyn soll, und $4 + 3 = 7$ ist

$$7 : 784 = 4 : A = 3 : B$$

also $1 : 112 = 4 : A = 3 : B$

und es ist daher $A = 448$ und $B = 336$.

Hiervon 232

bleibt 216

wird also dieser Rest = M gesetzt, so ist

$$M : B = 216 : 336 = 9 : 14.$$

Aufgabe 734. Es ist $A + B = S$ gegeben, und das Verhältniß von $A : B = m : n$. Außerdem ist ein Stück α von A der Größe nach gegeben; es soll ermittelt werden, wie der Rest von $A = \beta$ zu B sich verhält.

Auflösung. Es ist $m + n : S = m : A = n : B$ und daher ist $A = \frac{mS}{m+n}$ und $B = \frac{nS}{m+n}$.

Da nun seyn soll $\alpha + \beta = A$, so ist $\beta = A - \alpha$

und also auch $\beta = \frac{mS}{m+n} - \alpha$

und da $B = \frac{nS}{m+n}$

so folgt $B : \beta = \frac{nS}{m+n} : \frac{mS}{m+n} - \alpha$

und $B : \beta = nS : mS - (m + n)\,\alpha.$

Nämlich es ist $B : \beta = nS : m\,(S - \alpha) - n\alpha.$

Aufgabe 735. Innerhalb eines gegebenen Winkels c ist ein Punkt p seiner Lage nach gegen den einen Schenkel durch die Normale $pa = b$ und die Abscisse $ca = a$ bestimmt; es soll hieraus die Lage dieses Punktes gegen den andern Schenkel berechnet werden; man soll also den Werth der Normale $p\alpha = \beta$ und der Abscisse $c\beta = \alpha$ berechnen.

so ziehen, daß das durch dieselbe abgeschnittene Dreieck einen gegebenen Flächeninhalt $= q^2$ fasse.

Analysis. Da der Winkel gegeben ist und der Punkt p, so ist auch der normale Abstand dieses Punktes von dem anderen Schenkel $= h$ gegeben. Wird nun das auf dem zweiten Schenkel durch die zu ziehende Linie abzuschneidende Stück $= x$ gesetzt, so ist der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks $= \frac{hx}{2}$, und es muß also seyn

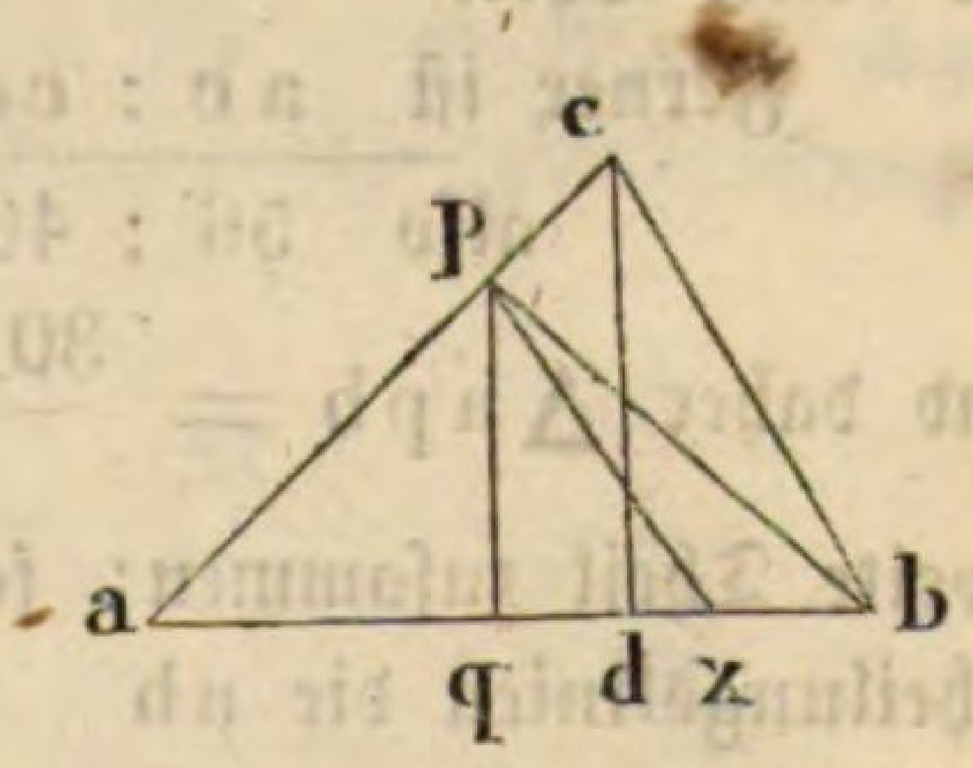
$$\frac{hx}{2} = q^2$$

und daher $x = \frac{2q^2}{h}$.

Aufgabe 738. Die Grundlinie eines Dreiecks ist gegeben; man soll dasselbe von der Spitze aus in mehrere Theile nach gegebenen Verhältnissen theilen.

Auflösung. Theile die Grundlinie nach den gegebenen Verhältnissen (Aufgabe 731.), und verbinde die Theilpunkte mit der Spitze.

Aufgabe 730. Von einem Dreieck abc sind die beiden Seiten $ca = b$, $ab = c$ gegeben, die zu der zweiten Seite gehörige Normale $cd = \gamma$; man soll von einem in $ca = b$ gegebenen Punkte p, dessen Abstand von $a = ap = d$ bekannt ist, eine Linie px so ziehen, daß das Dreieck dadurch in zwei Theile getheilt wird, die sich verhalten wie m : n.



Analysis. Zieht man pb und die Normale pq auf ab, so ist

$$ac : cd = ap : pq$$

also $b : \gamma = d : (pq)$

folglich ist $(pq) = \frac{d\gamma}{b}$

und daher $\Delta abp = \frac{(pq)\,(ab)}{2} = \frac{cd\gamma}{2b}$.

Ferner ist $\Delta abc = \frac{c\gamma}{2}$; und da die beiden Theile, in welche das Dreieck zu theilen ist, sich verhalten sollen wie m : n, so ist der eine Theil $= \frac{mc\gamma}{2(m+n)}$, und der andere $= \frac{nc\gamma}{2(m+n)}$.

Ist nun $\frac{m c \gamma}{2(m+n)} = \frac{c d \gamma}{2b}$, also $\frac{m}{m+n} = \frac{d}{b}$ so ist pb die gesuchte Grenzlinie.

Ist aber $\frac{m c \gamma}{2(m+n)} < \frac{c d \gamma}{2b}$, und soll der erste Theil von $\llcorner$ a abgeschnitten werden, so schneidet die von p aus zu ziehende Grenzlinie die ab. Es sey x der Theilpunkt und ax = x, so ist

$$\Delta pax = \frac{(pq)(ax)}{2} = \frac{d\gamma x}{2b}.$$

Da nun der erste Theil seyn muß $= \frac{m c \gamma}{2(m+n)}$

so wird $\frac{d \gamma x}{2b} = \frac{m c \gamma}{2(m+n)}$,

und daher $(ax) = x = \frac{m c b}{(m+n) d}$

und es sind nun apx und pxbc die beiden Theile des Dreiecks.

Aufgabe 740. In dem Dreieck abc ist ab = 66, ac = 56, cd = 40 und ap = 42. Es soll dieses Dreieck von p aus in drei Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 4 : 5 : 6.

Auflösung. Es ist die Fläche des ganzen Dreiecks $= \frac{66 \cdot 40}{2}$ = 1320; und da 4 + 5 + 6 = 15, so ist

der erste Theil $= \frac{4 \cdot 1320}{15} = 4 \cdot 88 = 352$

der zweite Theil $= 5 \cdot 88 = 440$

der dritte Theil $= 6 \cdot 88 = 528$

Ferner ist ac : cd = ap : pq

also 56 : 40 = 42 : (pq), folglich pq = 30

und daher $\Delta apb = \frac{30 \cdot 66}{2} = 990$ größer als der erste und zweite Theil zusammen; folglich treffen beide von p aus gezogene Theilungslinien die ab. Es sey von a an genommen die Grundlinie für den ersten Theil = z, und für die beiden ersten Theile zusammen = x: so muß seyn, weil pq = 30,

$$\frac{30\,z}{2} = 352 \quad \text{und} \quad \frac{30\,x}{2} = 352 + 440$$

$$30\,z = 704 \qquad 30\,x = 1584$$

$$z = 23\tfrac{7}{15} \qquad x = 52\tfrac{4}{5},$$

wodurch die Lage der Theilungslinien bestimmt ist.

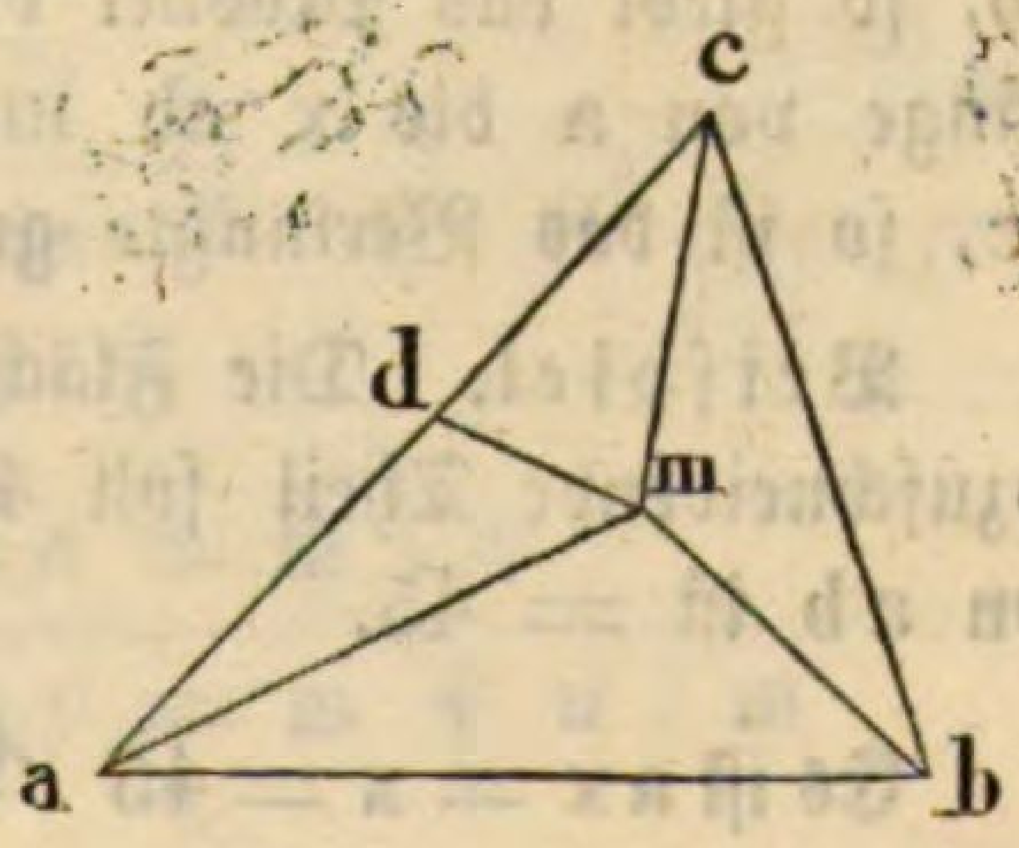
Aufgabe 741. In dem Umfange einer Figur ist ein Punkt m gegeben; man soll von diesem Punkte aus eine gerade Linie durch die Figur ziehen, daß durch dieselbe ein Stück von einem Flächeninhalte $= q^2$ abgeschnitten wird.

Auflösung. Man verbinde den Punkt m mit allen Ecken der Figur, so daß dieselbe dadurch in Dreiecke zerlegt wird und berechne die Fläche dieser Dreiecke. Findet man z. B., daß die Fläche der beiden ersten Dreiecke zusammen kleiner ist als q^2, aber die der drei ersteren größer: so muß die zu ziehende Linie in dem dritten Dreiecke liegen, und es ist das von dem dritten Dreieck abzuschneidende Stück dem Reste gleich, welcher übrig bleibt, wenn man die Fläche der beiden ersten Dreiecke von q^2 abzieht, also gegeben; die Lage der Grenzlinie kann daher, wie bei Aufgabe 737., gefunden werden.

Aufgabe 742. In dem Umfange einer Figur ist ein Punkt m gegeben; man soll die Figur von diesem Punkte aus nach gegebenen Verhältnissen theilen.

Auflösung. Man verbinde m mit allen Ecken der Figur, berechne die Fläche der sämmtlichen hierdurch erhaltenen Dreiecke, so lernt man hierdurch zugleich auch die Fläche der ganzen Figur kennen. Wird diese nach den gegebenen Verhältnissen getheilt (Aufg. 732.), so erfährt man, wie groß jeder der einzelnen Theile besonders seyn muß. Hierauf ziehe man von m aus eine Linie, durch welche der erste Theil abgeschnitten wird (Aufg. 741.); ferner eine Linie, durch welche die beiden ersten Theile zusammen abgeschnitten werden u. s. f., so erhält man die sämmtlichen Theilungslinien ihrer Lage nach.

Aufgabe 743. Innerhalb eines Dreiecks abc ist ein Punkt m gegeben, und mit dem Punkte d des Umfanges durch md verbunden; man soll von m aus die mn so ziehen, daß das dadurch abgeschnittene Stück dmna $= q^2$ wird.

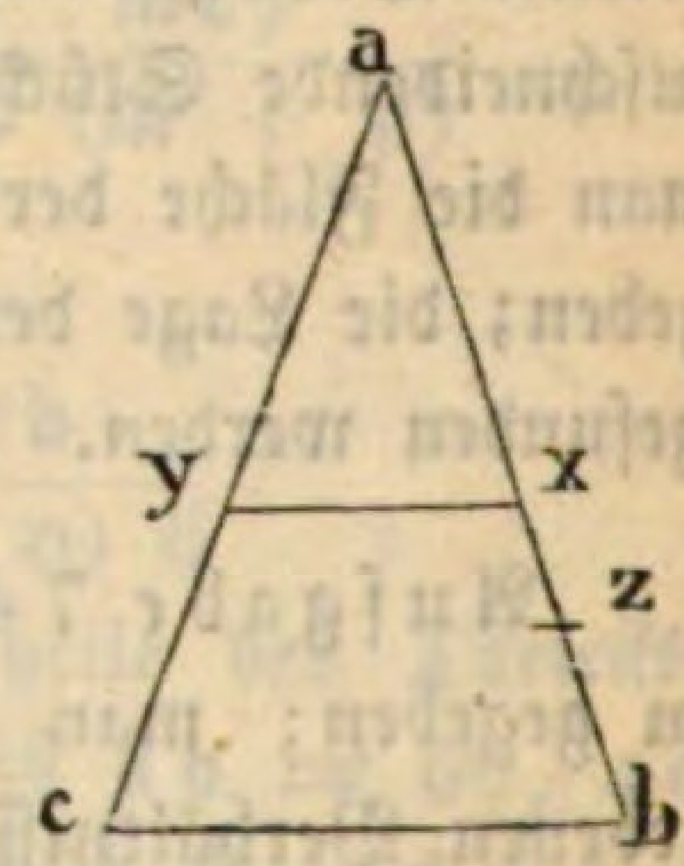


Auflösung. Ziehe ma, mb, mc; berechne die Dreiecke dma, amb, bmc, cmd, und verfahre hierauf wie bei den vorigen Aufgaben.

Aufgabe 744. Von einem innerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkte m ist md an den Punkt d des Umfanges gezogen; man soll das Dreieck von m aus nach gegebenen Verhältnissen theilen, so daß md die erste Theilungslinie wird.

Aufgabe 745. Innerhalb einer geradlinigen Figur ist ein Punkt m gegeben und mit einem Punkte des Umfanges verbunden; man soll die Figur von m aus nach gegebenen Verhältnissen theilen, daß die von m an den Umfang bereits gezogene Linie die erste Grenzlinie bildet.

Aufgabe 746. Man soll in einem gegebenen Dreieck abc eine Linie parallel der Grundlinie bc so ziehen, daß dadurch ein Stück von einem Flächeninhalte $= q^2$ abgeschnitten wird.



Analysis. Da Δabc gegeben ist, so ist auch die Fläche desselben $= p^2$ gegeben; und da die gesuchte Theilungslinie xy der bc parallel seyn soll, so ist $\Delta axy \sim \Delta abc$, und es ist daher

$\Delta abc : \Delta axy = (ab)^2 : (ax)^2$ (VI. 19.)

Setzt man daher $ab = c$ und $ax = x$, so ist

$$p^2 : q^2 = c^2 : x^2$$

$$\text{also } x^2 = \frac{q^2}{p^2} c^2$$

$$\text{folglich ist } x = c \sqrt{\frac{q^2}{p^2}}$$

Auflösung. Man theile die abzuschneidende Fläche $= q^2$ durch die Fläche des ganzen Dreiecks $= p^2$, ziehe aus dem Quotienten die Quadratwurzel und multiplicire dieselbe mit der Seite ab, so giebt das Produkt die Länge von ax. Schneidet man diese Länge von a bis x ab und zieht durch x eine Linie xy parallel bc, so ist das Verlangte geschehen.

Beispiel. Die Fläche des ganzen Dreiecks ist 750, und der abzuschneidende Theil soll 400 Quadratruthen betragen, die Länge von ab ist $= 45$.

$$\text{Es ist } ax = x = 45 \sqrt{\frac{400}{750}} = 45 \sqrt{\frac{8}{15}} = 45 \sqrt{\frac{120}{15^2}}$$

$$= \frac{45}{15} \sqrt{120} = 3 \; . \; 10{,}954$$

und daher $ax = 32{,}86$.

Aufgabe 747. Ein Dreieck abc soll durch zwei Linien, welche der bc parallel sind, in drei Theile getheilt werden, die zu einander sich verhalten wie $\alpha : \beta : \gamma$.

Analysis. Werden die drei Theile mit A^2, B^2, C^2 bezeichnet, so muß seyn

$$A^2 : B^2 : C^2 = \alpha : \beta : \gamma$$

und daher $A^2 : A^2 + B^2 + C^2 = \alpha : \alpha + \beta + \gamma$

und $A^2 + B^2 : A^2 + B^2 + C^2 = \alpha + \beta : \alpha + \beta + \gamma$.

Geht nun durch x die erste und durch z die zweite Theilungslinie, und setzt man $ax = x$, $az = z$ und ist $ab = c$, so muß auch seyn

$$A^2 : A^2 + B^2 + C^2 = x^2 : c^2$$

und $A^2 + B^2 : A^2 + B^2 + C^2 = z^2 : c^2$

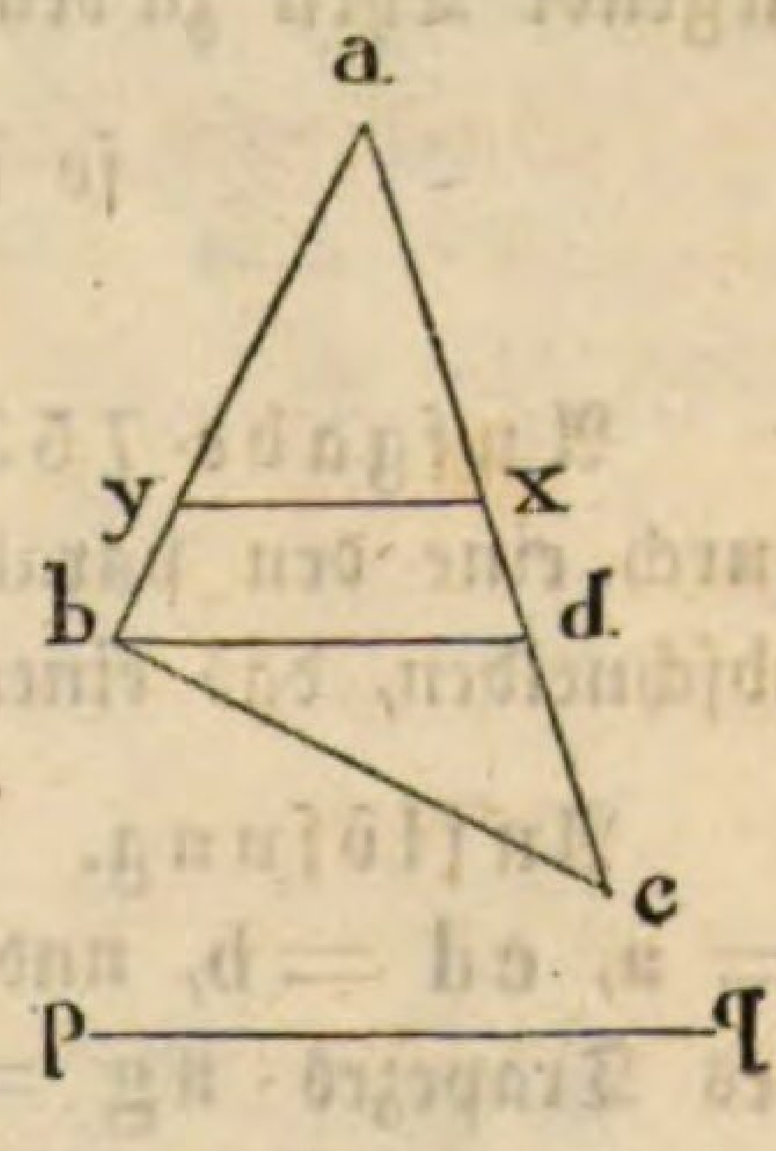
folglich ist $\alpha : \alpha + \beta + \gamma = x^2 : c^2$

und $\alpha + \beta : \alpha + \beta + \gamma = z^2 : c^2$

und es ist daher $x = c\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right)}$

und $z = c\sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right)}$

Aufgabe 748. Man soll ein Dreieck abc durch eine Linie xy, welche einer der Lage nach gegebenen Linie pq parallel ist, in zwei Theile theilen, die sich verhalten wie m : n.



Analysis. Ziehe durch b die bd parallel pq, so ist ad der Größe nach bestimmt; man setze $ad = d$, $ac = b$ und $ax = x$, so ist nun

$\Delta abc : \Delta abd = (ac) : (ad)$ (VI. 1.)

und $\Delta abd : \Delta axy = (ad)^2 : (ax)^2$

folglich $\Delta abc : \Delta axy = ac \times ad : (ax)^2$
$= b \,.\, d : x^2$.

Es soll aber seyn $\Delta axy : xybc = m : n$

also $\Delta abc : \Delta axy = m + n : m$

Folglich ist auch

$b \,.\, d : x^2 = m + n : m$

und daher $x^2 = \frac{mbd}{m + n}$, also $x = \sqrt{\left(\frac{mbd}{m + n}\right)}$.

Aufgabe 749. Man soll das Dreieck abc durch gerade Linien, welche der der Lage nach gegebenen Linie pq parallel sind, nach gegebenen Verhältnissen theilen.

Aufgabe 750. Ein Paralleltrapez soll durch eine Linie, welche den parallelen Seiten parallel ist, halbirt werden.

Auflösung. Werden die beiden parallelen Seiten der Figur mit a und b bezeichnet, und setzt man die Länge der gesuchten Theilungslinie $= x$, so ist $x = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)}$. (Aufg. 633. Seite 593.)

Aufgabe 751. Man soll ein Paralleltrapez durch eine Linie, welche den parallelen Seiten parallel ist, so theilen, daß die Theile den Dreiecken gleich werden, in welche das Trapez durch eine Diagonale zerlegt wird.

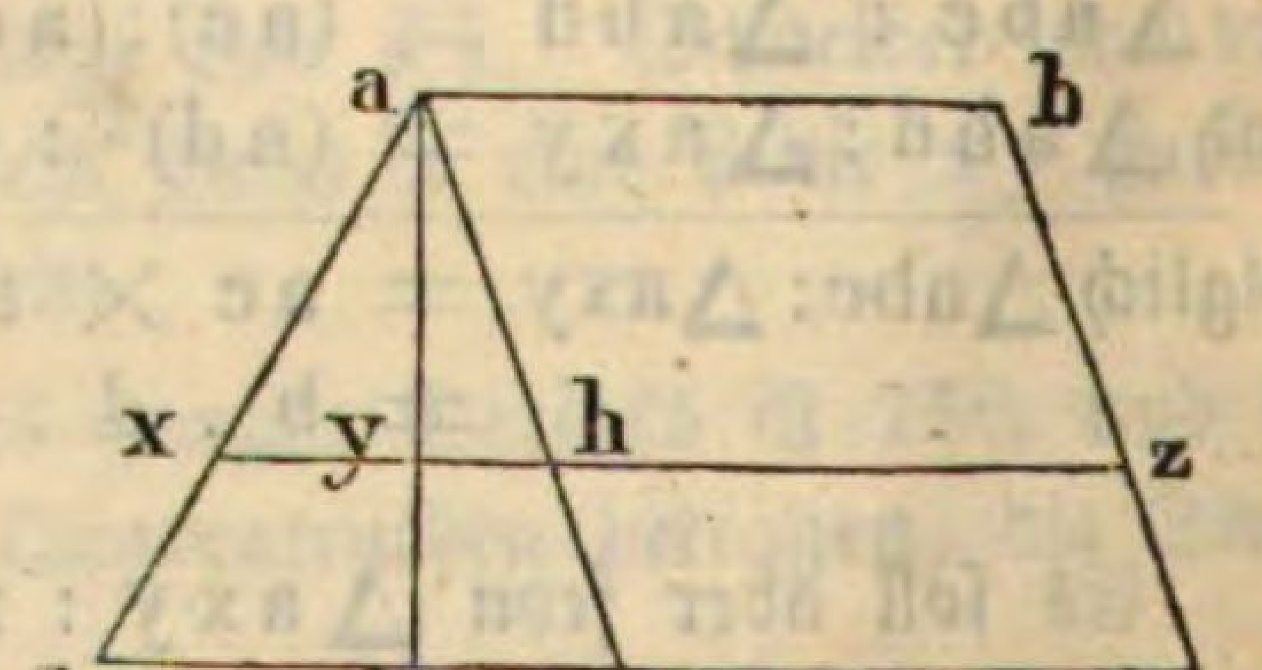
Auflösung. Es ist $x = \sqrt{ab}$. (Aufg. 634. S. 694.)

Aufgabe 752. Ein Paralleltrapez soll durch eine Linie, die den parallelen Seiten parallel ist, in zwei Theile getheilt werden, die sich zu einander verhalten wie α zu β.

Auflösung. Sind a und b die beiden parallelen Seiten der Figur, x die gesuchte Theilungslinie, und soll der an a anliegende Theil zu dem an b anliegenden, wie α zu β sich verhalten:

$$\text{so ist } x = \sqrt{\left(\frac{\alpha b^2 + \beta a^2}{\alpha + \beta}\right)}.$$

Aufgabe 753. Man soll von einem Paralleltrapez abcd durch eine den parallelen Seiten parallele Linie xz ein Stück abzx abschneiden, das einen gegebenen Flächeninhalt $= p^2$ faßt.



Auflösung. Es sey $ab = a$, $cd = b$, und die Höhe des Trapezes $ag = h$, die gesuchte Theilungslinie $xz = x$, und die Höhe ay des abzuschneidenden Trapezes $abzx = y$.

$$\text{Da } abzx = \frac{(ab + xz)(ay)}{2}$$

$$\text{so ist } p^2 = \frac{(a + x)\,y}{2}.$$

Es ist aber, wenn man ae parallel bc zieht,

$$ag : ay = de : xh$$

$$\text{also } h : y = b - a : x - a$$

$$\text{folglich ist } y = \frac{h\,(x - a)}{b - a}$$

$$\text{und sonach wird } p^2 = \left(\frac{a + x}{2}\right)\left(\frac{h\,(x - a)}{b - a}\right)$$

$$\text{und es ist daher } \frac{2\,(b - a)\,p^2}{h} = (x + a)\,(x - a)$$

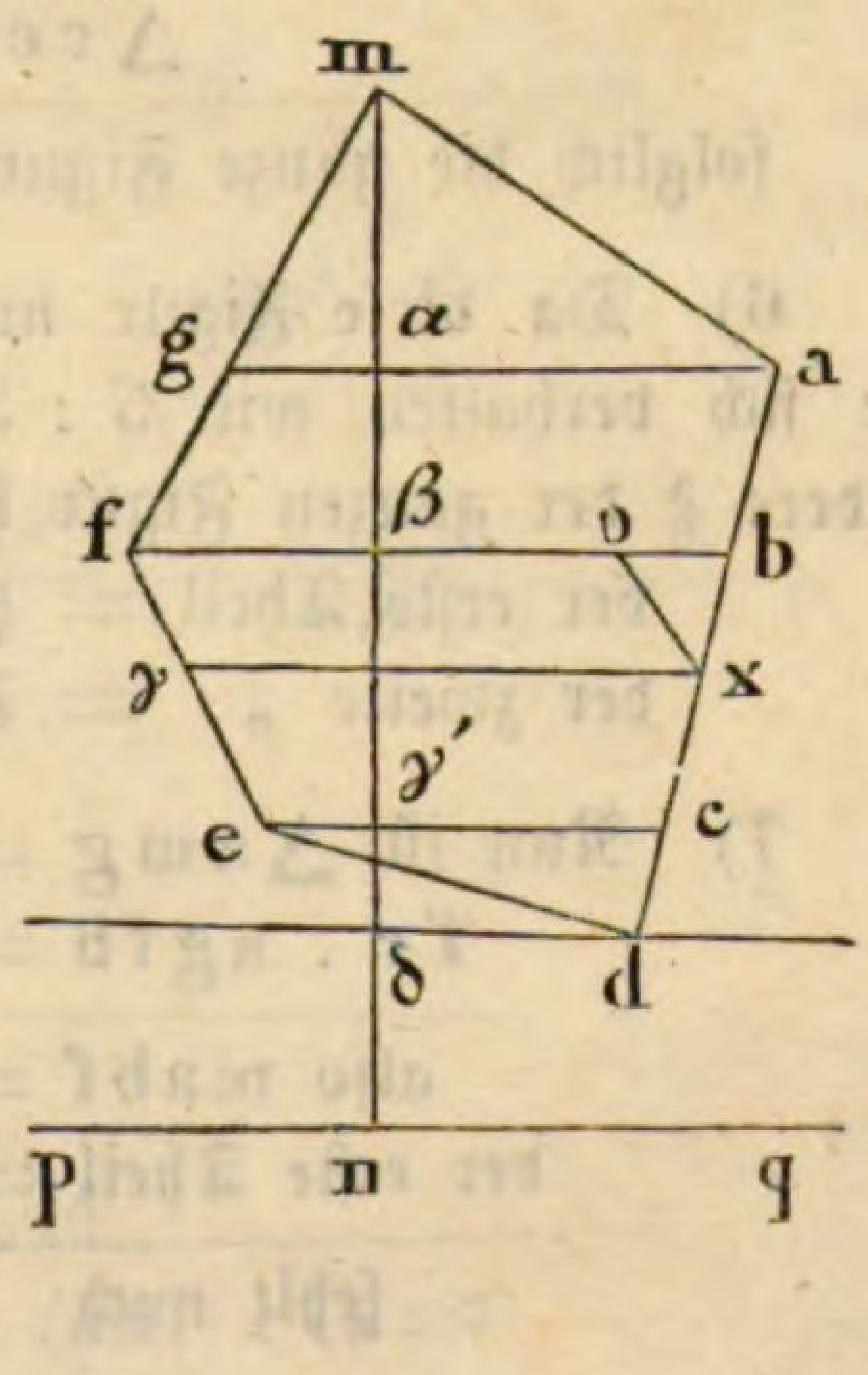
$$= x^2 - a^2$$

$$\text{Folglich ist } \sqrt{\left[\frac{2\,(b - a)\,p^2}{h} + a^2\right]} = x$$

wodurch die Größe der Theilungslinie bestimmt ist; und da $y = \frac{h\,(x - a)}{b - a}$ so ist hierdurch auch die Höhe des abzuschneidenden Stückes gegeben.

Aufgabe 754. Durch eine geradlinige Figur soll eine Linie einer der Lage nach gegebenen parallel gezogen werden, so daß durch dieselbe ein Stück von der Figur $= q^2$ abgeschnitten wird.

Auflösung. Man ziehe durch alle Ecken der Figur Parallelen mit der der Lage nach gegebenen, so wird hierdurch die ganze Figur in Dreiecke und Paralleltrapeze zerlegt. Berechnet man die Fläche eines jeden der Theile, in welche die Figur hierdurch zerlegt wird, so findet man, in welchem der Trapeze die zu theilende Linie liegen muß, und wie viel von demselben noch abzuschneiden ist; und hierdurch läßt sich nun die zu ziehende Linie ihrer Größe und Lage nach berechnen, entweder durch Aufgabe 752. oder auch durch Aufgabe 753.



Aufgabe 755. Eine Figur soll durch eine Linie, welche einer der Lage nach gegebenen parallel ist, in zwei Theile getheilt werden, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Beispiel. Die Figur madef soll durch eine Linie, welche der pq parallel ist, in zwei Theile getheilt werden, die sich verhalten wie 5 : 3; und es ist, wenn man die Linien ag, bf, ce und dδ parallel pq zieht, und mn normal auf pq,

ag = 37,4, bf = 41,6, ce = 25,2, $m\alpha$ = 18,8, $m\beta$ = 31,6 $m\gamma$ = 47,4 und $m\delta$ = 54,6.

Berechnung.

1) Da $m\alpha = 18{,}8$ und $ag = 37{,}4$

so ist $\Delta amg = \frac{18{,}8 \times 37{,}4}{2} = 351{,}56.$

2) Es ist $m\beta = 31{,}6$ $\quad ag = 37{,}4$
$m\alpha = 18{,}8$ $\quad bf = 41{,}6$

also $\alpha\beta = 12{,}8$ $\quad ag + bf = 79{,}0$

daher $Tr. agfb = \frac{79{,}0 \times 12{,}8}{2} = 505{,}60.$

3) Da $m\gamma = 47{,}4$ $\quad bf = 41{,}6$
$m\beta = 31{,}6$ $\quad ce = 25{,}2$

so ist $\beta\gamma = 15{,}8$ $\quad bf + ce = 66{,}8$

folglich $Tr. bfec = \frac{15{,}8 \times 66{,}8}{2} = 527{,}72.$

4) Es ist $m\delta = 54{,}6$
$m\gamma = 47{,}4$

also $\gamma\delta = 7{,}2$ und $ce = 25{,}2$

daher $\Delta ced = \frac{7{,}2 \times 25{,}2}{2} = 90{,}72.$

5) Hiernach ist $\Delta amg = 351{,}56$
$Tr\ agfb = 505{,}60$
„ $bfec = 527{,}72$
$\Delta ced = 90{,}72$

folglich die ganze Figur = 1475,60.

6) Da diese Figur nun in zwei Theile getheilt werden soll, die sich verhalten wie 5 : 3, so muß der eine Theil $\frac{5}{8}$ und der andere $\frac{3}{8}$ der ganzen Figur halten, und es ist daher

der erste Theil $= \frac{5}{8} \times 1475{,}60 = 922{,}25$
der zweite „ $= \frac{3}{8} \times 1475{,}60 = 553{,}35.$

7) Nun ist $\Delta amg = 351{,}56$
$Tr. agfb = 505{,}60$

also $mabf = 857{,}16$
der erste Theil $= 922{,}25$

fehlt noch 65,09

folglich liegt die Theilungslinie in dem Pararalleltrapez $bfec$, von welchem durch eine Parallele mit den parallelen Seiten ein Stück, dessen Inhalt $= 65{,}09$, abzuschneiden ist.

8. Benutzt man die Formel Aufgabe 753. nach welcher

$$x = \left(\frac{2\,(b - a)\,p^2}{h} + a^2\right)$$

so ist $a = bf = 41{,}6$

$b = ec = 25{,}2$

$h = \beta\gamma = 15{,}8$

und $p^2 = 65{,}09$ so wird

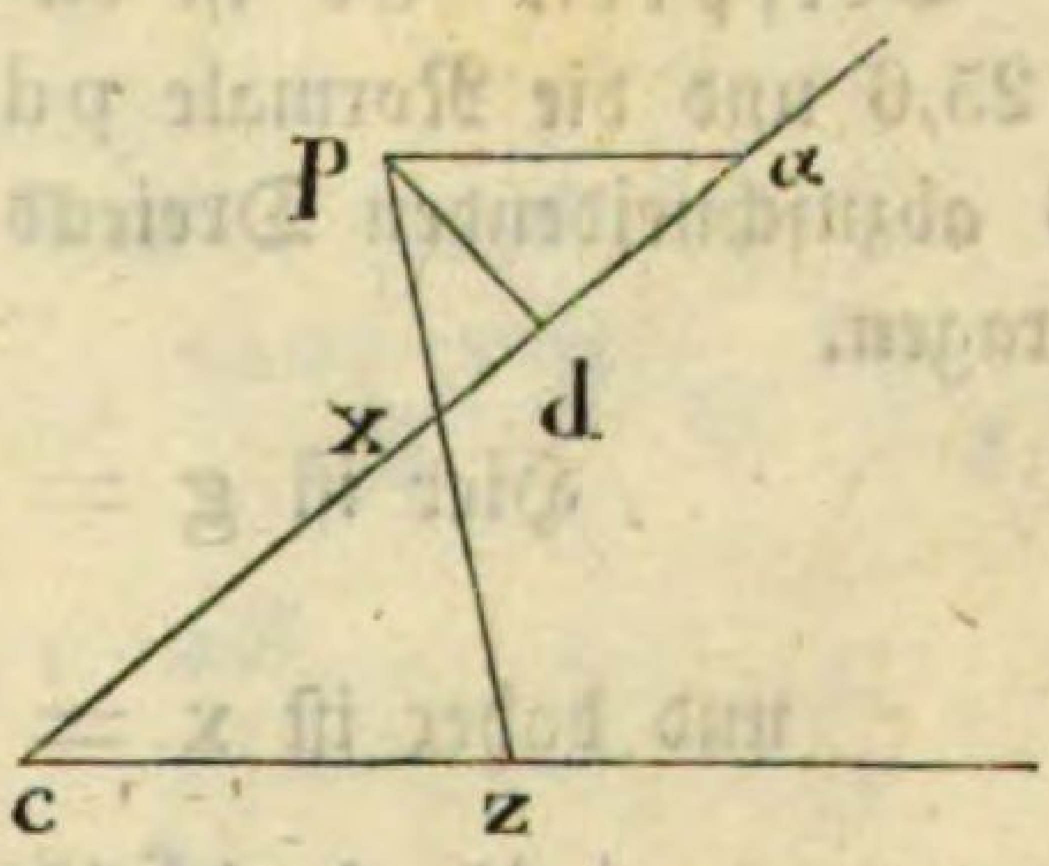
$$x = \left(\frac{2\,(-16{,}5)\,.\,65{,}09}{15{,}8} + 41{,}6^2\right)$$

$$= \sqrt{(-135{,}13 + 1730{,}56)}$$

$$= \sqrt{1595{,}43} = 39{,}94$$

Nimmt man nun auf bf das Stück $fo = 39{,}94$, und zieht durch o eine Linie parallel fe, so schneidet diese die bc in dem Punkte x, durch welchen die Theilungslinie $x\gamma$ parallel pq gezogen werden muß.

Aufgabe 756. Man soll eine Figur durch Linien, welche einer der Lage nach gegebenen Linie pq parallel sind, in mehrere Theile so theilen, daß die Theile in gegebenen Verhältnissen zu einander sind.



Aufgabe 657. Von einem außerhalb eines Winkels c gegebenen Punkte p soll eine gerade Linie pxz so durch den Winkel gezogen werden, daß das dadurch abgeschnittene Dreieck cxz einen Flächeninhalt $= q^2$ hält.

Auflösung. Durch p ziehe $p\alpha$ prll. cb, pd normal auf $c\alpha$, setze $c\alpha = a$ und $pd = h$: so ist, wenn man $cx = x$ setzt, $x\alpha = a - x$.

Da nun $\Delta cxz \sim \Delta \alpha xp$, so ist

$$\Delta cxz : \Delta \alpha xp = (cx)^2 : (x\alpha)^2$$

und da $\Delta cxz = q^2$ seyn soll, und $\Delta \alpha x p = \frac{(xa)\ (pd)}{2}$

$$= \frac{(a - x)\ h}{2}$$

$$\text{so ist } q^2 : \frac{(a - x)\ h}{2} = x^2 : (a - x)^2$$

$$\text{also } 2q^2 : h = x^2 : a - x$$
$$\text{und daher } hx^2 = 2q^2\ (a - x).$$

$$\text{Setzt man nun } 2q^2 = hg, \text{ also } \frac{2q^2}{h} = g$$
$$\text{so wird } hx^2 = hg\ (a - x)$$
$$\text{und } x^2 = ag - gx$$
$$\text{daher } x^2 + gx = ag$$
$$\text{Hierzu } \left(\frac{g}{2}\right)^2 = \frac{g^2}{4}$$
$$\text{giebt } \left(x + \frac{g}{2}\right)^2 = ag + \frac{g^2}{4} = \frac{4ag + g^2}{4}$$
$$\text{daher wird } x + \frac{g}{2} = \frac{\sqrt{g\ (4ag + g)}}{2}$$
$$\text{und } x = \frac{-g + \sqrt{g\ (4a + g)}}{2}$$

wodurch die Lage der zu ziehenden Linie pxz bestimmt ist.

Beispiel. Es ist die Lage von p bestimmt durch ca = a = 25,6 und die Normale pd = h = 8,4 Ruthen, und die Fläche des abzuschneidenden Dreiecks cxz = q^2 soll 189 Quadratruthen betragen.

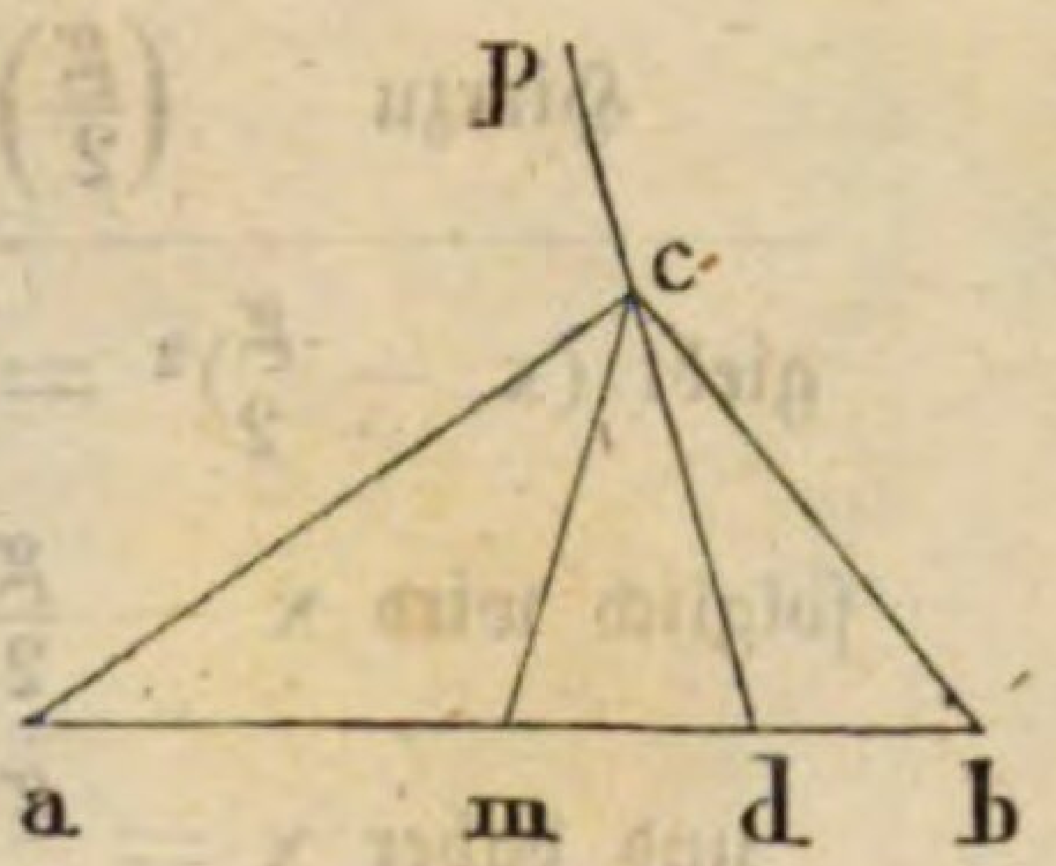
$$\text{Hier ist } g = \frac{2q^2}{h} = \frac{2\ .\ 189}{8,4} = 45$$

$$\text{und daher ist } x = \frac{-45 + \sqrt{45(4\ .\ 25,6 + 45)}}{2}$$

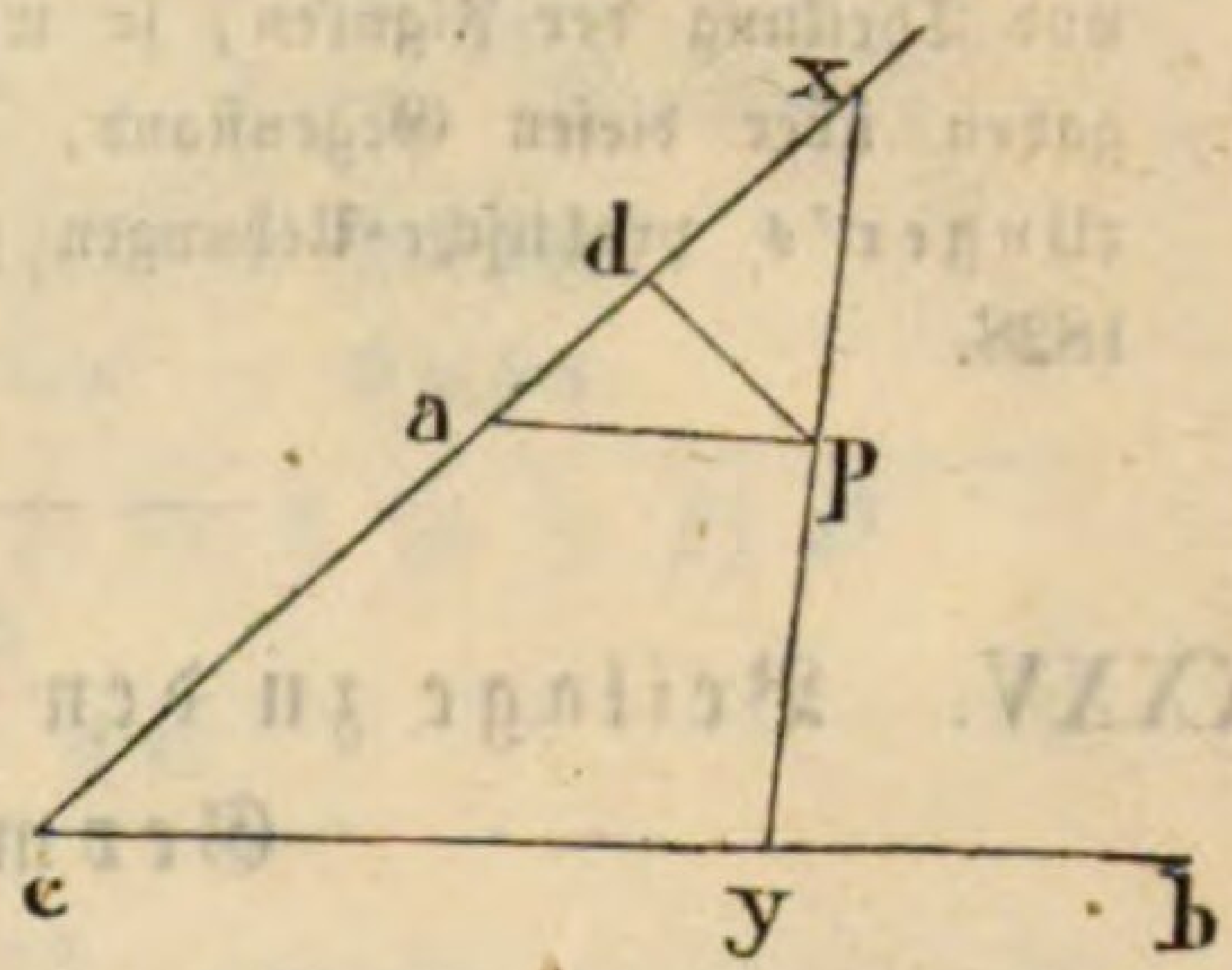
$$= \frac{-45 + \sqrt{45 \times 147,4}}{2} = \frac{-45 + 81,44}{2}$$

$$= 18,22.$$

Aufgabe 758. Von einem Punkte p außerhalb eines Dreiecks acb soll eine Linie durch das Dreieck gezogen werden, so daß dasselbe dadurch nach einem gegebenen Verhältniß getheilt wird.



Auflösung Man theile die Seite ab des Dreiecks in m nach dem gegebenen Verhältniß, und ziehe von p durch c die gerade Linie pcd. Liegt nun m zwischen a und d, so ist der abzuschneidende Theil = Δ acm kleiner als Δ acd; und es kömmt also bloß darauf an, von p durch den Winkel a eine Linie zu ziehen, welche ein Dreieck = Δ acm = q^2 abschneidet. (Aufg. 757.)



Aufgabe 759. Man soll von p aus zwei gerade Linien durch das Dreieck abc ziehen, so daß dasselbe dadurch in drei Theile, nach gegebenen Verhältnissen, getheilt wird.

Aufgabe 760. Innerhalb eines Winkels c ist ein Punkt p gegeben; man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie xpy so ziehen, daß das durch dieselbe abgeschnittene Dreieck cxy einen gegebenen Flächeninhalt = q^2 faßt.

Auflösung. Von p ziehe pa parallel ca und pd normal auf ca, setze ca = a, pd = h und cx = x, also ax = x — a.

Da nun Δ xcy $\sim$ Δ xap, so ist

$$\Delta xcy : \Delta xap = (cx)^2 : (ax)^2$$

und weil $\Delta xcy = q^2$ und $\Delta xap = \frac{(ax)\ (pd)}{2} = \frac{(x-a)h}{2}$

$$q^2 : \frac{(x-a)\,h}{2} = x^2 : (x-a)^2$$

und $2q^2 : h = x^2 : x - a$

folglich ist $hx^2 = 2q^2 (x - a)$

und wenn man $2q^2 = gh$ setzt, also $g = \frac{2q^2}{h}$ annimmt,

$$hx^2 = gh\,(x - a)$$

daher ist $x^2 = gx - ga$

und $x^2 - gx = - ga.$

$$\text{Hierzu} \quad \left(\frac{g}{2}\right)^2 = \frac{g^2}{4}$$

$$\text{giebt } (x - \frac{g}{2})^2 = \frac{g^2}{4} - ga = \frac{g^2 - 4ga}{4}$$

$$\text{folglich wird } x - \frac{g}{2} = \frac{\pm \sqrt{g(g-4a)}}{2}$$

$$\text{und daher } x = \frac{g \pm \sqrt{g(g-4a)}}{2}$$

wodurch die Lage der zu ziehenden Linie xy bestimmt ist.

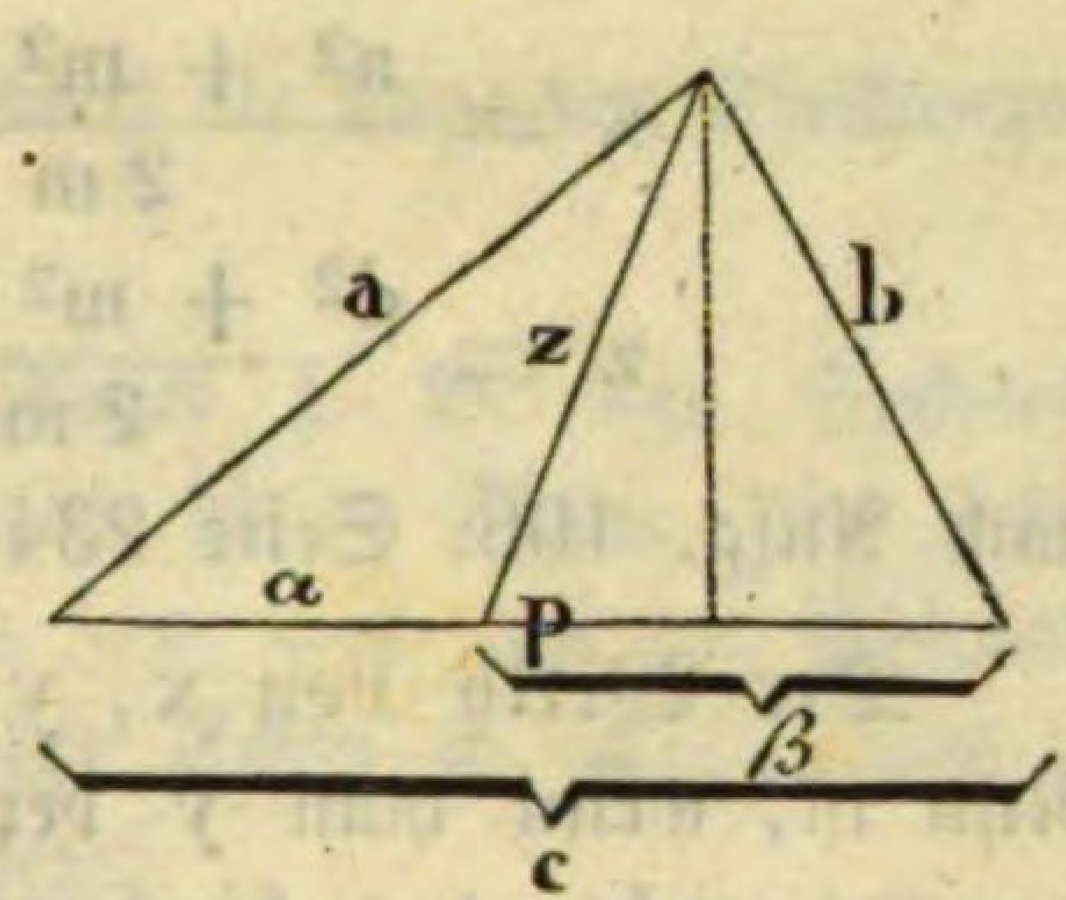
Anmerkung. Eine weitere Ausführung der Lehre von der Berechnung und Theilung der Figuren, so wie eine bedeutende Sammlung von Aufgaben über diesen Gegenstand, findet man in dem ersten Bande von „Unger's praktische Uebungen für angehende Mathematiker". Leipzig, 1828.

XXXV. Beilage zu den Elementen der rechnenden Geometrie.

Anleitung zur Theilung der Figuren durch Rechnung.

1. Ist in dem Umfang einer Figur ein Punkt gegeben, und soll von diesem Punkte aus eine Linie durch die Figur gelegt werden, durch welche von derselben ein Stück abgeschnitten wird, das einen gegebenen Flächeninhalt fasse: so hat die Ausführung durchaus keine Schwierigkeit, wenn es möglich ist, den Flächeninhalt eines jeden der Dreiecke zu ermitteln, in welche die Figur durch die Linien zerlegt wird, welche den gegebenen Punkt mit den Ecken der Figur verbinden; der Inhalt eines jeden dieser Dreiecke aber läßt sich, wenn — wie hier vorausgesetzt werden darf — die Seiten der Figur bekannt sind, finden, sobald man den Abstand des gegebenen Punktes von allen Ecken der Figur zu berechnen im Stande ist. Diese Rechnung nun kann durch Benutzung von folgenden Hülfsaufgaben in allen Fällen ausgeführt werden, wenn die Seiten der Figur und die zu der Construction derselben erforderlichen Diagonalen bekannt sind.

2. Aufgabe. Die drei Seiten eines Dreiecks sind gegeben und in der einen Seite ein Punkt der Lage nach; es soll der Abstand dieses Punktes von der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks gefunden werden.



Auflösung. Bezeichnet man die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c; die beiden Abschnitte, in welche c durch den der Lage nach gegebenen Punkt getheilt wird, mit α und β, so daß α der a und β der b anliegt; und wird der Abschnitt der c, welcher zwischen p und dem Fußpunkte der zu c gehörigen Normale liegt, mit x bezeichnet, so ist nun, wenn man die gesuchte Verbindungslinie = z setzt,

$$a^2 = \alpha^2 + z^2 + 2\alpha x \quad \text{(II. 12.)}$$
$$\text{und} \quad b^2 = \beta^2 + z^2 - 2\beta x \quad \text{(II. 13.)}$$

es ist also auch $\beta a^2 = \alpha^2\beta + \beta z^2 + 2\alpha\beta x$
und $\alpha b^2 = \alpha\beta^2 + \alpha z^2 - 2\alpha\beta x$

folglich $\beta a^2 + \alpha b^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) z^2$
Und weil $\alpha + \beta = c$, so ist

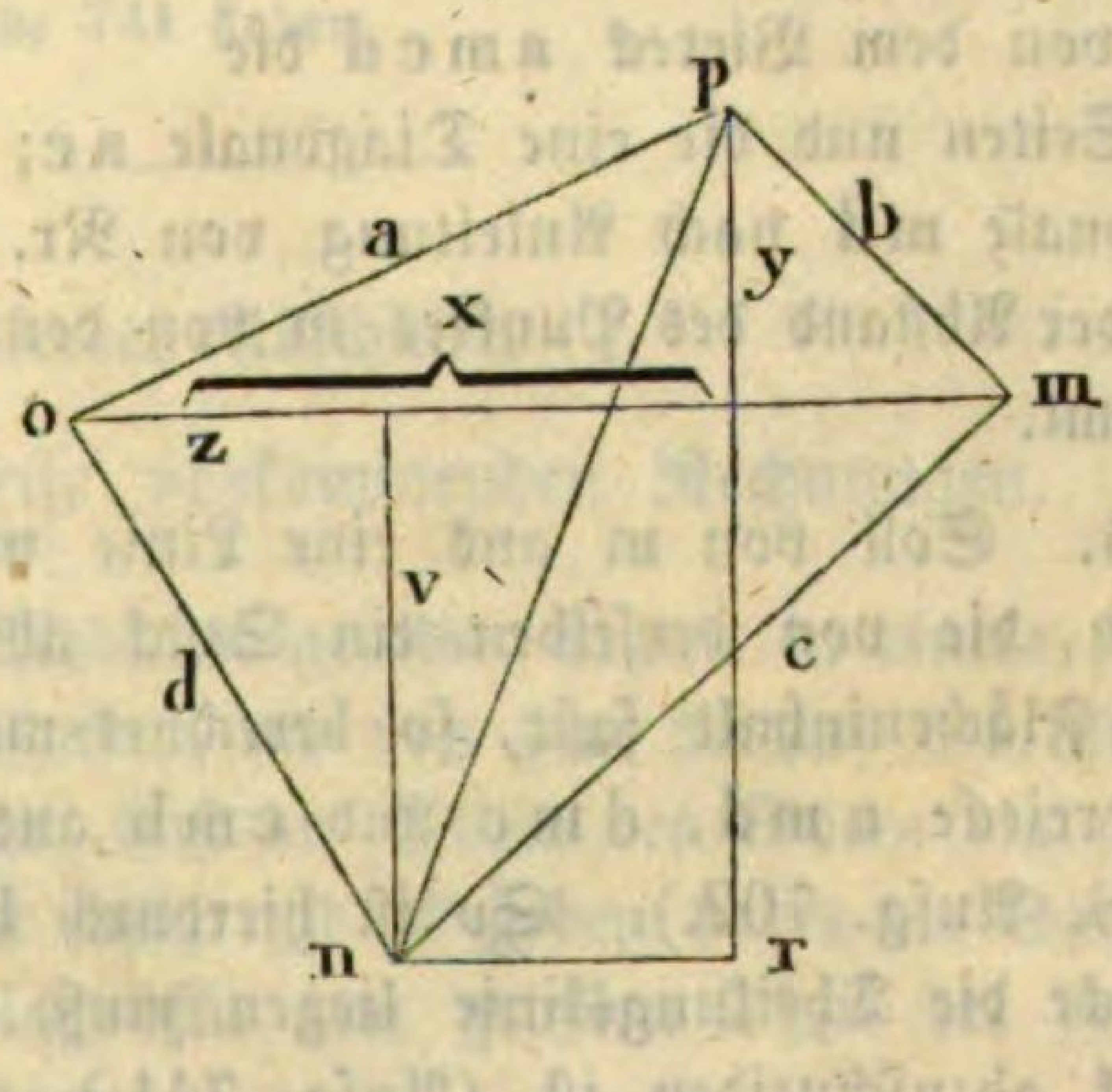
$$\beta a^2 + \alpha b^2 = \alpha\beta c + c z^2$$

also $\dfrac{\beta a^2 + \alpha b^2}{c} - \alpha\beta = z^2$

und es ist sonach der gesuchte Werth der Verbindungslinie

$$z = \sqrt{\left(\frac{\beta a^2 + \alpha b^2}{c} - \alpha\beta\right)}$$

3. Aufgabe. Die vier Seiten eines Vierecks a, b, c, und d sind gegeben, und die eine Diagonale desselben om = m; es soll hieraus der Werth der zweiten Diagonale pn = n durch Rechnung gefunden werden.



Auflösung. Bezeichnet man in dem Dreieck opm die zu om = m gehörige Normale mit y, und den an a anliegenden Abschnitt der m mit x und wird in dem Dreieck onm die zu om = m gehörige Normale = v gesetzt und der an b anliegende Abschnitt der m = z: so ist

$$x = \frac{a^2 + m^2 - b^2}{2m} \text{ und } y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$z = \frac{d^2 + m^2 - c^2}{2m} \text{ „ } v = \sqrt{(d^2 - z^2)}$$

nach Aufg. 196. Seite 234 und I. 47.

Der Werth von x, y, z und v kann also gefunden werden. Nun ist, wenn man y verlängert, und durch n die nr der nm parallel zieht, das hierdurch erhaltene Dreieck prn bei v rechtwinklig, und es ist demnach

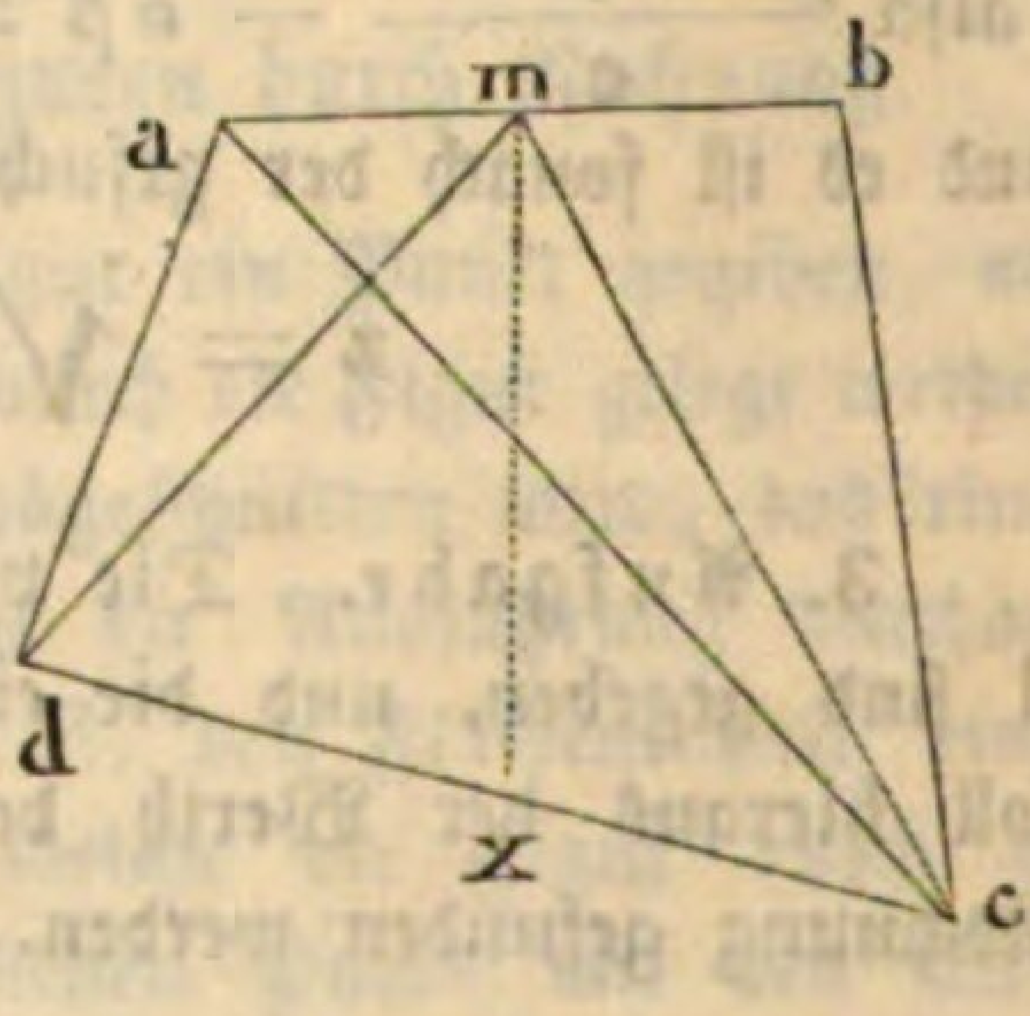
$$(pn)^2 = (pr)^2 + (nr)^2$$

es ist also auch $n^2 = (y + v)^2 + (x - z)^2$

folglich $n = \sqrt{[(y + v)^2 + (x - z)^2]}$

der gesuchte Werth der zweiten Diagonale.

4. Aufgabe. Von einem Viereck sind die vier Seiten gegeben und eine Diagonale desselben; man soll den Abstand eines in dem Umfange der Figur gegebenen Punktes von den gegenüberliegenden Ecken derselben, durch Rechnung finden.



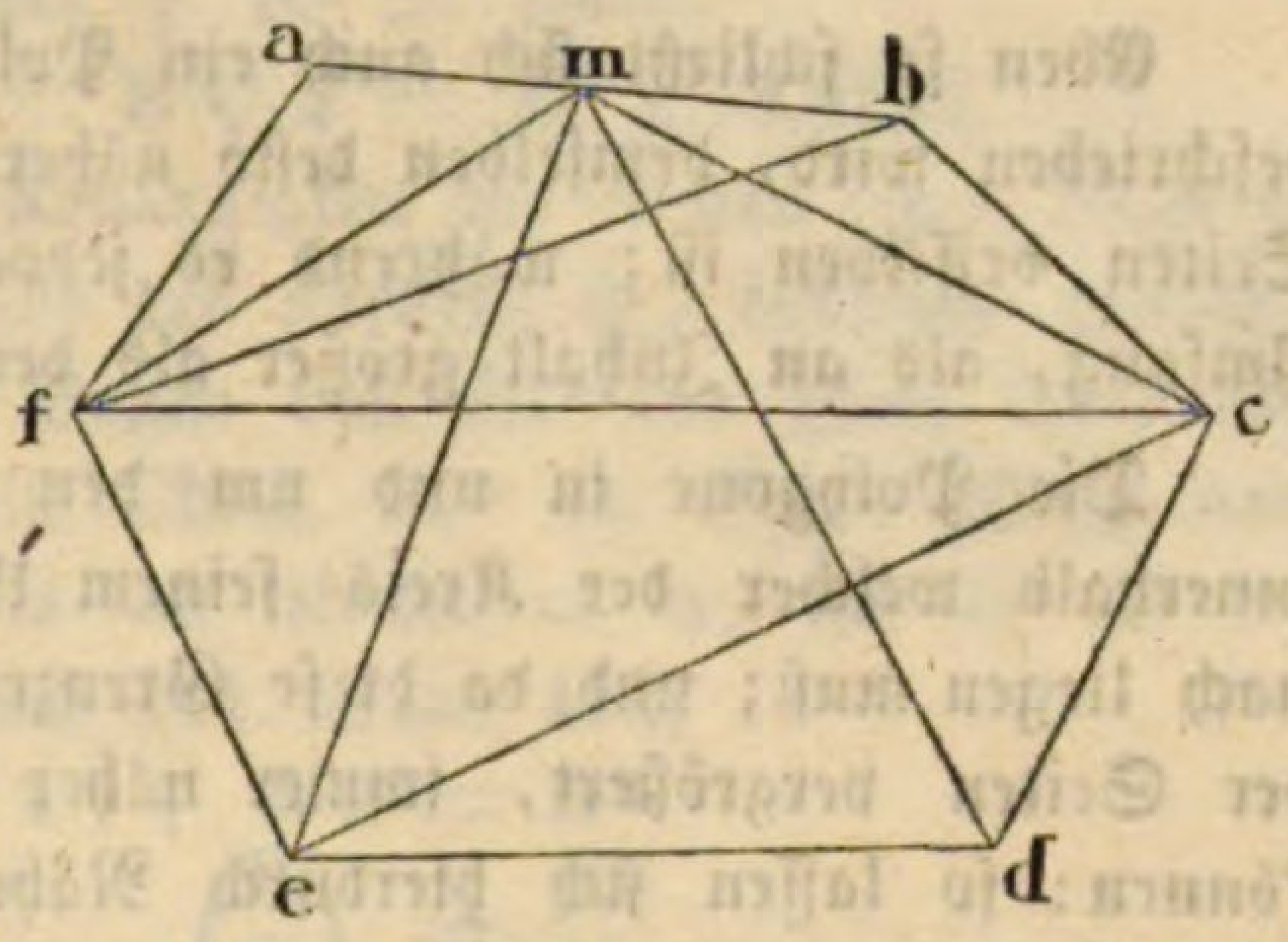
Auflösung. Da die drei Seiten des Δs abc gegeben sind und durch die bekannte Lage des Punktes m auch die Abschnitte am und mb: so findet man den Abstand des Punktes m von der einen Ecke c, also die Linie mc, nach Anleitung von Nr. 2.

Ist mc gefunden, so kennt man von dem Viereck amcd die vier Seiten und die eine Diagonale ac; man kann also die zweite Diagonale md nach Anleitung von Nr. 3 finden, und es ist sonach der Abstand des Punktes m von den Ecken c und d der Figur bestimmt.

5. Soll von m aus eine Linie mx durch die Figur gelegt werden, die von derselben ein Stück abschneidet, das einen gegebenen Flächeninhalt faßt, so berechnet man den Inhalt eines jeden der Dreiecke amd, dmc und cmb aus den drei Seiten desselben (§. 38. Aufg. 702.). So ist hierdurch bestimmt, in welchem dieser Dreiecke die Theilungslinie liegen muß, und wie Viel von diesem Dreieck abzuschneiden ist (Aufg. 741.) und es ist hierdurch der

Werth von $dx = x$ bestimmt, und hiermit die Lage der Theilungslinie mx gefunden.

6. Ist irgend eine geradlinige Figur z. B. das Sechseck abcdef gegeben; kennt man also von dieser Figur die sechs Seiten und die drei Diagonalen bf, fc, ce; und soll der Abstand des in ab gegebenen Punktes m von den Ecken c, d, e und f gefunden werden: so findet man den Werth



a) von mf aus Δabf nach Nr. 2.
b) von mc aus dem Viereck mbcf, von welchem jetzt die 4 Seiten und eine Diagonale bekannt sind, nach Nr. 3.
c) von me aus dem jetzt ebenfalls vollständig bestimmten Viereck mfec; und
d) von md aus den jetzt bekannten vier Seiten und der einen Diagonale des Vierecks mcde.

Anmerkung. Dasselbe Verfahren läßt sich immer anwenden, wie groß die Zahl der Seiten der Figur auch seyn mag, wenn von derselben so viel Seiten und Diagonalen ihrer Größe nach gegeben sind, daß sie geometrisch construirt werden kann. — Ist aber der Abstand des Punktes m von allen Ecken der Figur bekannt, so läßt sich die Lage der von m aus zu ziehenden Linie, durch welche ein zu gebendes Stück abgeschnitten wird, immer nach Anleitung der Aufgabe 741 finden.

Vierter Abschnitt.

Die bei dem Kreise vorkommenden Rechnungen.

Die Werthe der verschiedenen geraden Linien in einem Kreise, ihre Abhängigkeit von einander und von dem Radius des Kreises, lassen sich dadurch ermitteln, daß die Größe der Seiten einiger regulären Polygone bestimmt sind; und es geben daher die Sätze des vierten Buches die Grundlage für den größten Theil der bei dem Kreise vorkommenden Rechnungen.

Zeichnet man in einen Kreis irgend ein regulaires Polygon hinein, halbirt die zu den Seiten gehörigen Bogen, und verbindet die Theilpunkte: so erhält man hierdurch ein Vieleck von zwei mal so viel Seiten, und man kann nun auf gleiche Weise die Zahl der Seiten ferner verdoppeln ꝛc. Die hierdurch nach und nach gebildeten Polygone schließen sich dem Kreise immer näher an, sowohl was den Umfang, als was den Inhalt derselben anbetrifft, während sie jedoch immer kleiner als der Kreis sind.

Eben so schließt sich auch ein Polygon, welches um den Kreis beschrieben wird, demselben desto näher an, je größer die Zahl der Seiten desselben ist; während es jedoch hierbei immer sowohl an Umfang, als an Inhalt größer als der Kreis bleibt.

Die Polygone in und um den Kreis geben also Grenzen, innerhalb welcher der Kreis seinem Umfange und seinem Inhalte nach liegen muß; und da diese Grenzen dadurch, daß man die Zahl der Seiten vergrößert, immer näher an einander gerückt werden können: so lassen sich hierdurch Näherungswerthe für den Kreis selbst ermitteln, die desto genauer werden, je kleiner die Differenz zwischen dem Vieleck in und um den Kreis ist.

Die Berechnung der Polygone führt daher zuletzt zu den eigentlichen Kreisrechnungen: wenn man die Zahl der Seiten so groß annimmt, daß der Unterschied zwischen dem Vieleck in und um den Kreis kleiner als irgend eine Größe wird, der noch ein merklicher Einfluß zugestanden werden muß. Diese Ansicht liegt der Behauptung zum Grunde: daß der Kreis selbst ein reguläres Polygon sey, welches von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten eingeschlossen wird.

---

§. 40.

Aufgaben von den regulären Vielecken.

Aufgabe 761. Es soll angegeben werden, wie die Sehne eines Bogens von 60° von dem Radius des Kreises abhängt.

Auflösung. Da der Bogen von 60° der sechste Theil des Kreisumfanges ist, so ist die Sehne dieses Bogens die Seite des regulären Sechsecks, und sie ist daher dem Radius gleich. (IV. 15.) Es ist also, wenn eine Sehne überhaupt mit Chrd., also die Sehne von 60° mit Chrd. 60° bezeichnet wird, und man die

Seite des regulären n ecks im Kreise $= S_n$ setzt, für den Radius $= R$

$$\text{Chrd. } 60^0 = S_6 = R.$$

Aufgabe 762. Es soll angegeben werden: wie die Sehne eines Bogens von 90^0 von dem Radius des Kreises abhängt.

Auflösung. Da 90^0 den vierten Theil des Kreisumfanges beträgt, so ist die Sehne dieses Bogens die Seite des Quadrats im Kreise; und da

$$(S_4)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

so ist $\text{Chrd. } 90^0 = S_4 = R\sqrt{2} = R \times 1{,}4142.$

Aufgabe 763. Die Abhängigkeit der Sehne eines Bogens, der 36^0 hält, von dem Radius des Kreises, soll bestimmt werden.

Auflösung. Da ein Bogen von 36^0 den 10ten Theil des Kreisumfanges beträgt, so ist $\text{Chrd. } 36^0 = S_{10}$. Setzt man aber die Seite des Zehnecks im Kreise $= x$, so ist $x^2 = R(R - x)$ (Lehrs. 160. und 161. Seite 422)

$$\text{folglich ist } x^2 + Rx = R^2$$

$$\text{hierzu } \left(\frac{R}{2}\right) = \frac{R^2}{4}$$

$$\text{giebt } (x + \frac{R}{2})^2 = \frac{5R^2}{4}$$

$$\text{und es ist daher } x + \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{5}$$

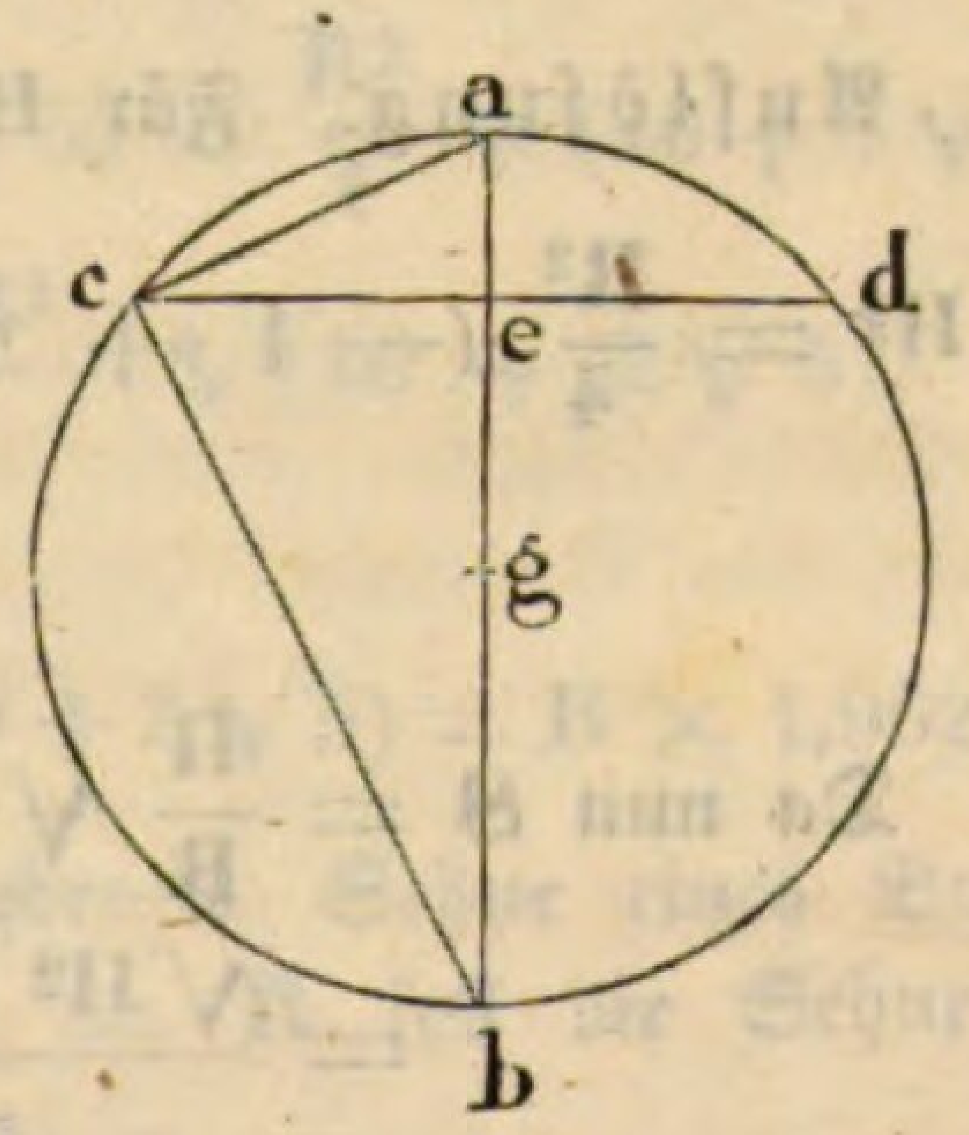
$$\text{also } x = -\frac{R}{2} + R^2\sqrt{5}$$

$$= \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

und weil $-1 + \sqrt{5} = 1{,}236$, so ist $x = R \times 0{,}618$ und es ist sonach

$$\text{Chrd. } 36^0 = S_{10} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5}) = R \times 0{,}618.$$

Aufgabe 764. Die Sehne eines Bogens und der Radius des Kreises sind gegeben; es soll hieraus die Sehne des doppelten Bogens berechnet werden.



Analysis. Setzt man die Sehne des Bogens $ca = H$, die des doppelten Bogens $cd = S$ und ist $ga = R$ der Radius, also $ab = 2R$, so ist

$$ae : ac = ac : ab \quad \text{(VI. 8. Zus.)}$$

also $ae : H = H : 2R$ und $(ae) = \frac{H^2}{2R}$.

Nun ist $(ce)^2 = (ac)^2 - (ae)^2$

also $\left(\frac{S}{2}\right)^2 = H^2 - \left(\frac{H^2}{2R}\right)^2$

und daher $\frac{S^2}{4} = H^2 - \frac{H^4}{4R^2} = \frac{4R^2 H^2 - H^4}{4R^2}$

folglich ist $S^2 = \frac{H^2 (4R^2 - H^2)}{R^2}$

und daher $S = \frac{H}{R} \sqrt{(4R^2 - H^2)} = \frac{H}{R} \sqrt{(2R + H)(2R - H)}$.

Aufgabe 765. Die Seite des regulären Sechsecks im Kreise $=$ Chrd. 60^0 ist $= R$ (Aufg. 761.); es soll hieraus die Seite des gleichseitigen Dreiecks im Kreise $=$ Chrd. 120^0 berechnet werden.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$S = \frac{H}{R} \sqrt{(4R^2 - H^2)} \quad \text{(Aufg. 764.)}$$

$H = R$, so wird $S = S_3$, und es ist also

$$S_3 = \text{Chrd. } 120^0 = \frac{R}{R} \sqrt{(4R^2 - R^2)}$$

$$= \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3} = R \times 1{,}732.$$

Aufgabe 766. Die Seite des regulären Zehnecks im Kreise $=$ Chrd. 36^0 ist $= \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$ (Aufg. 763.); es soll hieraus die Seite des regulären Fünfecks, $S_5 =$ Chrd. 72^0, berechnet werden.

Auflösung. Für $H = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$

ist $H^2 = \frac{R^2}{4}(-1 + \sqrt{5})^2 = \frac{R^2}{4}(1 - 2\sqrt{5} + 5)$

$$= \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}).$$

Da nun $S = \frac{H}{R}\sqrt{(4R^2 - H^2)}$ (Aufg. 764.)

$$= \frac{\sqrt{H^2 (4R^2 - H^2)}}{R}$$

so ist, wenn man für H^2 den obigen Werth setzt,

$$RS_5 = \sqrt{\left[\frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})\left[4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})\right]\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) \cdot \frac{R^2}{4}[16 - (6 - 2\sqrt{5})]\right]}$$

$$= \frac{R^2}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{R^2}{4}\sqrt{(40 - 8\sqrt{5})}$$

$$= \frac{R^2}{4}\sqrt{4(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{2K^2}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

und es ist daher

$$S_5 = \text{Chrd. } 72^0 = \frac{R}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = R \times 1{,}17557.$$

Aufgabe 767. Die Seite des regulären Fünfecks = Chrd. 72^0 ist gegeben $= \frac{R}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$; man soll hieraus die Diagonale dieser Figur berechnen.

Auflösung. Die Diagonale des Fünfecks = D_5 ist die Sehne des doppelten Bogens, wenn man die Sehne des einfachen Bogens = S_5 nimmt. Man erhält demnach den Werth von D_5, wenn man in der Gleichung

$$S = \frac{\sqrt{H^2(4R^2 - H^2)}}{R}$$

setzt, $H = \frac{R}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$, also $H^2 = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})$

und es ist daher

$$R\,D_5 = \sqrt{\left[\frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})\left[4R^2 - \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})\right]\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5} \cdot \frac{R^2}{4}[16 - (10 - 2\sqrt{5})]\right]}$$

$$= \frac{R^2}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})} = \frac{R^2}{4}\sqrt{(40 + 8\sqrt{5})}$$

$$= \frac{R^2}{4}\sqrt{4(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{2R^2}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}.$$

Folglich ist

$$D_5 = \text{Chrd. } 144^0 = \frac{R}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = R \times 1{,}902113.$$

Aufgabe 768. Aus der gegebenen Sehne eines Bogens = S und dem Radius des Kreises = R soll die Sehne des halben Bogens = H berechnet werden.

Auflösung. Es ist

$$S = \frac{H}{R}\sqrt{(4R^2 - H^2)} \quad \text{(Aufg. 764.)}$$

also ist $R^2 S^2 = H^2 (4R^2 - H^2)$.

Setzt man also $H^2 = Z$, so wird

$R^2 S^2 = 4R^2 Z - Z^2$, und daher

$Z^2 - 4R^2 Z = - R^2 S^2$

Hierzu $(2R^2)^2 = 4R^4$

giebt $(2R^2)^2 - 4R^2 Z^2 + Z^2 = R^2 (4R^2 - S^2)$

folglich ist $2R^2 - Z = R\sqrt{(4R^2 - S^2)}$

und daher $Z = 2R^2 - R\sqrt{(4R^2 - S^2)}$

und da $Z = H^2$, so ist

$$H = \sqrt{[2R^2 - R\sqrt{(4R^2 - S^2)}]}.$$

Aufgabe 769. Aus der gegebenen Seite des regulären Sechsecks $= R =$ Chrd. 60^0 soll die Seite des Zwölfecks $= S_{12} =$ Chrd. 30^0 gefunden werden.

Auflösung. Setzt man in dem für H erhaltenen Ausdruck $S = R$, so wird $H = S_{12}$; und es ist hiernach

$$S_{12} = \text{Chrd. } 30^0 = \sqrt{[2R^2 - R\sqrt{(4R^2 - R^2)}]}$$
$$= \sqrt{(2R^2 - R\sqrt{3R^2})}$$
$$= \sqrt{(2R^2 - R^2\sqrt{3})} = \sqrt{S^2(2 - \sqrt{3})}.$$

Es ist also

$$S_{12} = \text{Chrd. } 30^0 = R\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = R \times 0{,}5176.$$

Anmerkung. Da $\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$
$= \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist auch
$S_{12} = R(\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

Aufgabe 770. Die Seite des regulären Vierecks im Kreise ist $=$ Chrd. $90^0 = R\sqrt{2}$ (Aufg. 762.); es soll hieraus die Seite des regulären Achtecks $= S_8 =$ Chrd. 45^0 berechnet werden.

Auflösung. Dieselbe wird gefunden, wenn man in dem Werthe von H (Aufg. 768.) setzt, $S = R\sqrt{2}$

also $S^2 = 2R^2$. Da nun

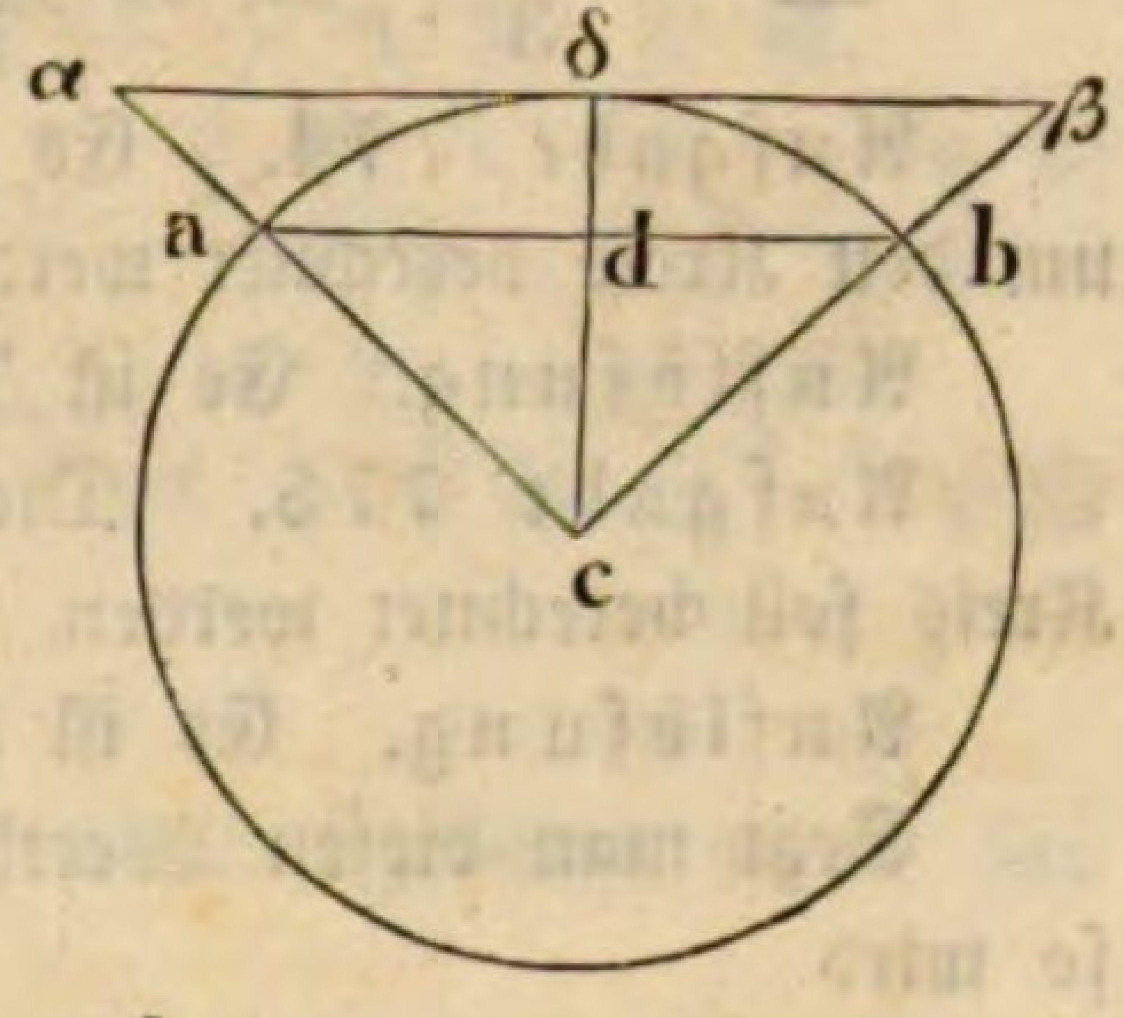
$H = \sqrt{[2R^2 - R\sqrt{(4R^2 - S^2)}]}$, so ist

$$S_8 = \text{Chrd. } 45^0 = \sqrt{[2R^2 - R\sqrt{(4R^2 - 2R^2)}]}$$
$$= \sqrt{(2R^2 - R\sqrt{2R^2})}$$
$$= \sqrt{(2R^2 - R^2\sqrt{2})} = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2})}$$

und es ist sonach

$$S_8 = \text{Chrd. } 45^0 = R\sqrt{(2-\sqrt{2})} = R \times 0{,}76536.$$

Aufgabe 771. Die Seite eines regulären Vielecks im Kreise $= S$ und der Radius des Kreises $= R$ sind gegeben; es soll hieraus die Seite des Vielecks von eben so vielen Seiten, das um den Kreis beschrieben werden kann, berechnet werden.



Analysis. Ist $ab = S$ die Seite des Vielecks im Kreise, und man halbirt den Bogen ab in δ und zieht an δ die Tangente $\alpha\beta$, welche von den durch a und b von dem Mittelpunkte c aus gezogenen Linien begrenzt wird, so ist $\alpha\beta$ die Seite des Vielecks um den Kreis; und es ist

$$cd : c\delta = ab : \alpha\beta$$

also $(cd) : R = S : (\alpha\beta)$

Und da $cd = \sqrt{[(cb)^2 - (bd)^2]} = \sqrt{\left(R - \frac{S^2}{4}\right)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{4R^2 - S^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(4R^2 - S^2)}}{2}$$

so ist, wenn man $\alpha\beta = T$ setzt,

$$\frac{\sqrt{(4R^2 - S^2)}}{2} : R = S : T$$

und hieraus erhält man

$$T = \frac{2RS}{\sqrt{(4R^2 - S^2)}} = \frac{2RS}{\sqrt{(2R+S)(2R-S)}}.$$

Aufgabe 772. Aus der gegebenen Seite des regulären Dreiecks im Kreise $= R\sqrt{3}$ (Aufg. 765.) soll die des gleichseitigen Dreiecks um den Kreis berechnet werden.

Auflösung. Setzt man in dem für T erhaltenen Werth

$$T = \frac{2RS}{\sqrt{(4R^2 - S^2)}}$$

$S = R\sqrt{3}$, also $S^2 = 3R^2$, und wird die Seite des Dreiecks um den Kreis mit T_3 bezeichnet, so erhält man

$$T_3 = \frac{2R \,.\, R\sqrt{3}}{\sqrt{(4R^2 - 3R^2)}} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{\sqrt{R^2}} = 2R\sqrt{3} =$$
$R \times 3{,}464.$

Zusatz. Da $S_3 = R\sqrt{3}$ und $T_3 = 2R\sqrt{3}$: so ist $T_3 = 2\,S_3$.

Aufgabe 773. Die Seite des regulären Sechsecks um den Kreis soll berechnet werden.

Auflösung. Dieselbe ist

$$T_6 = \frac{2\,R\,.\,R}{\sqrt{(4\,R^2 - R^2)}} = \frac{2\,R^2}{\sqrt{3\,R^2}} = \frac{2\,R}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\,R\sqrt{3}}{3} = R \times 1{,}1547.$$

Aufgabe 774. Es soll die Seite des regulären Vierecks um den Kreis berechnet werden.

Auflösung. Es ist $T_4 = 2\,R.$

Aufgabe 775. Die Seite des regulären Achtecks um den Kreis soll berechnet werden.

Auflösung. Es ist $S_8 = R\sqrt{(2 - \sqrt{2})}.$

Setzt man diesen Werth für **S** in der Formel (Aufg. 771.), so wird

$$T_8 = \frac{2\,R\,.\,R\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{\sqrt{[4\,R^2 - R^2(2 - \sqrt{2})]}} = \frac{2\,R^2\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{\sqrt{R^2(2 + \sqrt{2})}}$$

$$= 2\,R\sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)}$$

$$= 2\,R\sqrt{\left(\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})\,(2 - \sqrt{2})}\right)} = 2R\sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}}$$

$$= 2\,R\sqrt{\frac{2\,(2 - \sqrt{2})^2}{4}} = R\,(2 - \sqrt{2})\,.\sqrt{2}$$

$$= R\,(2\sqrt{2} - 2) = 2\,R\,(-1 + \sqrt{2}) = R \times 0{,}8284.$$

Aufgabe 776. Die Seite des regulären Zehnecks um den Kreis soll gefunden werden.

Auflösung. Da $S_{10} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$ Aufg. 763.) und daher $(S_{10})^2 = \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$, so ist, wenn man diesen Werth für **S** in der Gleichung (Aufg. 771.) setzt,

$$T_{10} = \frac{2\,R\,.\,\frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})}{\sqrt{[4\,R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})]}}$$

$$= \frac{R^2(-1 + \sqrt{5})}{\sqrt{\frac{R^2}{4}[16 - (6 - 2\sqrt{5})]}} = \frac{R^2(-1 + \sqrt{5})}{\frac{R}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$$

$$= 2\,R\,\sqrt{\left(\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{10+2\sqrt{5}}\right)} = 2\,R\,\sqrt{\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right)}$$

$$= 2\,R\,\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)} = R \times 0{,}6498.$$

Aufgabe 777. Der Werth der Seite des regulären Zwölfecks um den Kreis soll berechnet werden.

Auflösung. Da $S_{12} = R\sqrt{(1-\sqrt{3})}$: so ist

$$T_{12} = \frac{2\,R\,.\,R\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{[4\,R^2 - R^2\,(2-\sqrt{3})]}} = \frac{2\,R^2\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{R\sqrt{(2+\sqrt{3})}}$$

$$= 2\,R\,\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})}}$$

$$= 2\,R\,(2-\sqrt{3})$$

$$= R \times 0{,}5359.$$

Aufgabe 778. Der Umfang **P** eines regulären necks soll bestimmt werden.

Auflösung. Ist die Seite des necks $= S$, so ist der ganze Umfang desselben $P = nS$.

Aufgabe 779. Die Fläche eines regulären necks $= Q^2$ soll gefunden werden.

Auflösung. Ist $ab = S$ (Figur Aufgabe 771. S. 683) die Seite des necks, so besteht dasselbe aus n Dreiecken, von welchen jedes $= \Delta abc$ ist; und von diesem Dreieck ist die Grundlinie $ab = S$

und die Höhe $cd = \sqrt{\left(R^2 - \frac{S^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(4\,R^2 - S^2)}}{2}$

folglich ist $\Delta abc = \frac{(ab) \times (cd)}{2} = \frac{S\sqrt{(4\,R^2 - S^2)}}{4}$

und daher die gesuchte Fläche des regulären necks

$$Q^2 = \frac{nS\sqrt{(4\,R^2 - S^2)}}{4}.$$

Zusatz. Es ist $Q^2 = \frac{n\,.\,S \times (cd)}{2}$.

Nun ist nS der Umfang des Vielecks und cd ist der Abstand der Seiten desselben von dem Mittelpunkte des Kreises; folglich ist die Fläche eines regulären Vielecks einem Dreiecke gleich, welches den Umfang der Figur zur Grundlinie und den Abstand der Seiten von dem Mittelpunkte des Kreises zur Höhe hat.

Aufgabe 780. Es soll angegeben werden, wie der Umfang und die Fläche eines regulären Dreiecks im Kreise von dem Radius dieses Kreises abhängt.

Auflösung. Da $S_3 = R\sqrt{3} = R \times 1{,}732$: so ist, wenn man den Umfang $= P_3$ und die Fläche $= Q^2{}_3$ setzt

$$P_3 = 3 \times R \times 1{,}732 = R \times 5{,}196$$

$$\text{und } Q^2{}_3 = \frac{3R \times 1{,}732\sqrt{(4R^2 - 3R^2)}}{4} = \frac{3R \times 1{,}732}{4} \,.\, R$$

$$= R^2 \times 1{,}299.$$

Aufgabe 781. Der Umfang und die Fläche des regulären Sechsecks im Kreise soll durch den Radius dieses Kreises ausgedrückt werden.

Auflösung. Es ist $S_6 = R$, und daher

$$P_6 = 6R$$

$$\text{und } Q^2{}_6 = \frac{6R\sqrt{(4R^2 - R^2)}}{4} = \frac{3R\sqrt{3}R^2}{2}$$

$$= \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = R^2 \times 2{,}598.$$

Aufgabe 782. Der Umfang und die Fläche eines regulären Zwölfecks soll durch den Radius des Kreises bestimmt werden, der um dasselbe sich beschreiben läßt.

Auflösung. Da $S_{12} = R\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ [Aufg. 769.], so ist $P_{12} = 12\,S_{12} = 12\,R \times R\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$

$$\text{und } Q^2{}_{12} = \frac{12R\sqrt{(2 - \sqrt{3})} \times \sqrt{[4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3})]}}{4}$$

$$= 3R\sqrt{(2 - \sqrt{3})} \times R\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$$

$$= 3R^2\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 3R^2\sqrt{(4 - 3)} = 3R^2.$$

Zusatz. Die Fläche des regulären Zwölfecks im Kreise ist also drei Mal so groß, als das Quadrat des Radius dieses Kreises. (Lehrs. 175. S. 425.)

Aufgabe 783. Der Umfang und die Fläche des regulären Achtecks soll durch den Radius des Kreises ausgedrückt werden, der um dasselbe sich beschreiben läßt.

Auflösung. Da $S_8 = R\sqrt{(2 - \sqrt{2})} = R \times 0{,}76536$ (Aufg. 770.), so ist

$$P_8 = 8 \times R \times 0{,}76536 = R \times 6{,}12288$$

$$\text{und } Q^2{}_8 = \frac{8R\sqrt{(2 - \sqrt{2})} \times \sqrt{[4R^2 - R^2(2 - \sqrt{2})]}}{4}$$

$$= 2\,R\sqrt{(2-\sqrt{2})} \times R\sqrt{(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2\,R^2\sqrt{(2-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{2})} = 2\,R^2\sqrt{2}$$
$$= R^2 \times 2{,}8284.$$

Aufgabe 784. Es soll der Umfang und die Fläche des regulären Zehnecks im Kreise durch den Radius dieses Kreises ausgedrückt werden.

Auflösung. Es ist $S_{10} = \frac{R}{2}(-1+\sqrt{5}) = R \times 0{,}618$, folglich

$$P_{10} = 10\,R \times 0{,}618 = R \times 6{,}18$$

und $$Q^2{}_{10} = \frac{10}{4}\cdot\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5}) \times \sqrt{(4\,R^2 - \frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5})]}$$
$$= \frac{10\,R}{8}(-1+\sqrt{5}) \times \sqrt{\frac{R^2}{4}[16-(6-2\sqrt{5})]}$$
$$= \frac{10\,R}{8}(-1+\sqrt{5}) \times \frac{R}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{5\,R^2}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})\,(6-2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{5\,R^2}{8}\sqrt{(40-8\sqrt{5})} = \frac{5\,R^2}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{5\,R^2}{4} \times 2{,}35114 = R^2 \times 2{,}9389.$$

Aufgabe 785. Es soll berechnet werden, wie groß der Umfang der regulären Vielecke von 20, 40, 80, 160 und 320 Seiten ist, die in und um einen und denselben Kreis beschrieben werden können.

Auflösung. Mit Hülfe der Formel Aufg. 768. kann man aus der bekannten Seite eines Vielecks die eines anderen von doppelt so viel Seiten finden. Da nun die Seite des Zehnecks bereits gefunden ist (Aufg. 762.), so kann man hieraus die des 20ecks berechnen; hieraus ferner die des 40ecks rc. Aus den gefundenen Seiten dieser Vielecke im Kreise lassen sich nun die der Vielecke um den Kreis mit Hülfe der Formel Aufg. 671. berechnen. Aus der bekannten Seite aber wird der Umfang eines regulären Vielecks endlich erhalten, wenn man dieselbe mit der Zahl der Seiten des Vielecks multiplicirt.

Durch diese Rechnung findet man

$S_{10} = 0{,}6180340 \times R$ und hieraus $T_{10} = 0{,}6498394 \times R$
$S_{20} = 0{,}3128690 \times R$ „ $T_{20} = 0{,}3167688 \times R$
$S_{40} = 0{,}1569182 \times R$ „ $T_{40} = 0{,}1574034 \times R$
$S_{80} = 0{,}0785196 \times R$ „ $T_{80} = 0{,}0785802 \times R$
$S_{160} = 0{,}0392674 \times R$ „ $T_{160} = 0{,}0392750 \times R$
$S_{320} = 0{,}0196346 \times R$ „ $T_{320} = 0{,}0196354 \times R$

Daher ist der Umfang des regulären Vielecks

von Seiten	im Kreise	um diesen Kreis
10	$6{,}180340 \times R$	$6{,}498394 \times R$
20	$6{,}257380 \times R$	$6{,}335376 \times R$
40	$6{,}276728 \times R$	$6{,}296136 \times R$
80	$6{,}281568 \times R$	$6{,}286416 \times R$
160	$6{,}282784 \times R$	$6{,}284000 \times R$
320	$6{,}283072 \times R$	$6{,}283328 \times R$.

---

§. 41.

Aufgaben von dem Kreise.

Aufgabe 786. Es soll angegeben werden, wie die Länge des Umfangs eines Kreises von dem Durchmesser D desselben abhängt.

Auflösung. Setzt man den Umfang des Kreises $= U$, den eines regulären Vielecks im Kreise $= P$ und den des Vielecks um den Kreis $= Q$, so ist

$$U > P \quad (I.\ 20.)$$
$$\text{und } U < Q \quad (I.\ 21.)$$

Haben die Vielecke P und Q aber 320 Seiten, so ist

$$P = 6{,}283072 \times R \text{ und } Q = 6{,}283328 \times R$$

oder weil $R = \frac{1}{2} D$

$$P = 3{,}141536 \times D \text{ und } Q = 3{,}141664 \times D;$$

folglich ist auch

$$U > 3{,}141536 \times D$$
$$\text{und } U < 3{,}141664 \times D$$

Da nun diese beiden Werthe erst in der vierten Decimalstelle verschieden sind, so gelten sie auch für den Werth von U auf so viel Decimalstellen genau; und es ist daher $U = 3{,}141 \times D$, oder vielmehr $U = 3{,}1416 \times D$.

Wird die bei der vorigen Aufgabe angelegte Rechnung noch weiter fortgesetzt, und benutzt man die dort gefundenen Werthe hier für **P** und **Q**: so findet man

$$U = 3{,}141592653589793\ldots \times D$$

wo auch die letzte Decimalstelle noch genau ist.

Zusatz. Die Zahl 3,14159 ..., mit welcher der Durchmesser **D** des Kreises multiplicirt werden muß, um den Umfang zu erhalten, wird die Ludolphsche Zahl genannt und mit π bezeichnet, und es ist daher

$$U = D\pi$$

oder auch, weil $D = 2R$

$$U = 2R\pi$$

und es ist in den meisten Fällen ausreichend, wenn man $\pi = 3{,}14$, und bei feinen Rechnungen $\pi = 3{,}1416$ annimmt.

Beispiel. Ist der Radius eines Kreises = 34,5, so ist der Umfang desselben

$$U = 2 \,.\, 34{,}5 \times \pi = 69 \times 3{,}1416 = 216{,}77.$$

Aufgabe 787. Aus dem gegebenen Radius eines Kreises soll der Flächeninhalt desselben berechnet werden.

Auflösung. Die Fläche des Kreises wird eben so, wie die eines jeden regulären Vielecks gefunden: wenn man den Umfang mit dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte multiplicirt und von dem Produkte die Hälfte nimmt. Daher ist, wenn man die Kreisfläche $= K^2$ setzt,

$$K^2 = \frac{UR}{2}$$

und weil $U = 2R\pi$, so ist auch

$$K^2 = \frac{2R\pi \,.\, R}{2} = R^2\pi.$$

Die Kreisfläche wird also erhalten, wenn man das Quadrat des Radius mit π multiplicirt.

Beispiel. Ist der Radius = 34,5, so ist die Fläche des Kreises $K^2 = 34{,}5^2 \times \pi = 34{,}5^2 \times 3{,}1416 = 3739{,}2894$

Aufgabe 788. Der Umfang eines Kreises = **U** ist gegeben; es soll hieraus der Radius und die Fläche desselben berechnet werden.

Auflösung. Da $2R\pi = U$: so ist $R = \frac{U}{2\pi}$

und da $K^2 = \frac{UR}{2}$, so ist auch $K^2 = \frac{U^2}{4\pi}$.

Es ist aber $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$, folglich ist

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \times 0{,}159 \text{ und } \mathbf{K}^2 = \mathbf{U}^2 \times 0{,}0795.$$

Beispiel. Ist der Umfang eines Kreises = 308,45 so findet man

$$\mathbf{R} = 49{,}04 \text{ und } \mathbf{K}^2 = 7563{,}74.$$

Aufgabe 789. Die Fläche eines Kreises = $\mathbf{K}^2$ ist gegeben; es soll hieraus der Radius und der Umfang gefunden werden.

Auflösung. Da $\mathbf{R}^2\pi = \mathbf{K}^2$, so ist $\mathbf{R}^2 = \frac{\mathbf{K}^2}{\pi}$

$= \mathbf{K}^2 \times 0{,}318$

und es ist daher $\mathbf{R} = \sqrt{(\mathbf{K}^2 \times 0{,}318)}$

und da $\mathbf{U}\mathbf{R} = 2\,\mathbf{K}^2$, so ist $\mathbf{U} = \frac{2\,\mathbf{K}^2}{\mathbf{R}}$

also $\mathbf{U} = \dfrac{2\,\mathbf{K}^2}{\sqrt{\mathbf{K}^2 \cdot \frac{1}{\pi}}} = \sqrt{4\,\mathbf{K}^2\,\pi}.$

Beispiel. Wenn die Fläche eines Kreises = 966,15 ist, so findet man $\mathbf{R} = 17{,}536$ und $\mathbf{U} = 110{,}182$.

Aufgabe 790. Der Radius eines Kreises = $\mathbf{R}$ ist gegeben und die Größe eines Bogens desselben in Graden ausgedrückt; man soll hieraus die wahre Länge dieses Bogens berechnen.

Auflösung Hält der Bogen b Grad = b^o, so findet, weil der ganze Umfang aus 360^o besteht, die Proportion statt:

$$b^o \,.\, 360^o = \mathbf{B} : \mathbf{U} \quad (\text{VI. } 33.)$$

wenn **B** die wahre Länge des Bogens bedeutet;

folglich ist $\mathbf{B} = \frac{b}{360} \cdot \mathbf{U}$

und weil $\mathbf{U} = 2\,\mathbf{R}\pi$, so ist

$$\mathbf{B} = \frac{b}{360} \cdot 2\,\mathbf{R}\pi = b\,\mathbf{R} \cdot \frac{\pi}{180}$$

oder da $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745$, so ist

$$\mathbf{B} = b\,\mathbf{R} \times 0{,}01745.$$

Beispiel. Ist der Radius = 42, so findet man die Länge eines Bogens von $54^o\ 28'\ 20''$, wenn man setzt

$b = 54^o\ 28\tfrac{1}{3}' = 54^o + \left(\frac{28\frac{1}{3}^o}{60}\right) = 54\tfrac{17}{36}$

und es ist daher $\mathbf{B} = 54\tfrac{17}{36} \cdot 42 \times 0{,}01745$

$$= \frac{1961 \,.\, 42 \,.\, 0{,}01745}{36} = 39{,}92.$$

Aufgabe 791. Der Radius eines Kreises = R ist gegeben und die Zahl der Grade, welche der zu einem Kreisausschnitte gehörige Bogen hält; man soll die Fläche des Ausschnitts berechnen.

Auflösung. Hält der Bogen b^0 und ist die Fläche des Ausschnitts $= A^2$, so ist

$$A^2 = \frac{RB}{2} = \frac{R}{2} \times b\ R\ .\ \frac{\pi}{180}$$

und daher $A^2 = R^2 b \times \frac{\pi}{360} = R^2 b = 0{,}008725.$

Beispiel. Ist der Radius eines Kreises = 72,9, so ist die Fläche des Ausschnittes, zu welchem ein Bogen von $47^0\ 20'\ 40''$ gehört,

$$A^2 = 72{,}9^2\ .\ 47\tfrac{31}{90} \times 0{,}008275$$

$$= \frac{72{,}9 \times 72{,}9 \times 4261 \times 0{,}008275}{90}$$

$$= 8{,}1 \times 7{,}29 \times 4216 \times 0{,}008275 = 2060{,}07.$$

Aufgabe 792. Der Radius eines Kreises = R und die Länge eines Bogens = B sind gegeben; es soll hieraus die Fläche des zu diesem Bogen gehörigen Abschnitts berechnet werden.

Auflösung. Es ist $A^2 = \frac{BR}{2}$.

Aufgabe 793. Aus der gegebenen Länge eines Bogens = B und dem Radius des Kreises = R soll berechnet werden, wie viel Grad dieser Bogen hält.

Auflösung. Da $bR \frac{\pi}{180} = B$ (Aufg. 790.)

so ist $b = \frac{B}{R} \times \frac{180}{\pi}$

und weil $\frac{180}{\pi} = 57{,}29578$, so ist

$$b = \frac{B \times 57{,}29578}{R}.$$

Beispiel. Der Radius eines Kreises ist = 71,9, und die Länge eines Bogens dieses Kreises = 134,1; es soll bestimmt werden, wie viel Grad dieser Bogen hält.

Hier ist B = 134,1 und R = 71,9

daher $b = \frac{134{,}1 \times 57{,}29578}{71{,}9} = 106{,}86^0$

$= 106^0\ 51'\ 36''.$

Aufgabe 794. Der Radius eines Kreises $= \mathbf{R}$ und die Fläche eines Ausschnitts dieses Kreises $= A^2$ sind gegeben; man soll hieraus die Länge des zu diesem Ausschnitte gehörigen Bogens berechnen.

Auflösung. Da $\frac{BR}{2} = A^2$, so ist $B = \frac{2\,A^2}{R}$.

Aufgabe 795. Aus dem gegebenen Radius eines Kreises $= \mathbf{R}$ und der Fläche eines Ausschnitts desselben $= A^2$ soll berechnet werden: wie viel Grade der zu diesem Ausschnitte gehörige Bogen hält.

Auflösung. Es ist $b = \frac{B}{R} \times \frac{180}{\pi}$ (Aufg. 793.)

und $B = \frac{2\,A^2}{R}$ (Aufg. 794.) folglich ist

$$b = \frac{2\,A_2}{R^2} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2\,A^2}{R^2} \times 57{,}29578.$$

Beispiel. Der Radius eines Kreises ist $= 12{,}1$, und die Fläche eines Ausschnittes dieses Kreises $= 128$; wie viel Grad hält der zu diesem Ausschnitte gehörige Kreisbogen.

Da $R = 12{,}1$ und $A^2 = 128$, so ist

$$b = \frac{2\ .\ 128}{12{,}1^2} \times 57{,}29578$$

$$= \frac{256 \times 57{,}29578}{12{,}1 \times 12{,}1} = 100^\circ\ 10'\ 57''.$$

Aufgabe 796. Aus der gegebenen Länge eines Bogens $= \mathbf{B}$, und der Zahl der Grade, die dieser Bogen hält, $= b^\circ$ soll die Länge des Radius berechnet werden.

Auflösung. Es ist $b = \frac{B}{R} \times \frac{180}{\pi}$ (Aufg. 792.)

folglich ist $R = \frac{B}{b} = \frac{180}{\pi} = \frac{B}{b} \times 57{,}29578.$

Beispiel. Ein Bogen von $36^\circ\ 36'$ hat eine Länge $= 36{,}4$; wie groß ist der Radius.

Da $b = 36^\circ\ 36' = 36\frac{3}{5} = 36{,}6$ und $B = 36{,}4$

so ist $R = \frac{36{,}4 \times 57{,}29578}{36{,}6} = 56{,}98.$

Aufgabe 797. Aus der gegebenen Länge eines Bogens $= \mathbf{B}$ und der Zahl der Grade, die derselbe hält, $= b^\circ$ soll die Fläche des zu diesem Bogen gehörigen Kreisausschnittes gefunden werden.

Auflösung. Es ist $A^2 = \frac{BR}{2}$

und $R = \frac{B}{b} \cdot \frac{180}{\pi}$ (Aufg. 796.)

folglich ist $A^2 = \frac{B^2}{2b} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{B^2}{b} \cdot 28{,}64789$.

Beispiel. Ist $B = 36{,}4$ und $b = 36^\circ\ 36' = 36{,}6$,

so wird $A^2 = \frac{36{,}4^2 \times 28{,}64789}{36{,}6} = 1037$.

Aufgabe 798. Die Länge eines Kreisbogens ist gegeben = B, und die Fläche des dazu gehörigen Ausschnitts = A^2; es soll hieraus der Radius dieses Kreises gefunden werden.

Auflösung. Da $\frac{BR}{2} = A^2$

so ist $R = \frac{2A^2}{B}$.

Aufgabe 799. Man soll aus der Länge eines Bogens = B und der Fläche des dazu gehörigen Ausschnitts = A^2 berechnen: wie viel Grad der gegebene Bogen hält.

Da $A^2 = \frac{B^2}{2b} \cdot \frac{180}{\pi}$ (Aufg. 797.)

so ist $b = \frac{B^2}{2A^2} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{B^2}{A^2} \times 28{,}64789$.

Beispiel. Die Länge eines Bogens ist = 23,43 und die Fläche des dazu gehörigen Ausschnitts = 697,1; wie viel Grad hält dieser Bogen?

Hier ist $B = 23{,}43$ und $A = 697{,}1$

folglich ist $b = \frac{23{,}43^2 \times 28{,}64789}{697{,}1}$

und daher $b = 22^\circ\ 33'\ 36{,}36''$.

Aufgabe 800. Aus der gegebenen Fläche eines Kreisausschnittes = A^2 und der Zahl der Grade, welche der zu diesem Ausschnitte gehörige Bogen hält, soll der Radius des Kreises gefunden werden.

Auflösung. Da $b = \frac{2A^2}{R^2} \cdot \frac{180}{\pi}$ (Aufg. 795.)

so ist $R^2 = \frac{2A^2}{b} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2A^2}{b} \times 57{,}29578$

und daher $R = \sqrt{\left(\frac{2A^2}{b} \cdot \frac{180}{\pi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{A^2 \times 114{,}59156}{b}\right)}$.

Beispiel. Ein Ausschnitt von $39^\circ 12'$ hat einen Flächeninhalt $= 892$; wie groß ist der Radius des Kreises?

Hier ist $b = 39^\circ 12' = 39\frac{1}{5} = 39{,}2$ und $A^2 = 892$

folglich ist $R = \sqrt{\left(\frac{892 \times 114{,}59156}{39{,}2}\right)} = 51{,}064.$

Aufgabe 801. Die Fläche eines Kreisausschnitts $= A^2$ ist gegeben, und die Zahl der Grade, welche der zu demselben gehörige Bogen hält $= b^\circ$; es soll hieraus die Länge dieses Bogens gefunden werden.

Auflösung. Da $\frac{B^2}{2\,b} \cdot \frac{180}{\pi} = A^2$ (Aufg. 797.)

so ist $B^2 = 2\,b \;.\; A^2 \;.\; \frac{\pi}{180} = 2\,b \;.\; A^2 \;.\; 0{,}01745$

und es ist daher $B = \sqrt{\left(2\,b\,A^2 \;.\; \frac{\pi}{180}\right)} = \sqrt{\;(b\,A^2 \;.\, 0{,}0349)}.$

Beispiel. Wenn $b = 39^\circ 12'$ und $A^2 = 892$, so wird
$B = \sqrt{\;(39{,}2 \times 892 \times 0{,}0349)} = 34{,}9.$

Druck von Leonhard Scheube in Erfurt.

Grüner zum Bibliothekdiener.

Grüner zum Bibliothekdienst.

Grüner zum. Bibliothekdiener.

Grüner zum Bibliothekdiener.